



Векторы и операции с ними

Изучаем направление, длину и действия с векторами.



Векторы вокруг нас

Векторы помогают описывать движение на карте, шаги по клеткам, силу толчка и направление ветра. В координатах они превращаются в удобную запись двумя числами.

Что такое вектор

Направленный отрезок

Вектор изображают стрелкой: начало показывает точку старта, а конец — направление движения. Так легко увидеть, куда и как направлен объект.

Как обозначают

Векторы записывают одной буквой, например a или b , либо двумя буквами с точками начала и конца, например AB . Это удобно в чертежах и формулах.

Зачем он нужен

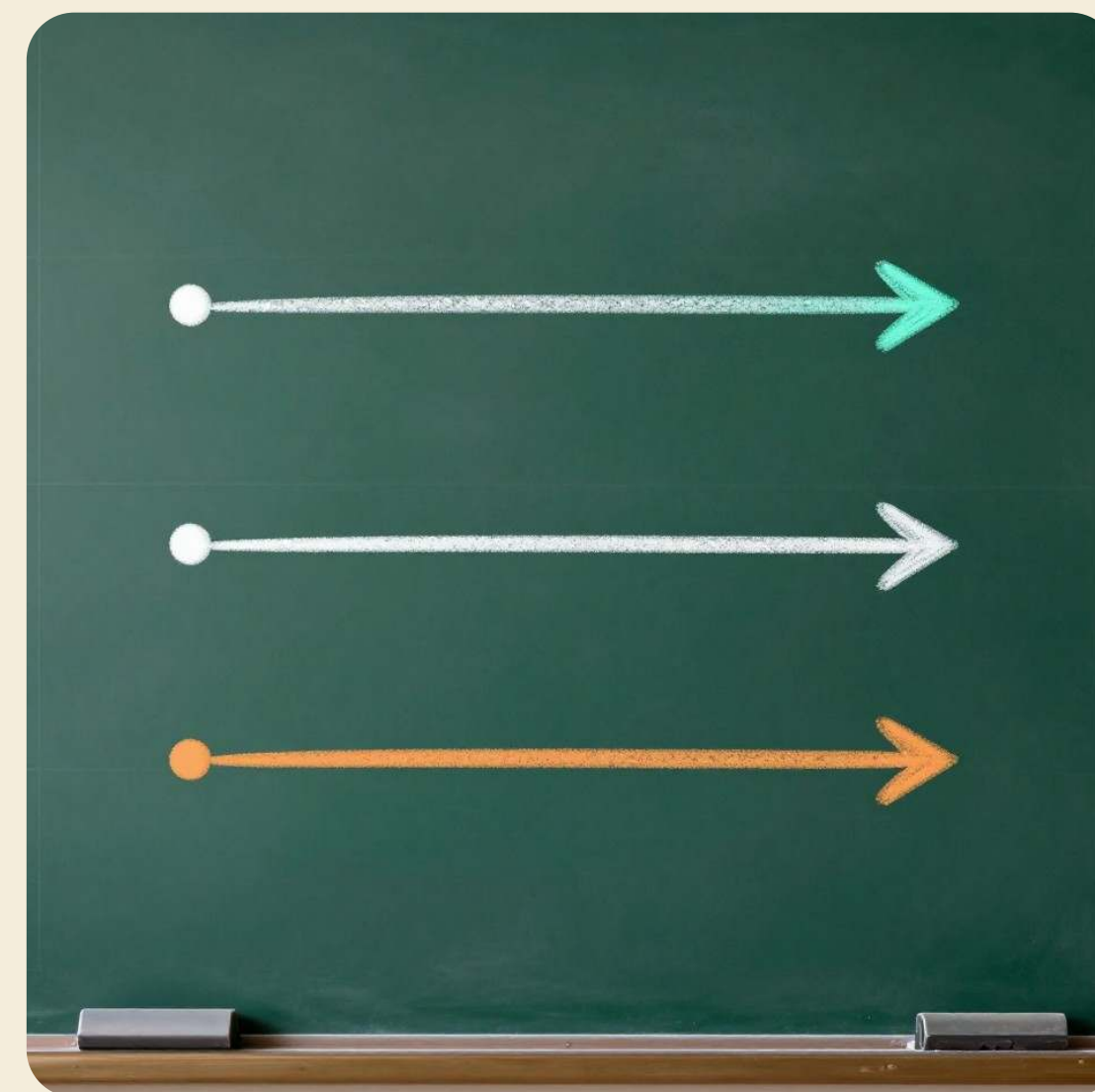
Векторы позволяют кратко описывать перемещения, силы и движение на плоскости. Благодаря этому геометрические задачи становятся нагляднее и проще для вычислений.

Длина и модуль

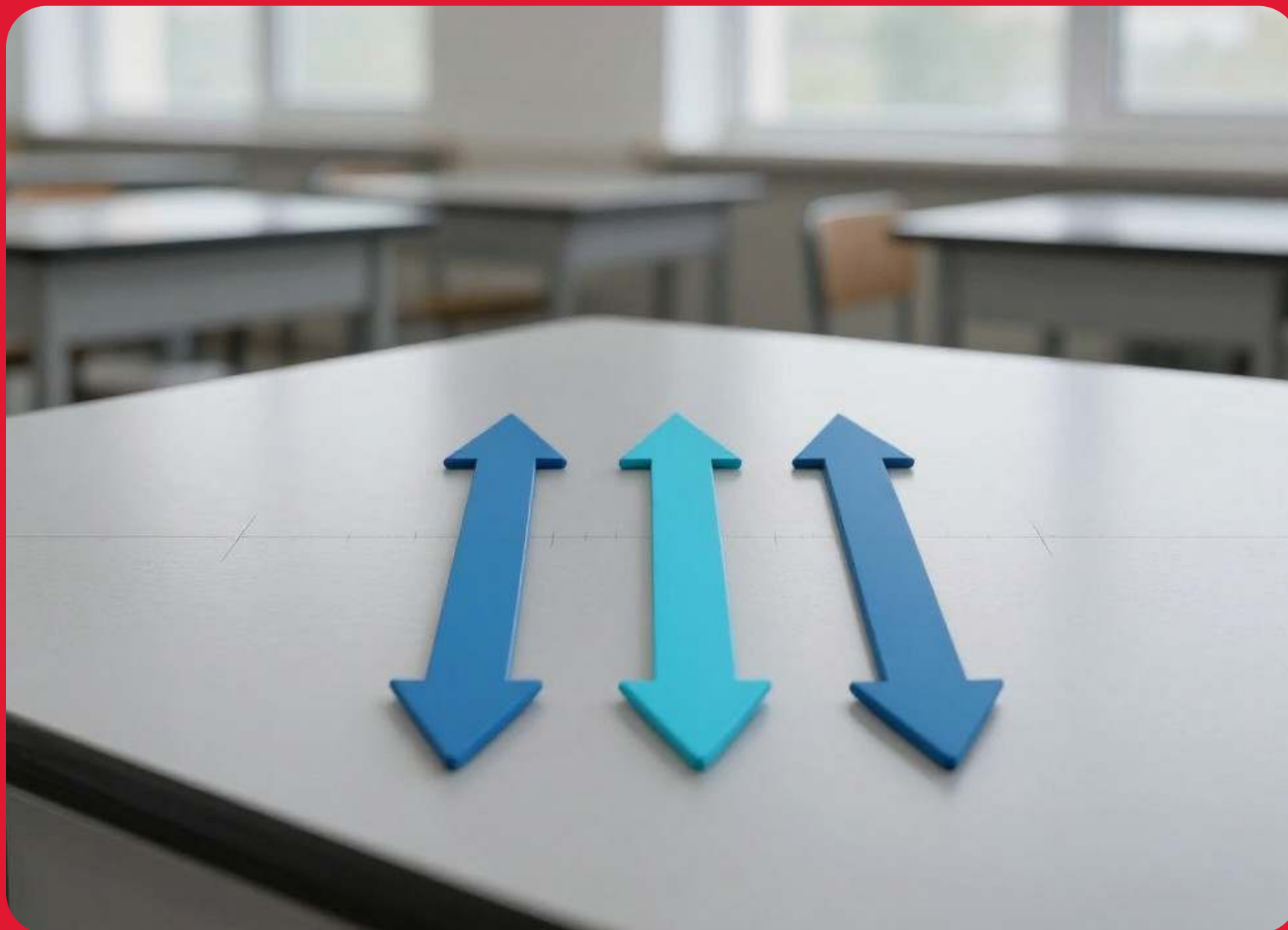
Расстояние между началом и концом вектора называют модулем. Оно показывает, насколько велико перемещение, сила или другое действие, описываемое вектором.

Нулевой вектор

Если длина вектора равна нулю, получается нулевой вектор. У него нет направления, потому что начало и конец совпадают в одной точке.



Направление и длина вектора



Два главных признака

Чтобы описать вектор, всегда смотрят на его длину и направление. Если изменить хотя бы один из этих признаков, получится уже другой вектор.



Равные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Их можно перенести в другое место на рисунке, но свойства останутся теми же.



Противоположные векторы

Противоположные векторы равны по длине, но направлены в разные стороны. На рисунке это легко заметить по стрелкам, смотрящим навстречу друг другу.

Виды векторов

Краткое сравнение основных видов векторов по длине и направлению.

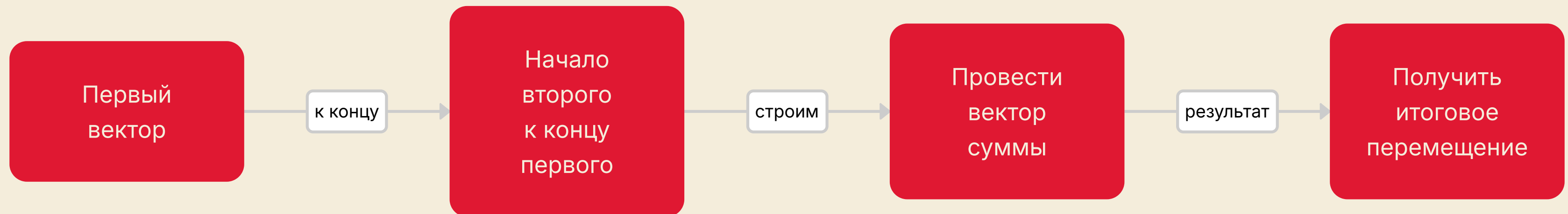
Таблица показывает, что вид вектора определяется не только длиной, но и направлением, а иногда — положением относительно одной прямой.

Определения из школьной геометрии

Вид	Свойство	Пример
Нулевой	модуль 0	0
Единичный	модуль 1	и
Противоположные	равны по длине	а и -а
Коллинеарные	на одной линии	р и q

Сложение векторов по правилу треугольника

Построение суммы векторов на рисунке



Как меняется длина суммы векторов

Диаграмма помогает увидеть, что итог зависит от направления исходных векторов, а не только от их величины.

Сонаправленные векторы усиливают друг друга, противоположные — частично или полностью компенсируются, а равные противоположные дают ноль.

Учебные правила сложения векторов

Свойства сложения векторов

01

Переместительное свойство

При сложении векторов порядок не меняет результат: $a+b=b+a$. Это удобно, когда нужно найти итог нескольких перемещений и можно считать в любом порядке.

02

Сочетательное свойство

Если складывается несколько векторов, их можно группировать по-разному: $(a+b)+c=a+(b+c)$. Так проще разбивать длинный путь на части и получать тот же ответ.

03

Сумма нескольких векторов

Общая сумма показывает конечный результат движения или действия. Поэтому векторное сложение удобно в задачах на маршрут, силу и последовательные перемещения по плоскости.



Вычитание векторов

01

Сводим к сложению

Вычитание вектора удобно заменять сложением с противоположным: $a - b = a + (-b)$. Так действие становится похожим на обычное сложение, только один вектор меняет направление.

02

Противоположный вектор

У противоположного вектора та же длина, что и у исходного, но стрелка направлена в другую сторону. Именно это и нужно для записи разности.

03

Где это помогает

Вычитание используют, чтобы сравнить два перемещения, две силы или два смещения. Если векторы сонаправлены, разность обычно меньше каждого из них.



Когда при действиях получается нулевой вектор

Нулевой вектор встречается и как результат вычислений, и как особый объект без направления. Его удобно распознавать по совпадению противоположных действий.

Если действие полностью компенсируется, результат равен нулю: так происходит при взаимном уничтожении равных и противоположных векторов или при вычитании одинаковых.

Учебные свойства операций с векторами

Умножение вектора на число

01

Изменение длины

При умножении вектора на положительное число его длина меняется пропорционально этому числу. Например, коэффициент 2 делает вектор вдвое длиннее, а коэффициент 3 — в три раза длиннее.

02

Единичный множитель

Если умножить вектор на 1, он не изменится ни по длине, ни по направлению. Это удобно как проверка: результат должен совпадать с исходным вектором.

03

Нулевой множитель

При умножении на 0 получается нулевой вектор. Его длина равна нулю, поэтому у него нет направления и он не показывает перемещение.

04

Отрицательное число

Если множитель отрицательный, вектор поворачивается в противоположную сторону. При этом его длина остаётся равной произведению модуля вектора на модуль числа.

05

Практический смысл

Такое действие помогает быстро описывать увеличение, уменьшение и разворот движения. В задачах это удобно при работе с силой, скоростью и смещением на плоскости.



Как число влияет на вектор

Примеры показывают, как меняются длина и направление при умножении вектора на разные числа.

Положительный коэффициент изменяет только длину, отрицательный ещё и меняет направление, а ноль полностью уничтожает вектор.

Иллюстрация к правилам умножения вектора на число.

Запись	Изменение
$3a$	в 3 раза длиннее
$0,5a$	в 2 раза короче
$-2a$	в 2 раза длиннее, направление противоположное
$0a$	нулевой вектор

Координаты вектора на плоскости

Горизонтальное смещение



Первая координата вектора показывает, насколько он сдвигается вправо или влево. По ней удобно сразу видеть движение вдоль оси x и сравнивать разные векторы.

Вертикальное смещение



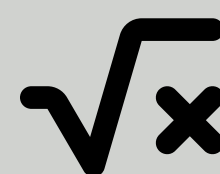
Вторая координата показывает движение вверх или вниз. Она отвечает за положение вектора по оси y и помогает точно описывать путь на клетчатой плоскости.

Точное задание положения



Две координаты вместе позволяют записать вектор без рисунка. Это особенно полезно, когда нужно быстро считать смещения, не строя каждый раз чертёж.

Длина по координатам



Если известны обе координаты, длину вектора можно найти с помощью теоремы Пифагора. Так удобно вычислять модуль даже тогда, когда вектор наклонён.

Горизонтальная и вертикальная части вектора

Сравнение координат показывает, что один и тот же модуль может получаться из разных сочетаний горизонтальной и вертикальной частей.

Чем больше хотя бы одна составляющая, тем заметнее итоговый вектор; удобнее всего анализировать движение через обе координаты сразу.

Учебная схема координатных составляющих векторов.

Порядок решения задач на векторы

Последовательность действий помогает выбрать правильный способ и не потерять направление при вычислениях.



Типичные ошибки при работе с векторами

Путают модуль и направление

Иногда смотрят только на длину и забывают, куда направлен вектор. Но одинаковая длина ещё не делает векторы равными: направление тоже обязательно должно совпадать.

Забывают про противоположный вектор

При вычитании важно помнить, что противоположный вектор направлен в другую сторону. Если пропустить этот шаг, можно получить неверный результат даже при правильных числах.

Неверно складывают по правилу треугольника

Второй вектор нужно прикладывать именно к концу первого. Если соединить их неправильно, вектор суммы получится не от того начала и будет ошибочным.

Считают равными только по длине

Одинаковая длина не означает равенство векторов. Для равенства нужны и одинаковая длина, и одинаковое направление, иначе векторы могут быть лишь противоположными.

Ошибаются с нулевым вектором

Нулевой вектор иногда забывают выделить отдельно. Он появляется при полной компенсации двух противоположных действий, поэтому его длина равна нулю, а направления нет.

Векторы в физике и в играх



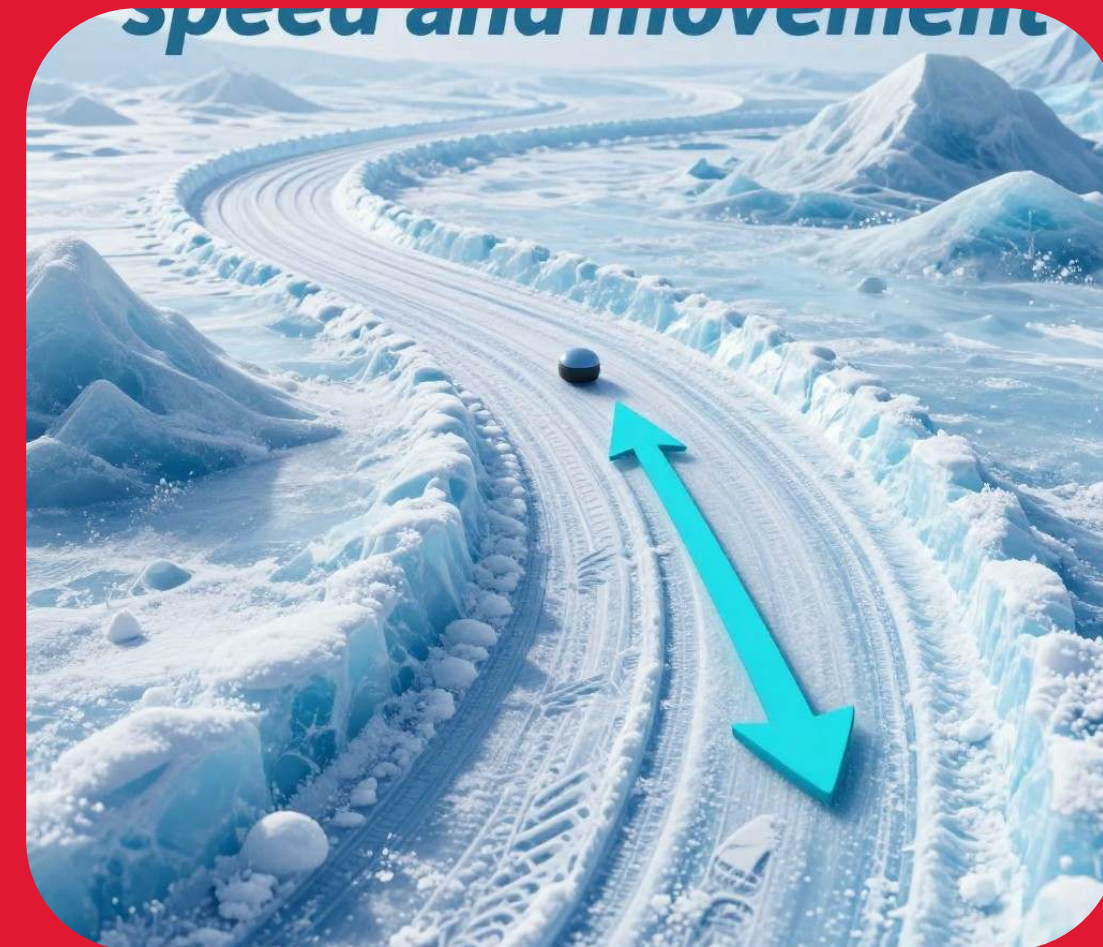
Персонаж на клетчатой карте

Герой в игре проходит три клетки вправо и две клетки вверх. На рисунке это удобно показать одной стрелкой, а не двумя отдельными шагами. Такой способ делает маршрут понятным и помогает быстро сравнивать разные пути.



Сила как стрелка

Если толкнуть санки или мяч, важно не только, насколько сильным было действие, но и куда оно направлено. Поэтому силу изображают стрелкой: длина показывает величину, а направление — сторону действия.



Скорость и движение

Скорость тоже удобно описывать вектором, потому что она связана с направлением движения. На схеме можно сразу увидеть, куда движется объект и как меняется его путь при повороте или ускорении.

Где чаще всего используют векторы

Векторный подход удобен там, где важно одновременно учитывать величину и направление, а не только число.

Физика, навигация и графика используют векторы по одной причине: они точно описывают движение, смещение и изменение объектов.

Учебная классификация областей применения векторов.

Памятка по операциям с векторами

Краткая таблица помогает быстро вспомнить смысл каждой операции и её запись.

Сложение объединяет действия, вычитание заменяется сложением с противоположным вектором, а умножение меняет длину и иногда направление.

Правила действий с векторами из школьного курса геометрии.

Операция	Запись	Смысл
Сложение	$a+b$	общее движение
Вычитание	$a-b$	сравнение векторов
Умножение	ka	изменение длины

Главные выводы о векторах

Векторы помогают описывать движение, силы и смещения очень наглядно. Если помнить про длину, направление и правила действий, задачи решаются быстрее и аккуратнее.