

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии

Научимся быстро находить сумму
последовательности, где каждый член умножается
на одно и то же число.



Где встречается геометрическая прогрессия

- Такие последовательности помогают описывать проценты, рост и уменьшение величин. Важно уметь узнавать первый член, знаменатель и число слагаемых, чтобы без лишних вычислений находить общую сумму.



Определение геометрической прогрессии

— Постоянное отношение

Геометрическая прогрессия — это последовательность, в которой каждый следующий член получается умножением предыдущего на одно и то же число q .

— Общий член

Любой член можно найти по формуле $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$. Она позволяет сразу вычислять нужный элемент, не выписывая все предыдущие значения.

— Как ведут себя члены

Если q больше 1, числа растут. Если $0 < q < 1$, они убывают. При $q = 1$ все члены остаются одинаковыми.

— Зачем это нужно в 9 классе

Умение работать с формулой общего члена помогает решать задачи на последовательности, проценты и сумму первых нескольких членов без громоздких подсчётов.



n

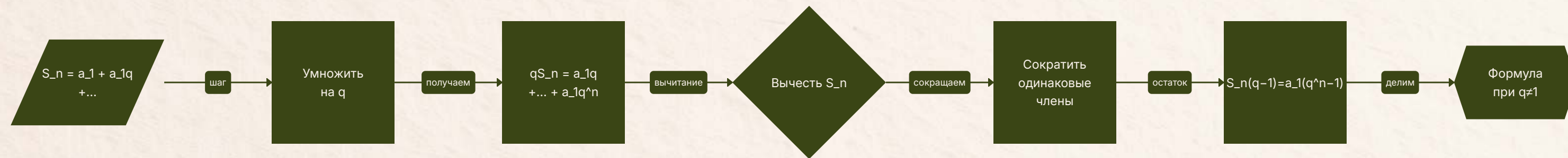
показывает, сколько первых членов входит
в сумму S_n .

Это число задаёт длину суммы: чем больше n , тем больше
слагаемых нужно учитывать. Для геометрической прогрессии
это особенно важно.

Школьный курс алгебры, тема «Геометрическая прогрессия»

Как выводят формулу суммы

Последовательность преобразований, которая приводит к короткой формуле вместо длинного сложения.



Основная формула суммы

1 Запомнить вид

Для геометрической прогрессии при $q \neq 1$ используется формула $S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$. Она связывает первый член, знаменатель и число слагаемых.

2 Две записи

Эту же формулу можно написать как $S_n = a_1(1 - q^n)/(1 - q)$. Обе записи равны, поэтому выбирают ту, которая удобнее для конкретного примера.

3 Что подставлять

В задаче нужно аккуратно определить a_1 , q и n , а затем подставить их в формулу. Ошибки чаще всего возникают именно на этом шаге.

4 Что вычислять сначала

Сначала находят степень q^n , потом упрощают дробь и только после этого записывают ответ. Такой порядок помогает избежать лишних ошибок в вычислениях.

Элементы формулы и их значение

Обозначение	Смысл
a_1	первый член
q	знаменатель
n	число членов
S	сумма

— Эта таблица помогает быстро вспомнить, что обозначает каждый символ в формуле суммы геометрической прогрессии.

Если не путать обозначения, легче правильно подставить данные и получить верный ответ без лишних пересчётов.

— Школьный курс алгебры

Как меняется сумма при росте n

Даже при небольшом числе членов сумма быстро увеличивается, потому что каждый новый член в этой прогрессии втрое больше предыдущего.

Рост S становится всё быстрее, и это хорошо видно уже на первых пяти значениях.

Пример для наглядного построения по формуле S



Пример вычисления суммы по формуле



1 Задаём данные

Пусть первый член равен 5, знаменатель равен 2, а количество членов равно 6. Сначала выпишем последовательность, чтобы видеть закономерность изменения.

2 Строим члены

Получаем числа 5, 10, 20, 40, 80 и 160. Каждый следующий член вдвое больше предыдущего, значит прогрессия записана верно.

3 Подставляем в формулу

Используем $S_6 = 5(2^6 - 1)/(2 - 1)$. Здесь особенно важно не перепутать степень и правильно вычислить значение 2^6 .

4 Упрощаем выражение

После вычисления степени получаем $S_6 = 5 \cdot 63$. Деление на 1 не меняет результат, поэтому промежуточная запись остаётся простой.

5 Записываем ответ

Итоговая сумма равна 315. Этот пример показывает, как формула заменяет длинное сложение и экономит время при решении задач.

Проверка результата на простом примере



Сверка по членам

Если сложить все шесть членов отдельно, получится $5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 = 315$. Это подтверждает правильность вычислений.



Сверка по формуле

Формула даёт тот же ответ, но путь короче. Вместо длинной суммы нужно подставить данные и аккуратно вычислить степень.



Экономия времени

Чем больше членов в последовательности, тем заметнее преимущество формулы. Она помогает быстро находить результат без поэлементного сложения.

Особый случай: $q = 1$

1 Все члены одинаковы

Если знаменатель q равен 1, каждый следующий член не меняется, поэтому последовательность состоит из одинаковых чисел: a_1, a_1, a_1 и так далее до n -го члена.

2 Сумма находится просто

В этом случае не нужна формула с дробью. Сумма первых n членов равна произведению a_1 на n , потому что одно и то же число складывается n раз.

3 Отдельный случай формулы

Общая запись с делением на $q-1$ здесь не подходит, так как знаменатель становится нулём. Поэтому случай $q = 1$ всегда рассматривают отдельно и не подставляют в основную формулу.

Типичные ошибки при решении задач

Ошибка	Причина	Верно
a_1 вместо a	Путают члены	Уточнить номер
Нет $n-1$	Забывают степень	Писать формулу
$q=1$ в формулу	Не проверяют случай	Считать отдельно
Ошибка в степенях	Неверный расчёт	Вычислять по шагам

Таблица помогает быстро увидеть, какие ошибки встречаются чаще всего, почему они возникают и как сразу проверить правильность решения.

Чаще всего ошибки связаны не с формулой, а с невнимательной записью данных. Полезнее всего сначала выписать первые члены и только потом подставлять значения.

Анализ типичных ошибок при решении задач на геометрическую прогрессию в школьном курсе алгебры

Как влияет знаменатель q на сумму

При одинаковых a_1 и n меняется только скорость роста последовательности. Поэтому разница между суммами становится особенно заметной уже на нескольких первых членах.

Чем больше q , тем быстрее увеличиваются члены и тем сильнее растёт S_5 . Даже при небольшом n сумма заметно зависит от знаменателя.

Расчёт по формуле $S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$ для $a_1 = 1$, $n = 5$



Связь с процентами и реальными задачами



Банковский вклад

Если вклад растёт по одному и тому же проценту, каждый новый результат зависит от предыдущего. Именно так появляется геометрическая прогрессия и необходимость быстро находить сумму нескольких шагов роста.



Скидки и уменьшение

Когда цена или величина уменьшается на постоянный процент, каждый следующий член становится меньше предыдущего в одно и то же число раз. Формула помогает описывать такие изменения без длинных вычислений.

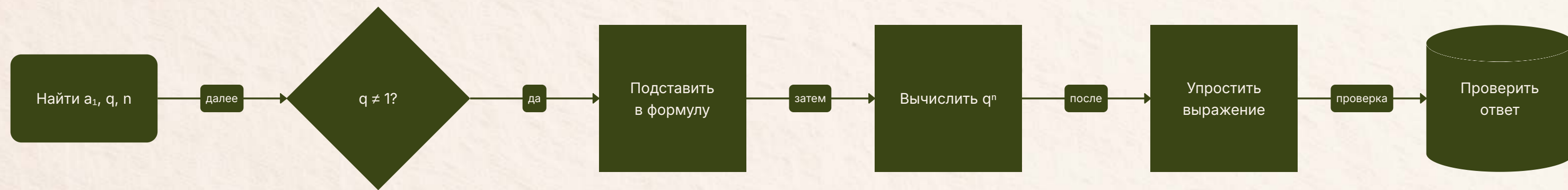


Повторяющийся рост

Модели с одинаковым коэффициентом используются в задачах о численности, накоплении и убывании. Здесь удобно складывать не все значения по отдельности, а применять общую формулу суммы.

Алгоритм решения задач на сумму

Последовательность действий для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии



Наглядная модель суммы через отрезки

Растущие отрезки

На рисунке каждый следующий отрезок вдвое длиннее предыдущего: 1, 2, 4, 8, 16. Такая модель помогает увидеть саму идею геометрической прогрессии без лишних вычислений.

Сумма как целое

Если сложить все отрезки, получится 31. Это показывает, что сумма состоит из нескольких частей, каждая из которых увеличивается по одному и тому же правилу, а не прибавляется одинаково.

Понятная проверка

Визуальная схема удобна для самопроверки: легко увидеть, что числа идут по правилу умножения на 2. Такой рисунок особенно полезен, когда формула ещё кажется сложной.



Разные записи одной и той же суммы

Запись	Когда удобно
$a_1(q^n-1)/(q-1)$	$q \neq 1$
$a_1(1-q^n)/(1-q)$	Другой вид
$a_1+a_1q+\dots$	По членам

- Одна и та же сумма может быть записана по-разному. Это помогает выбирать наиболее удобный вид формулы в зависимости от условия задачи.

Все три записи равны по смыслу, но выбираются по-разному: одна удобна для вычислений, другая — для понимания, третья — для проверки через первые члены.

- *Тождественные формы записи суммы геометрической прогрессии*

Почему формула работает



Записываем сумму

Сначала сумму первых n членов записывают в развёрнутом виде:
 $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$.



Умножаем на q

Затем обе части умножают на q . Получается почти такое же выражение, только каждый член сдвигается на один шаг вправо.



Вычитаем и сокращаем

При вычитании большинства одинаковых слагаемых остаются только первый и последний члены. Поэтому длинная сумма превращается в короткую формулу.

Сравнение арифметической и геометрической прогрессий

Обе последовательности могут начинаться с одного числа, но дальше развиваются по-разному. Это видно уже на первых пяти членах.

У арифметической прогрессии рост равномерный, а у геометрической — ускоряющийся. Поэтому сумма геометрической прогрессии может стать очень большой за короткое время.

Сравнительный пример для школьного курса алгебры



Формула, которая ЭКОНОМИТ время

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии помогает быстро считать длинные последовательности и избегать лишних действий. Главное — правильно определить a_1 , q и n , а случай $q = 1$ рассматривать отдельно.