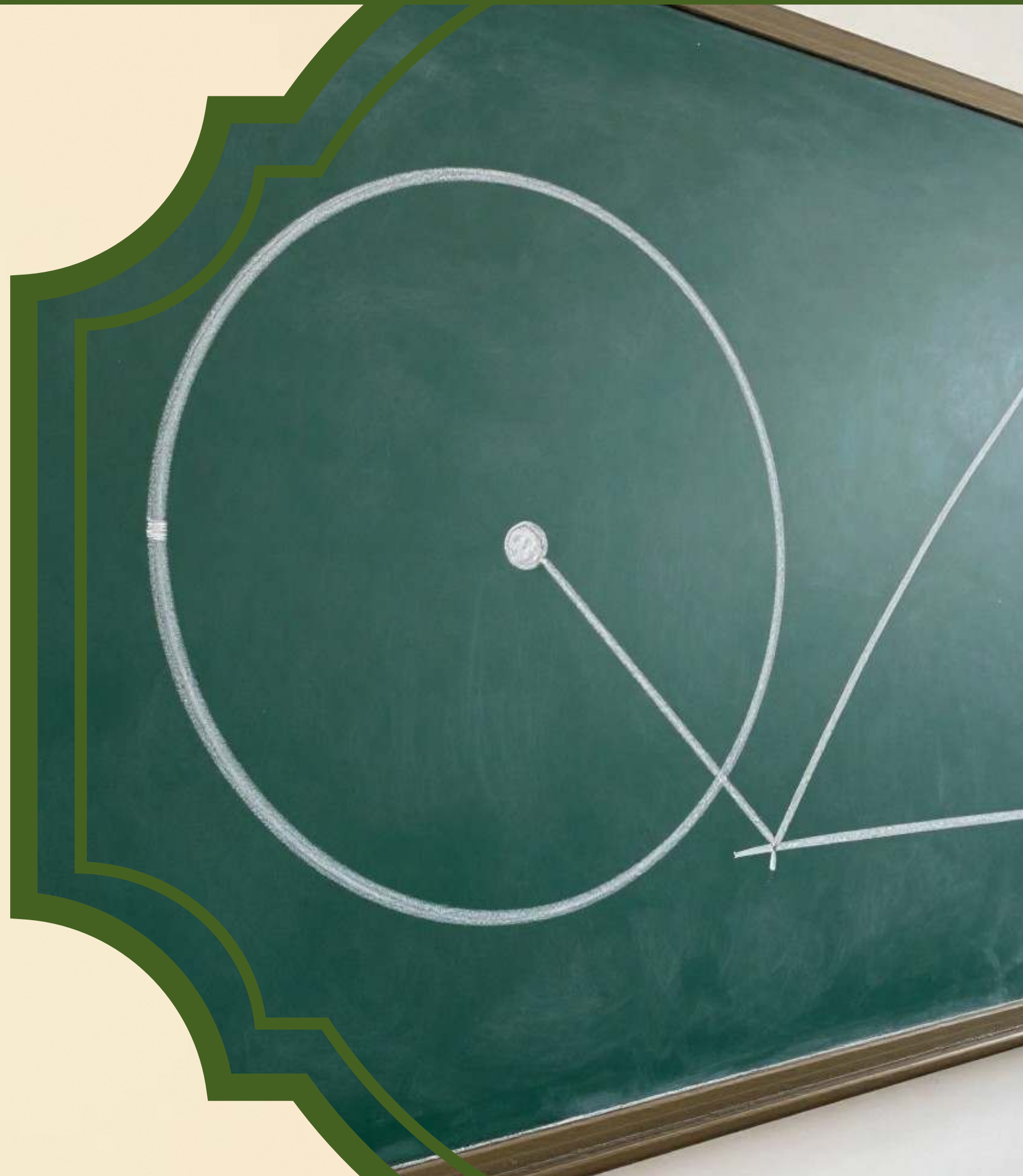
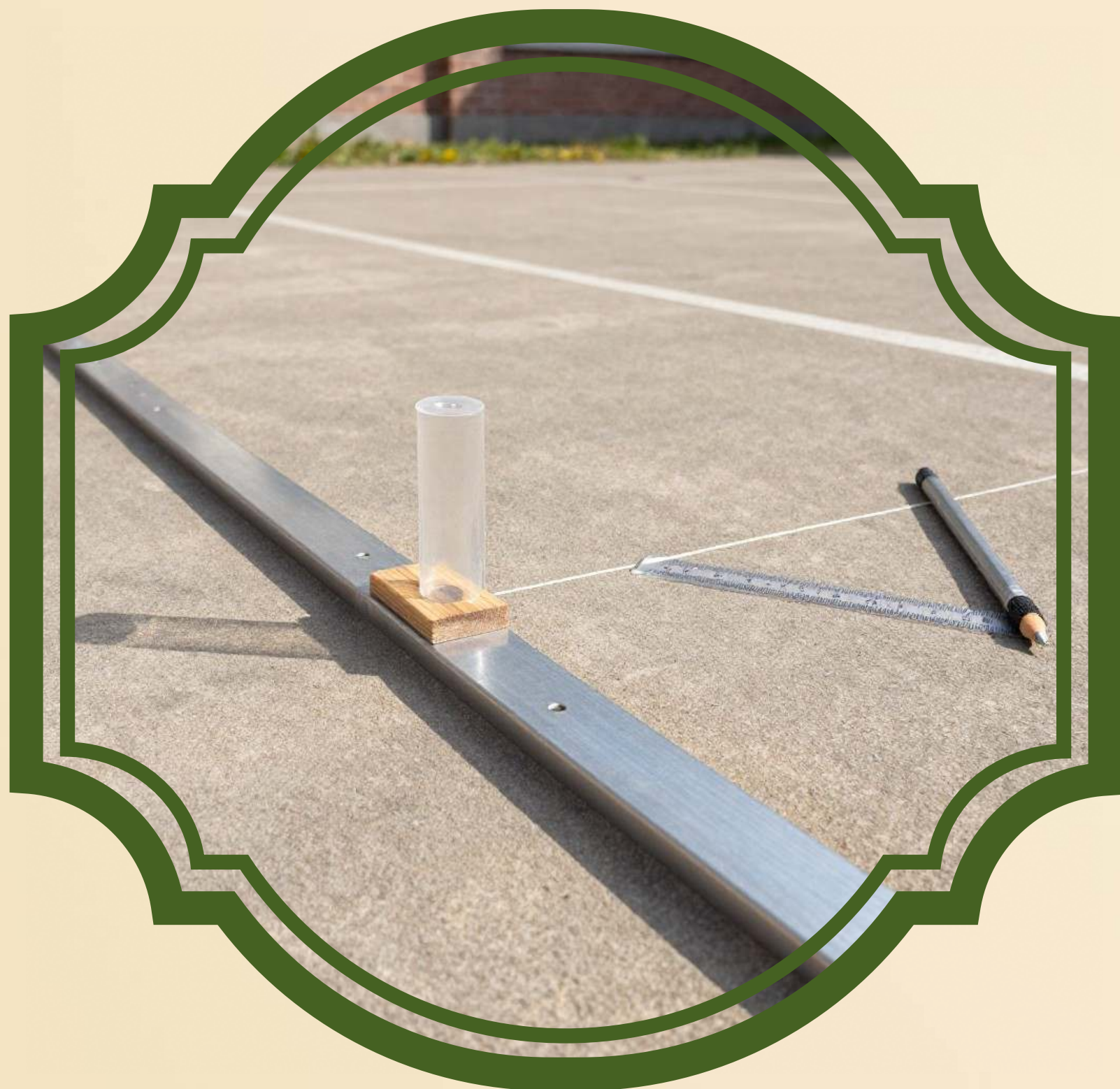


Построение касательной: от окружности к графику

Разбираем, как касательная показывает направление фигуры в одной точке.





Где встречается касательная

Касательная соединяет геометрию с графиками функций: она помогает строить чертежи, читать движение и понимать форму линий. Сегодня разберём определение, основные свойства, способы построения и проверку результата.

Что такое касательная

1 Главная идея

Касательная — это прямая, которая касается фигуры в одной точке и вблизи неё совпадает с её направлением. Она не просто проходит рядом, а «подхватывает» форму линии именно в этом месте.

2 Точка касания

Точка касания — это место, где прямая и фигура соприкасаются. Для окружности и для графика функции она определяется по-разному, но смысл один: здесь направление фигуры передаётся прямой.

3 Общее свойство

Окружность и график функции выглядят по-разному, поэтому и касательная строится по разным правилам. Однако во всех случаях важно одно: она показывает местное направление фигуры в выбранной точке.

Касательная в реальной жизни и на рисунках

Вокруг нас

Касательные можно заметить в реальных объектах: у колеса, у дуги дороги, на линии движения транспорта. В каждом случае прямая в одной точке показывает, куда объект «смотрит» именно сейчас.

Два примера

На слайде полезно сравнить два образа: окружность с прямой в одной точке и график функции с линией, которая как будто прижимается к кривой. Это помогает увидеть одну идею в двух формах.

На рисунках

На чертежах касательная помогает аккуратно описать форму окружности и плавной кривой. Она делает рисунок понятнее, когда нужно показать направление без лишних пересечений и резких изломов.



Касательная к окружности: главное свойство

1 Одна общая точка

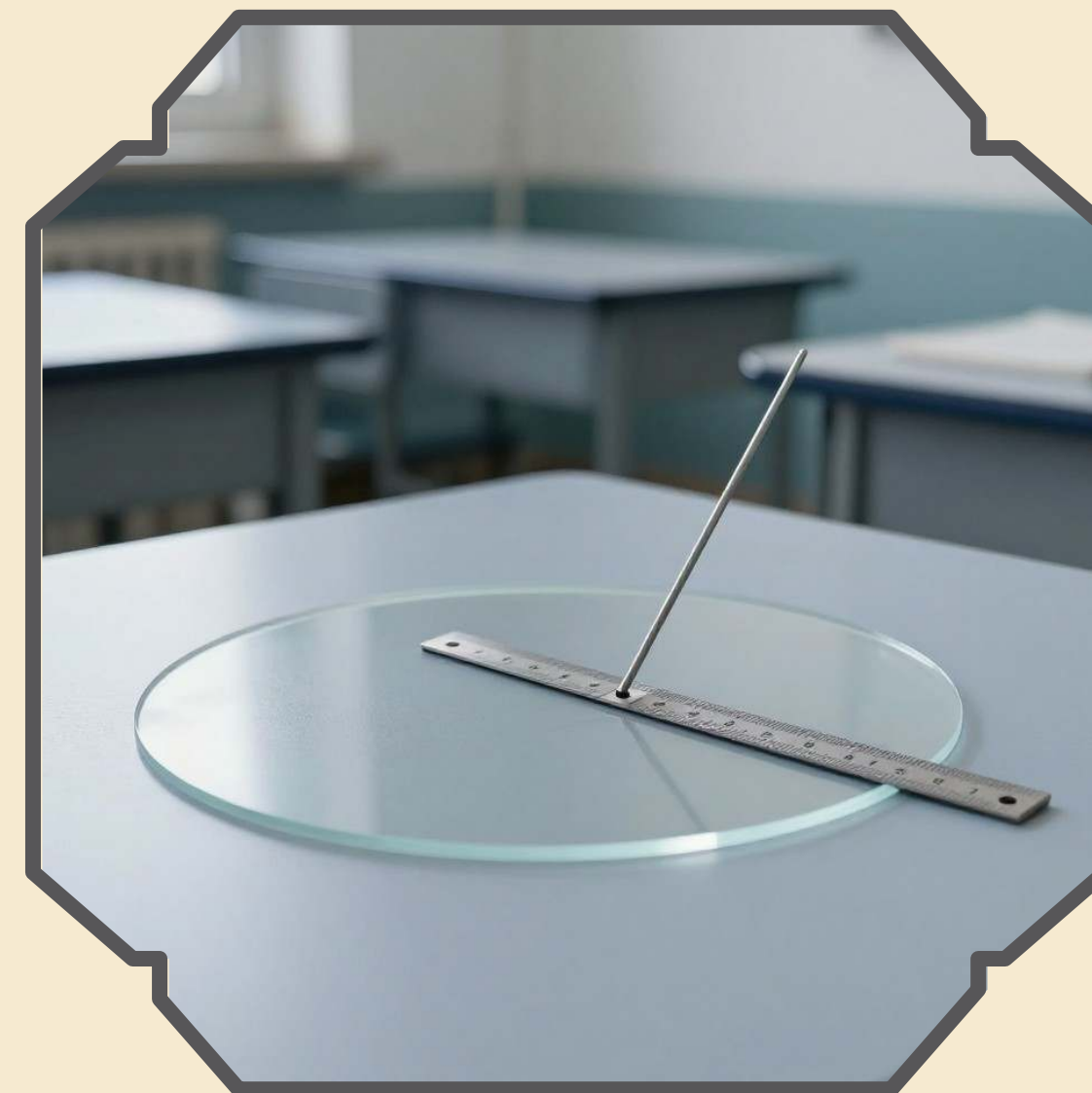
У окружности касательная имеет только одну общую точку с самой окружностью. Если прямая пересекает круг в двух местах, это уже не касательная, а секущая.

2 Прямой угол

Радиус, проведённый в точку касания, всегда перпендикулярен касательной. Это свойство удобно запоминать как самый быстрый способ отличить правильное построение от ошибочного.

3 Проверка построения

На чертеже сначала находят точку касания, затем проводят радиус и строят к нему перпендикуляр. Если угол не равен 90° , значит, касательная проведена неверно.



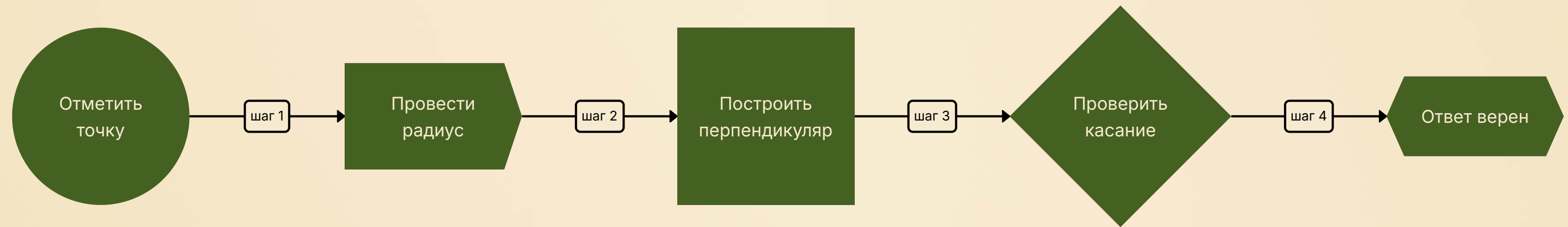
Как построить касательную к окружности

Пошаговое построение касательной через радиус и перпендикуляр



Алгоритм построения к окружности

Алгоритм построения и быстрой проверки результата



Касательная и секущая: в чём разница

1 Число точек

Секущая пересекает окружность или график в двух точках. Касательная отличается от неё тем, что касается фигуры только в одной точке и не проходит через её внутреннюю часть рядом с ней.

2 Сближение точек

Если две точки секущей сближать, её направление меняется всё меньше. В пределе линия начинает совпадать с касательной, поэтому касательную удобно понимать как «сжатую» секущую.

3 Связь с графиком

Это сравнение особенно важно для графиков функций. Оно показывает, почему касательная описывает локальное поведение кривой, а секущая лишь соединяет две отдельные точки.

Касательная к графику функции

1 Направление кривой

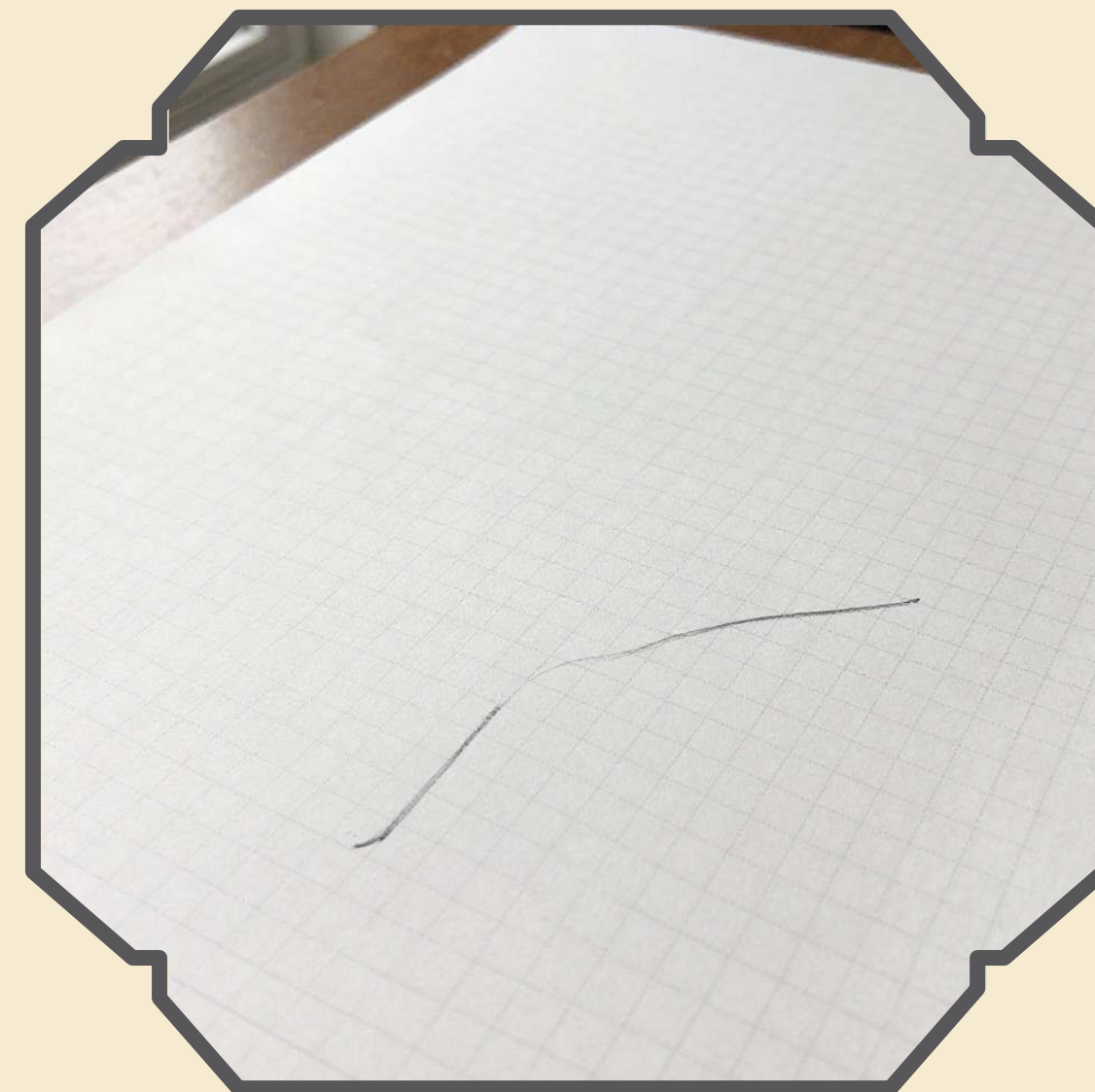
На графике касательная показывает направление кривой в выбранной точке. Она должна проходить через эту точку и повторять её локальный ход, не отклоняясь слишком рано вверх или вниз.

2 Построение по сетке

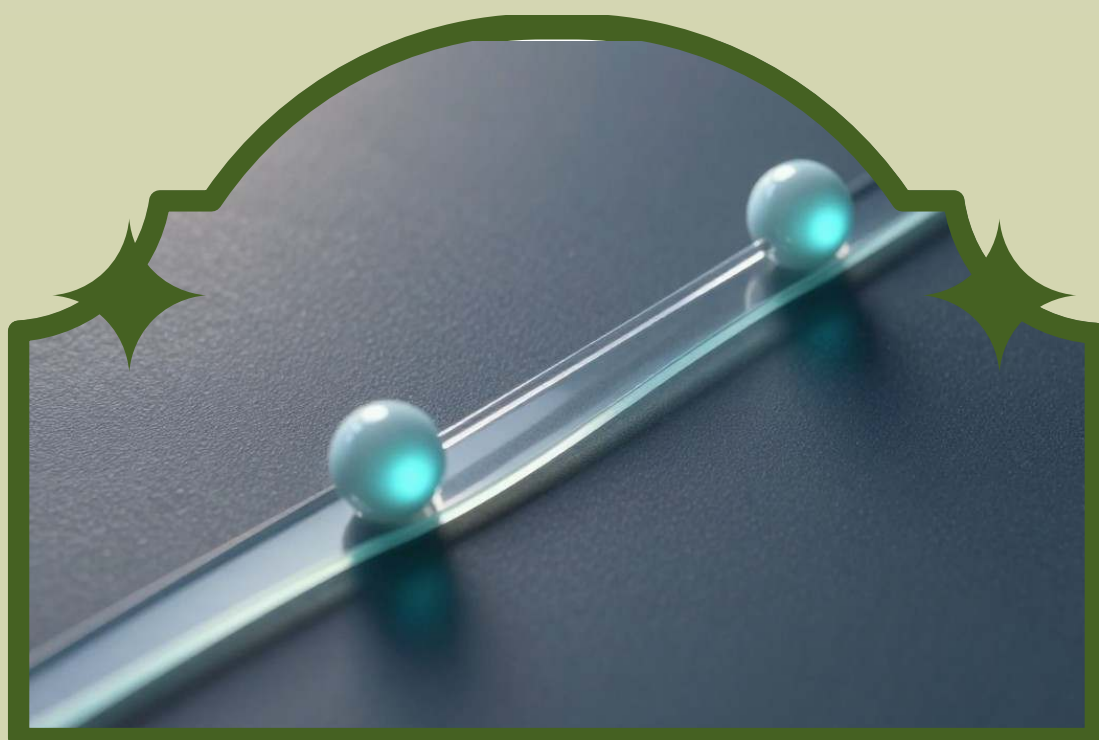
На клетчатой бумаге удобно сначала найти точку касания, а затем провести линию по её направлению, опираясь на ещё одну заметную точку. Так проще сохранить нужный наклон.

3 Проверка рядом с точкой

Главная проверка проста: рядом с точкой касательная должна как будто идти вместе с графиком. Если прямая режет кривую слишком близко, построение нужно исправить.

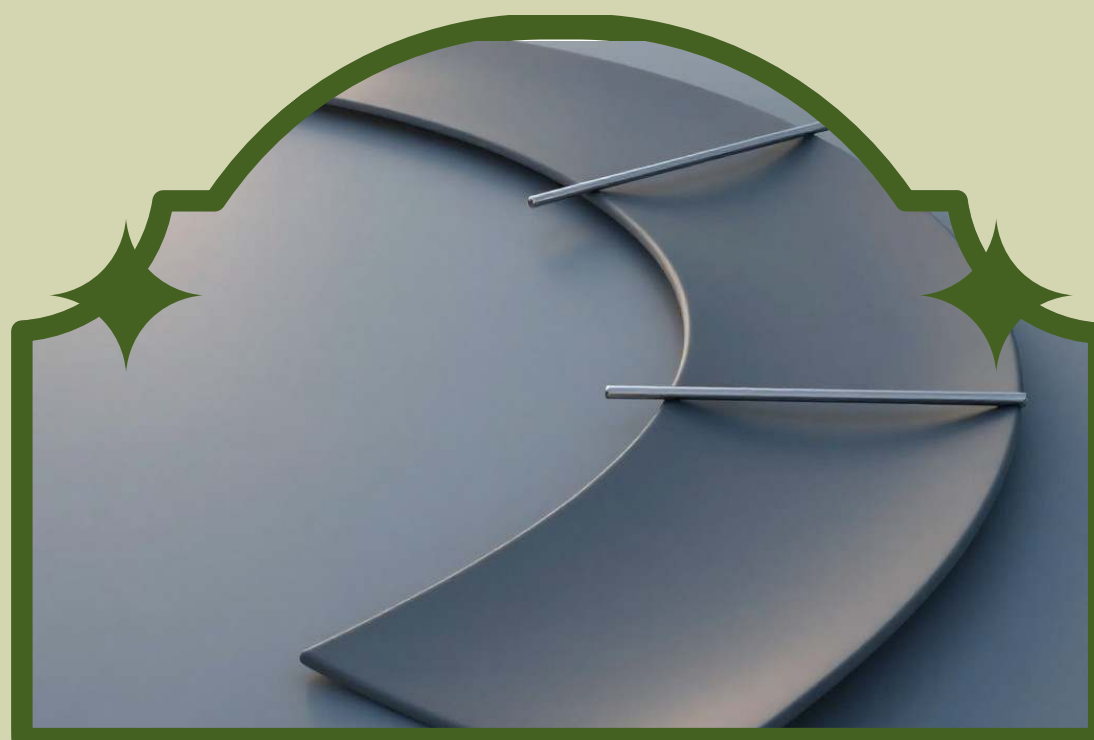


Секущая превращается в касательную



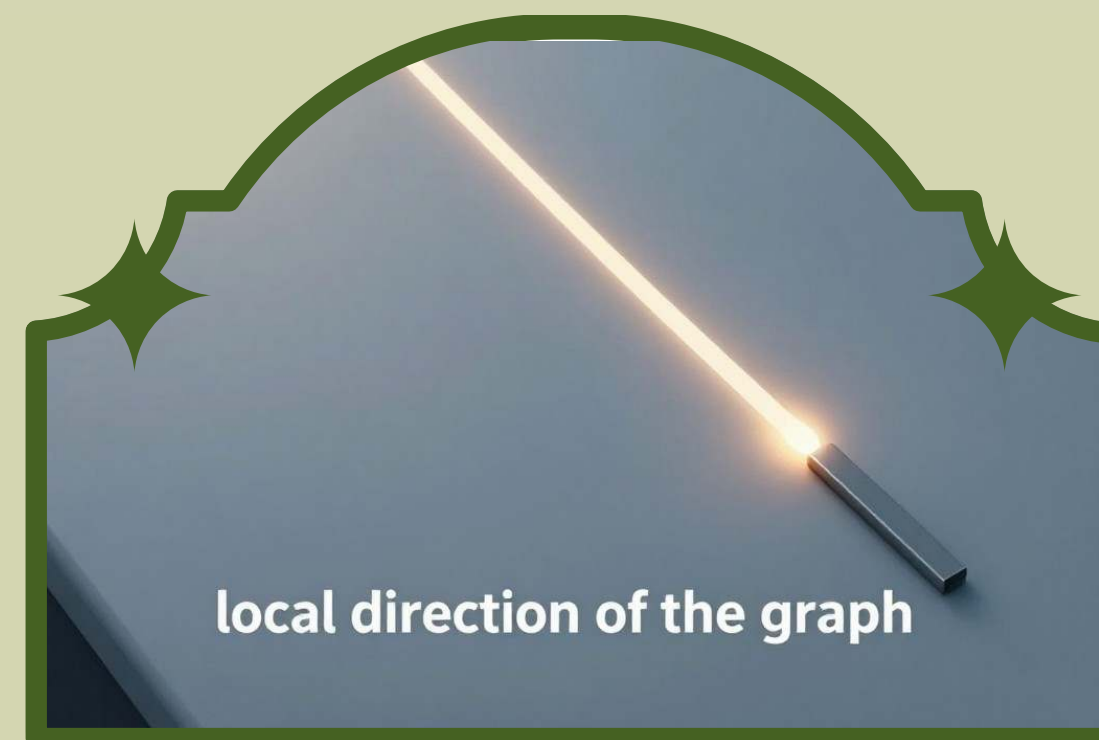
Две точки становятся ближе

Представьте секущую, которая проходит через две близкие точки графика. Если одну точку медленно сдвигать к другой, линия почти не меняет направление, но всё точнее повторяет форму кривой. Так появляется касательная — как самый точный «моментальный снимок» графика.



От пересечения к касанию

На рисунке это удобно показать несколькими положениями одной прямой. Сначала она заметно пересекает график, потом касается его всё точнее, а в конце выглядит как единая опора для кривой. Именно так видно, что касательная — предельное положение секущей.

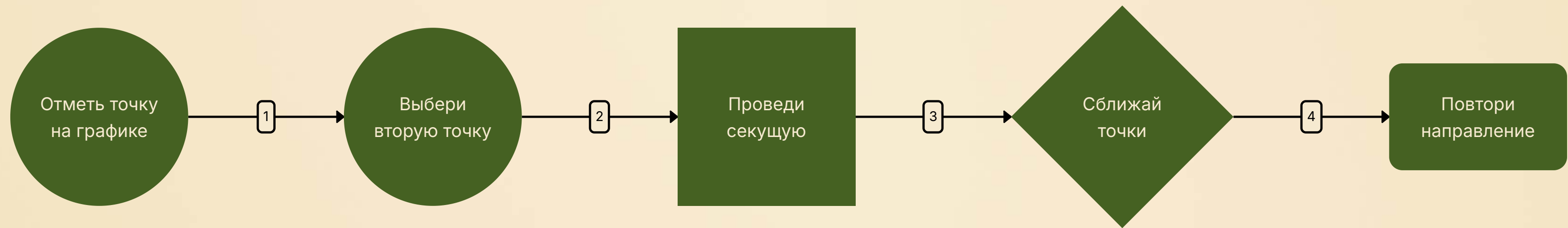


Локальное направление графика

Такой переход помогает понять, почему касательная важна не только в геометрии. Она описывает локальное направление линии в одной точке и подводит к идее производной. Пока достаточно запомнить: чем ближе точки секущей, тем ближе она к касательной.

Пошаговое построение касательной

Построение касательной на клетчатой бумаге через секущую и её предельное направление



Три способа проверки

● Точка совпадения

Проверьте, проходит ли прямая точно через заданную точку. Если линия смещена даже немного, это уже не касательная, а неверное приближение к графику.

● Проверка угла

Для окружности используйте радиус как контроль. Если он не образует прямой угол с прямой, построение выполнено неправильно и нуждается в исправлении.

● Локальное направление

Оцените поведение рядом с точкой. Верная касательная почти повторяет локальный ход кривой и не должна заметно пересекать график вблизи места касания.

Касательная и секущая: сравнение

Объект	Точка	Свойство	Построение
Касательная	1	Касается	По направлению
Секущая	2	Пересекает	Через 2 точки
Окружность	1	Радиус	Перпендикуляр

Сравнение помогает не путать похожие линии на рисунках и графиках.

Касательная имеет одну общую точку с фигурой, а секущая — две; для окружности ключевой признак проверки связан с перпендикуляром к радиусу.

Свойства касательной и секущей из школьной геометрии

Шаги построения на окружности

1 Отметь точку

Сначала отметь на окружности точку, в которой нужна касательная. Это место станет точкой касания, поэтому важно поставить отметку точно на линии окружности.

2 Построй перпендикуляр

Проведи радиус из центра к этой точке. Затем с помощью угольника или клеток построй через неё прямую, перпендикулярную радиусу.

3 Проверь касание

Проверь результат: прямая должна касаться окружности только в одной точке. Если появляется второе пересечение, значит, линия построена неверно.



Работа с графиком на сетке

1 Выбери направление

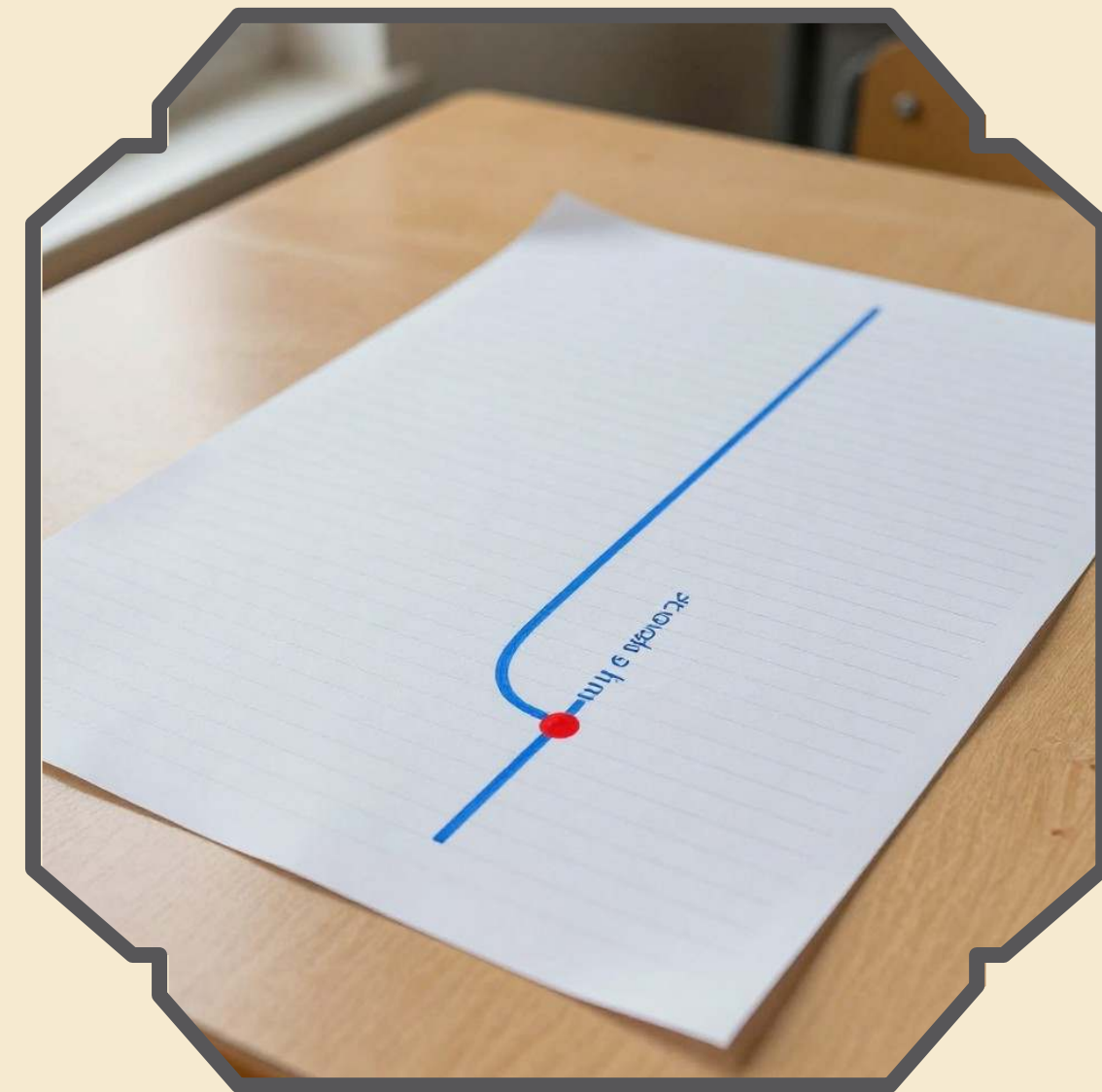
Сначала найди отмеченную точку на графике и посмотри на его общий ход. Касательная должна проходить через эту точку и совпадать с направлением кривой рядом с ней.

2 Проведи линию

Затем построй прямую так, чтобы она не разрезала график возле точки, а как будто шла вместе с ним. На клетках удобно ориентироваться по наклону.

3 Сделай проверку

После построения сравни участок графика и прямую вблизи точки. Если линия слишком крутая или слишком пологая, она не отражает местное направление кривой.



Типичные ошибки при построении

Мимо точки

Если прямая не проходит через нужную точку, это не касательная. Даже небольшое смещение меняет построение, поэтому сначала всегда проверяют точность отметки.

Нет перпендикуляра

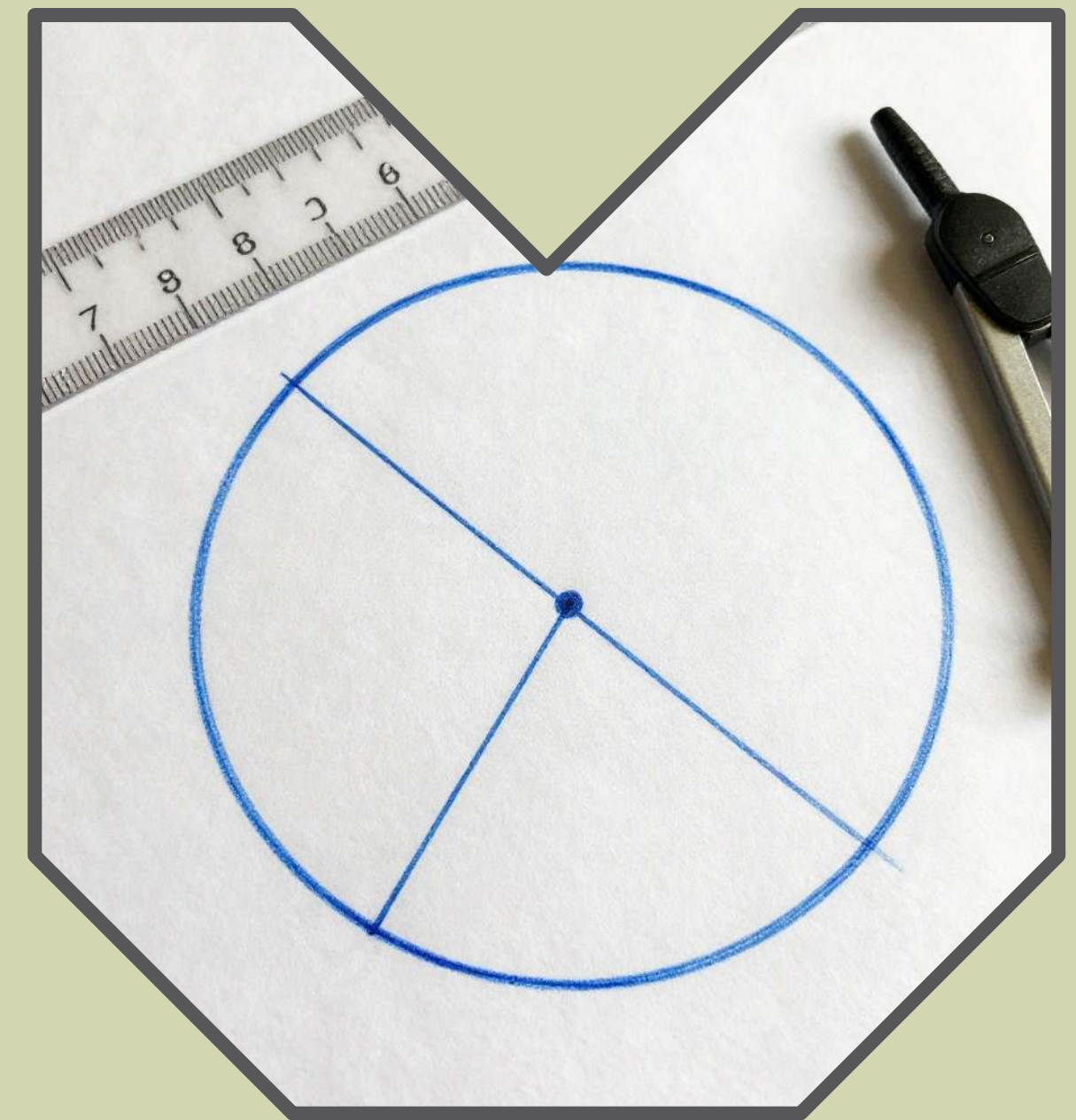
Иногда забывают про прямой угол между радиусом и касательной. Для окружности это главный признак, и без него построение нельзя считать верным.

Путаница с секущей

Секущую часто принимают за касательную, хотя она пересекает фигуру в двух точках. Такой рисунок выглядит похожим, но смысл у линий разный.

Нет проверки

Опасно рисовать линию только «на глаз» без проверки. Лучше свериться с клетками, угольником или соседними точками графика, чтобы убедиться в правильном направлении.

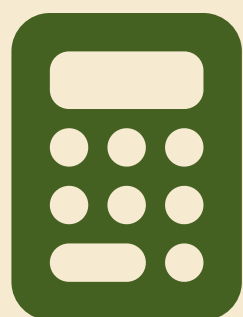


Касательная и производная



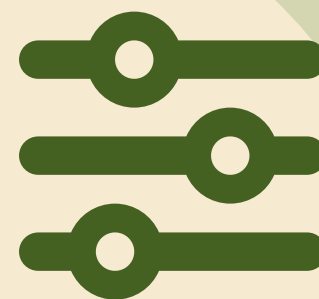
Наклон графика

Касательная показывает, как быстро меняется функция в выбранной точке. По её наклону можно понять, возрастает график или убывает.



Числовая мера

В старших классах наклон касательной связывают с производной. Это число помогает описывать поведение функции без построения длинных участков графика.



Скорость изменения

Чем круче прямая, тем сильнее изменение на участке. Пологая касательная означает более медленное изменение, а почти горизонтальная — очень слабое.



Связь понятий

Идея касательной соединяет рисунок и формулу. Она помогает переводить вид кривой на языке чертежа в точное описание на языке математики.

Касательная как направление в точке

1 Локальное направление

В любой задаче касательная показывает, куда фигура направлена именно в одной точке. Это локальная линия, поэтому её оценивают не по всему рисунку, а рядом с касанием.

2 Два способа

Для окружности касательную находят через перпендикуляр к радиусу. Для графика её понимают как предельное положение секущей, когда точки становятся всё ближе.

3 Общий смысл

Во всех случаях смысл один: касательная помогает увидеть форму фигуры вблизи точки. Она не заменяет саму фигуру, а только подсказывает её мгновенное направление.

Проверяем понимание

● Найди различие

Посмотри на три рисунка и определи, где линия касается фигуры, а где пересекает её. Сначала ищи число общих точек, затем сравни направление.

● Вопрос на подумать

Подумай, может ли через одну точку проходить несколько касательных. Для окружности ответ однозначен, а для некоторых более сложных фигур ситуация может отличаться.



● Проверь построение

Проверь, выполнено ли построение аккуратно. Для окружности важен прямой угол с радиусом, а для графика — совпадение с локальным ходом кривой.

● Сформулируй вывод

Сделай вывод устно или письменно: чем касательная отличается от секущей и по какому признаку их проще всего различать на рисунке.



Что запомнить о касательной

Касательная показывает направление фигуры в одной точке: для окружности она перпендикулярна радиусу, для графика отражает его локальный ход. Главное — строить аккуратно и не путать её с секущей.