

Тождества в алгебре: основные формулы и их применение

Тождества помогают упростить выражения
и быстро проверить равенства.

Зачем изучать тождества в 7 классе

Эти формулы делают выражения короче, помогают раскрывать скобки, разлагать многочлены на множители и проверять вычисления. Без них сложно уверенно решать уравнения и преобразовывать выражения.



Что называется тождеством

1. Определение

Тождество — это равенство, которое остаётся верным при любых допустимых значениях букв. Оно должно работать не для одного случая, а для всех значений из области определения.

2. Примеры формул

К тождествам относятся, например, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. В обеих записях левая и правая части равны при любых подходящих числах.

3. Проверка значений

Если подставить вместо букв разные числа, верность тождества сохранится. Именно это отличает его от обычного равенства, которое может быть справедливым только при отдельных значениях переменной.

Равенство и тождество: в чём разница

Обычное равенство

Равенство может быть верным только при некоторых значениях переменной. Например, $x+2=5$ выполняется лишь при $x=3$, а при других значениях уже становится неверным.

Что делает тождество особым

Тождество верно всегда, если выражения имеют смысл. Его нельзя «подобрать» под один ответ: оно остаётся правильным для любого допустимого значения переменной.

Проверка на числах

Если подставить $x=2$, $x=-1$ и $x=0$, тождество сохранит верность, а обычное равенство — нет. Такие примеры помогают увидеть разницу наглядно.



Основные формулы сокращённого умножения

Формула	Запись
Квадрат суммы	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Разность квадратов	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Куб суммы	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Куб разности	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Школьный курс алгебры, 7 класс

Эти формулы стоит знать наизусть: они ускоряют вычисления и преобразование выражений.

Формулы помогают быстро раскрывать скобки, разлагать выражения на множители и выбирать удобную запись для вычислений.

Квадрат суммы

1.

Формула

Квадрат суммы записывается так: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. В результате всегда получаются три части: квадрат первого слагаемого, удвоенное произведение и квадрат второго слагаемого.

2.

Пример вычисления

Для выражения $(3+5)^2$ получаем $3^2+2\cdot3\cdot5+5^2$. После вычислений выходит $9+30+25=64$. Формула позволяет считать быстрее, чем перемножать скобки вручную.

3.

Типичная ошибка

Часто забывают средний член $2ab$ или ставят его с неправильным знаком. Чтобы не ошибиться, полезно помнить: в квадрате суммы все три части складываются.

Квадрат разности

Запись формулы

Формула имеет вид $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
Крайние части остаются положительными,
а знак в середине меняется на минус, потому
что вычитается удвоенное произведение.

Пример раскрытия

Если раскрыть $(x-4)^2$, получится $x^2-8x+16$. Такая
запись удобна, когда нужно привести
выражение к стандартному виду или упростить
дальнейшие вычисления.

Что важно запомнить

Квадрат разности отличается от разности
квадратов: в нём есть три слагаемых, а не два
множителя. Именно поэтому нужно
внимательно смотреть на структуру выражения.

Разность квадратов



Главная формула

Если нужно разложить выражение вида $a^2 - b^2$, используйте запись $(a-b)(a+b)$. Это помогает заменить разность двух квадратов на произведение двух скобок.

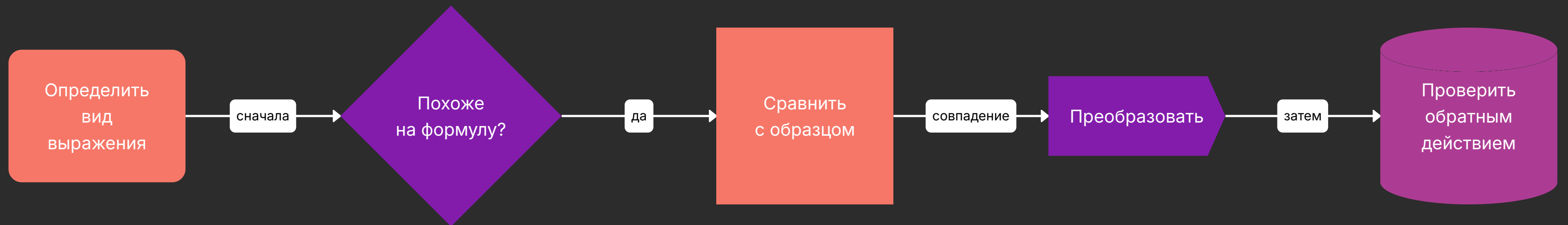


Удобство преобразования

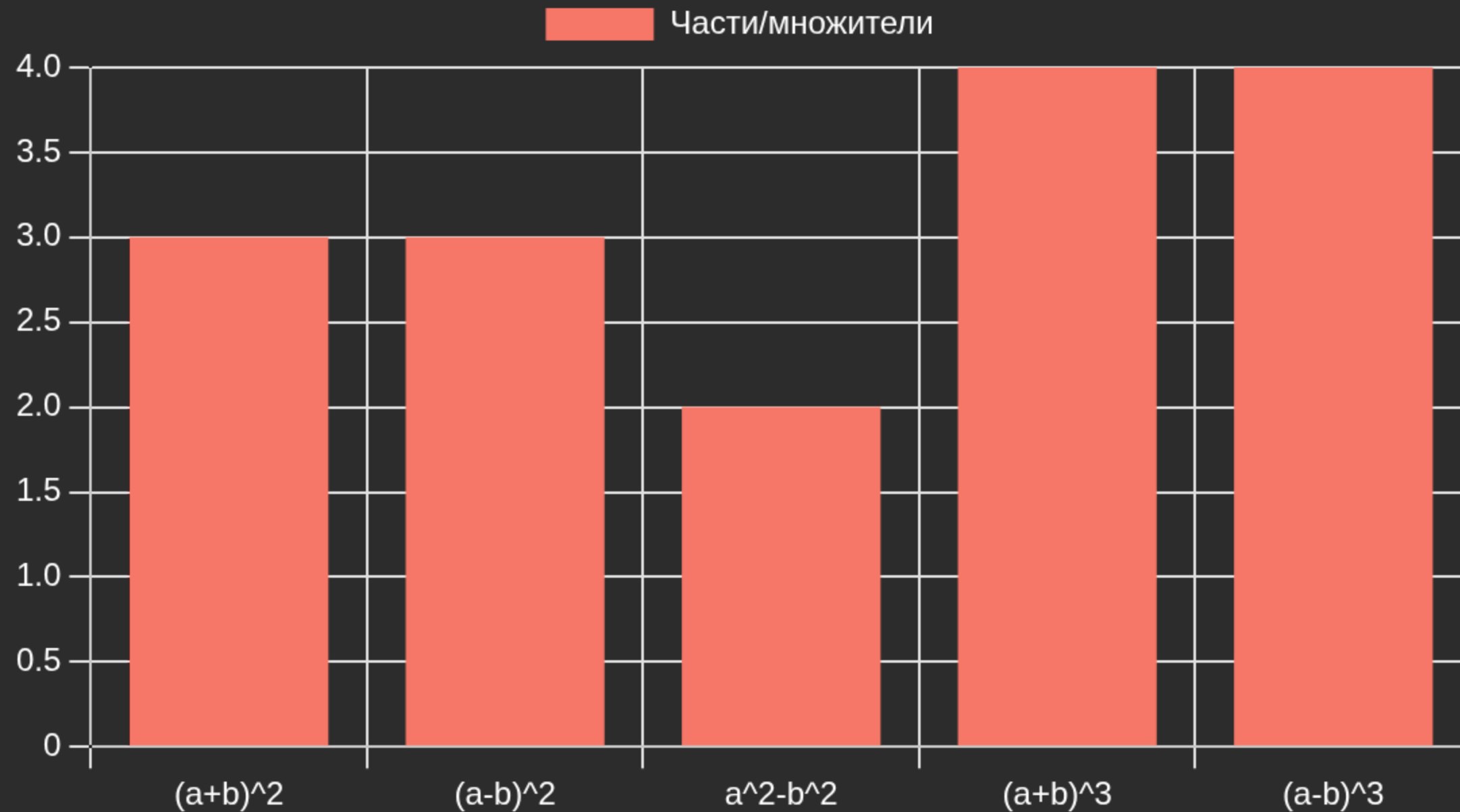
Такое тождество особенно полезно при сокращении записи и разложении на множители. Например, $49 - y^2$ можно сразу записать как $(7-y)(7+y)$, не выполняя длинных вычислений.

Как распознать подходящее тождество

Последовательность действий при выборе и применении формулы сокращённого умножения



Сколько частей получается в результате преобразования



Формулы сокращённого умножения уменьшают объём записи и помогают быстрее выполнять преобразования без лишних промежуточных шагов.

Чем сложнее формула, тем важнее видеть её структуру: количество частей подсказывает, какое тождество применить.

Куб суммы и куб разности

Формула куба суммы

При возведении суммы в третью степень получаем четыре слагаемых: куб первого числа, два средних члена и куб второго числа. Важно заметить коэффициенты 3 у центральных слагаемых.

Формула куба разности

В формуле куба разности знаки чередуются: минус стоит у первого и последнего средних членов. Такое построение помогает быстро отличать её от формулы куба суммы.

Как устроены члены

Если внимательно сравнить обе формулы, видно, что середина всегда состоит из двух произведений с коэффициентом 3. Именно поэтому здесь особенно важно не потерять ни знак, ни множитель.

Пример раскрытия

Например, $(x+2)^3$ раскрывается как $x^3+6x^2+12x+8$. Этот пример показывает, как формулы кубов позволяют сразу получить удобную запись без длинного перемножения скобок.

Геометрический смысл квадрата суммы

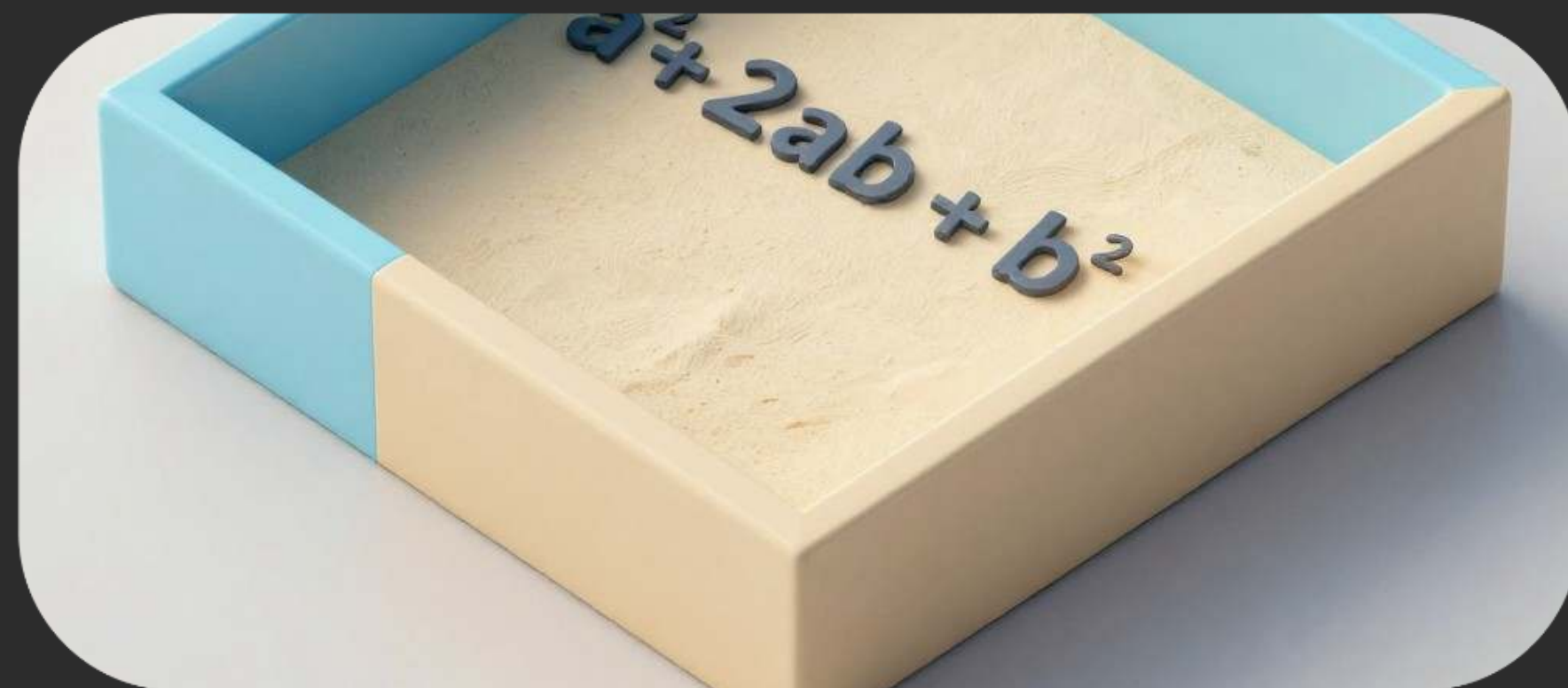
Площадь большого квадрата

Если сторона квадрата равна $a+b$, его площадь можно представить как сумму нескольких частей. Такой рисунок делает формулу наглядной: каждая часть площади имеет свой простой смысл, а не выглядит абстрактной записью.



Откуда берётся $2ab$

Внутри большого квадрата удобно выделить квадрат a^2 , квадрат b^2 и два одинаковых прямоугольника по ab . Вместе они дают $a^2 + 2ab + b^2$, поэтому средний член становится понятным и запоминается легче.



Проверка тождества подстановкой чисел

1. Выбрать значения

Сначала подставляют несколько допустимых значений переменной, чтобы выражения имели смысл. Лучше брать простые числа, при которых вычисления не перегружены и легко сравнить левую и правую части.

2. Сравнить результаты

Затем считают обе части тождества отдельно и смотрят, совпадают ли ответы. Если результаты одинаковы для выбранных значений, это подтверждает правильность преобразования на этих примерах.

3. Не забыть доказательство

Однако совпадение чисел ещё не заменяет алгебраического доказательства. Чтобы убедиться окончательно, нужно преобразовать выражение по правилам и показать, что равенство верно для всех допустимых значений.

Частые ошибки при работе с тождествами

Ошибка	Неверно	Верно
Нет $2ab$	$(a+b)^2=a^2+b^2$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Путаница знака	$(a-b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Смещение формул	$(a-b)^2=a^2-b^2$	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Таблица показывает типичные ошибки, неверные записи и правильный вид формул. Она помогает быстрее замечать опасные места: знаки, коэффициенты и различие между похожими выражениями.

Главные источники ошибок — средний член, знак и похожие записи. Если держать в памяти структуру формул, большинство неточностей можно быстро заметить и исправить.

Как тождества помогают упрощать выражения

1.

Сокращать запись

Тождество позволяет заменить длинное выражение более коротким и удобным. Например, $x^2 + 2x + 1$ можно сразу записать как $(x+1)^2$, не выполняя лишних действий.

2.

Ускорять вычисления

Когда выражение имеет знакомый вид, его легче считать и сравнивать с другими. Разность квадратов, например $25 - y^2$, удобно заменяется произведением $(5-y)(5+y)$.

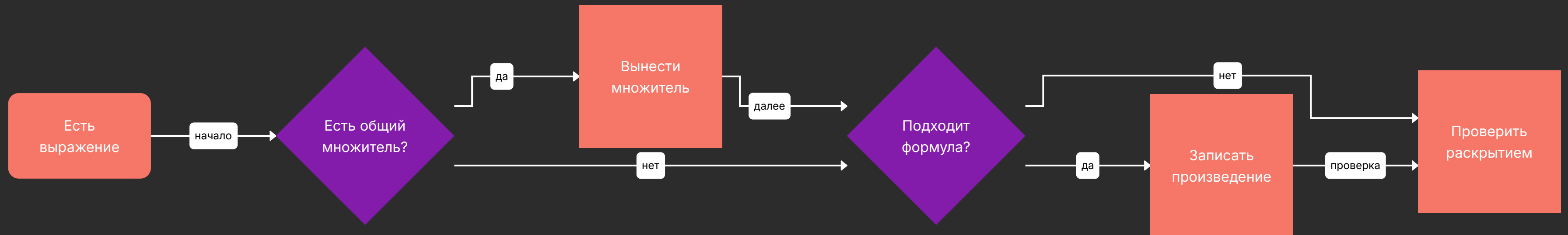
3.

Удобно решать задачи

Такие преобразования помогают в уравнениях, проверке ответов и упрощении многочленов. Чем быстрее ученик узнаёт формулу, тем меньше ошибок он допускает при вычислениях.

Разложение выражения на множители с помощью тождеств

Последовательность показывает, как по виду выражения выбрать подходящую формулу и проверить результат.



Одна и та же запись в разных формах



Иллюстративное сравнение форм записи выражения $(x+3)^2$

Три записи относятся к одному выражению, но используются в разных ситуациях: для раскрытия, вычисления или разложения на множители.

Форма записи меняется по цели работы, а математический смысл остаётся тем же.

Где тождества встречаются в школьных задачах



Раскрытие скобок

Тождества помогают быстро раскрывать скобки и получать более простую запись выражения. Это особенно полезно, когда нужно убрать лишние действия и увидеть структуру многочлена.



Сокращение дробей

При сокращении дробей важно разложить числитель и знаменатель на множители. Формулы тождеств часто дают именно тот вид, который позволяет сократить запись без ошибок.



Уравнения

В уравнениях тождества помогают преобразовать левую или правую часть в удобный вид. После этого легче перенести слагаемые, сравнить выражения и найти решение.



Упрощение выражений

В заданиях на преобразование многочленов тождества позволяют перейти от длинной записи к короткой. Это экономит время и делает вычисления более прозрачными.



Доказательство равенств

Когда нужно показать, что два выражения одинаковы, тождества дают надёжный алгебраический путь. Ученик не только проверяет ответ, но и доказывает его по правилам.

Достаточно держать в памяти три основные формулы: квадрат суммы, квадрат разности и разность квадратов. Остальные легко восстановить по знакам и коэффициентам.

3

главные опоры помогают
быстрее узнавать
формулы.

Учебный материал по теме «Тождества»

Тождества: что нужно унести с урока

Тождества помогают узнавать знакомые формулы, быстро преобразовывать выражения и проверять решения. Если внимательно следить за знаками и коэффициентами, работа с алгеброй становится заметно увереннее.