



Решение квадратных неравенств графическим методом

Парабола помогает быстро найти нужные промежутки решения.

Зачем нужны квадратные неравенства

- Эта тема связывает формулу, график и числовую прямую. Она опирается на знания о квадратной функции, корнях уравнения и дискриминанте, поэтому становится важным шагом в курсе 9 класса.



Общий вид квадратного неравенства

1

Запись неравенства

Квадратное неравенство записывают так: $ax^2+bx+c \geq 0$, где a не равно нулю. Это выражение сравнивают с нулём, чтобы определить нужные значения переменной.

2

Роль коэффициента a

Коэффициент a показывает, куда направлены ветви параболы. Если a больше нуля, они идут вверх; если a меньше нуля, график открывается вниз.

3

Значение коэффициента c

Число c равно значению выражения при $x=0$. Поэтому оно помогает понять, где график пересекает ось Oy и как расположен относительно начала координат.

4

Влияние b и c

Коэффициенты b и c смещают параболу на плоскости. Из-за этого меняются её положение, точки пересечения с осями и, в итоге, ответ неравенства.

Парабола как график квадратной функции

График функции

Функция $y=ax^2+bx+c$ изображается параболой. По её форме можно сразу увидеть, где значения функции положительные, отрицательные или равны нулю.

Вершина и ось симметрии

У параболы есть вершина и ось симметрии. Эти элементы помогают строить график аккуратно и понимать, как он расположен на координатной плоскости.

Пересечения с осями

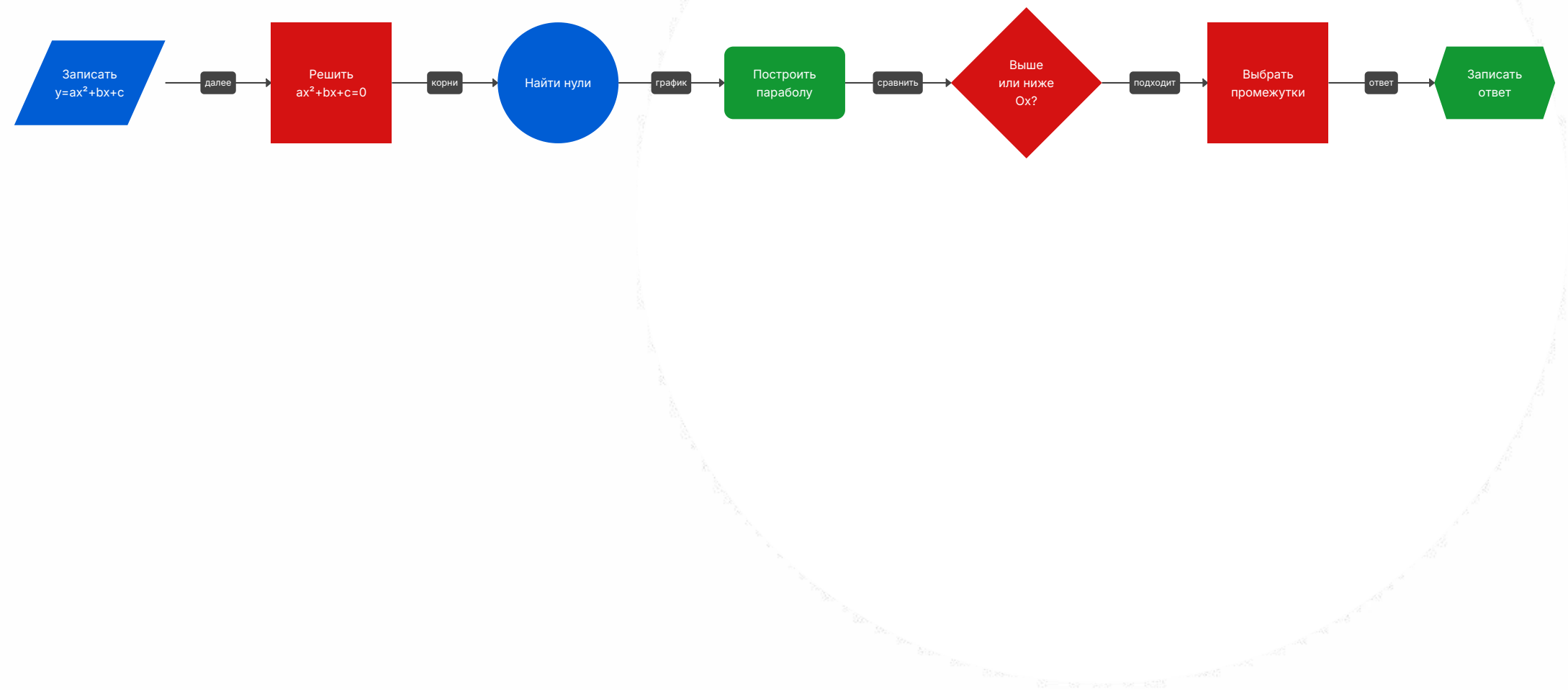
Особенно важны точки пересечения с осью Ox . В них значение функции равно нулю, а значит, именно здесь может изменяться знак выражения.

Связь с решением

Когда на рисунке отмечены нули функции и ось симметрии, легче связать уравнение с графиком и определить подходящие промежутки на числовой прямой.

Алгоритм графического решения

Последовательность шагов
от записи неравенства
до ответа



Как находят нули функции



Разложение на множители

Если выражение можно представить как произведение множителей, уравнение $ax^2+bx+c=0$ решается быстро. Тогда нули находятся из равенства каждого множителя нулю.



Формула корней

Когда разложение не удаётся, используют дискриминант и формулу корней. Этот способ даёт точные значения нулей функции и подходит для большинства примеров.



Графический способ

Иногда корни можно оценить по чертежу. По пересечениям параболы с осью Ox видно, сколько нулей у функции: два, один или ни одного.



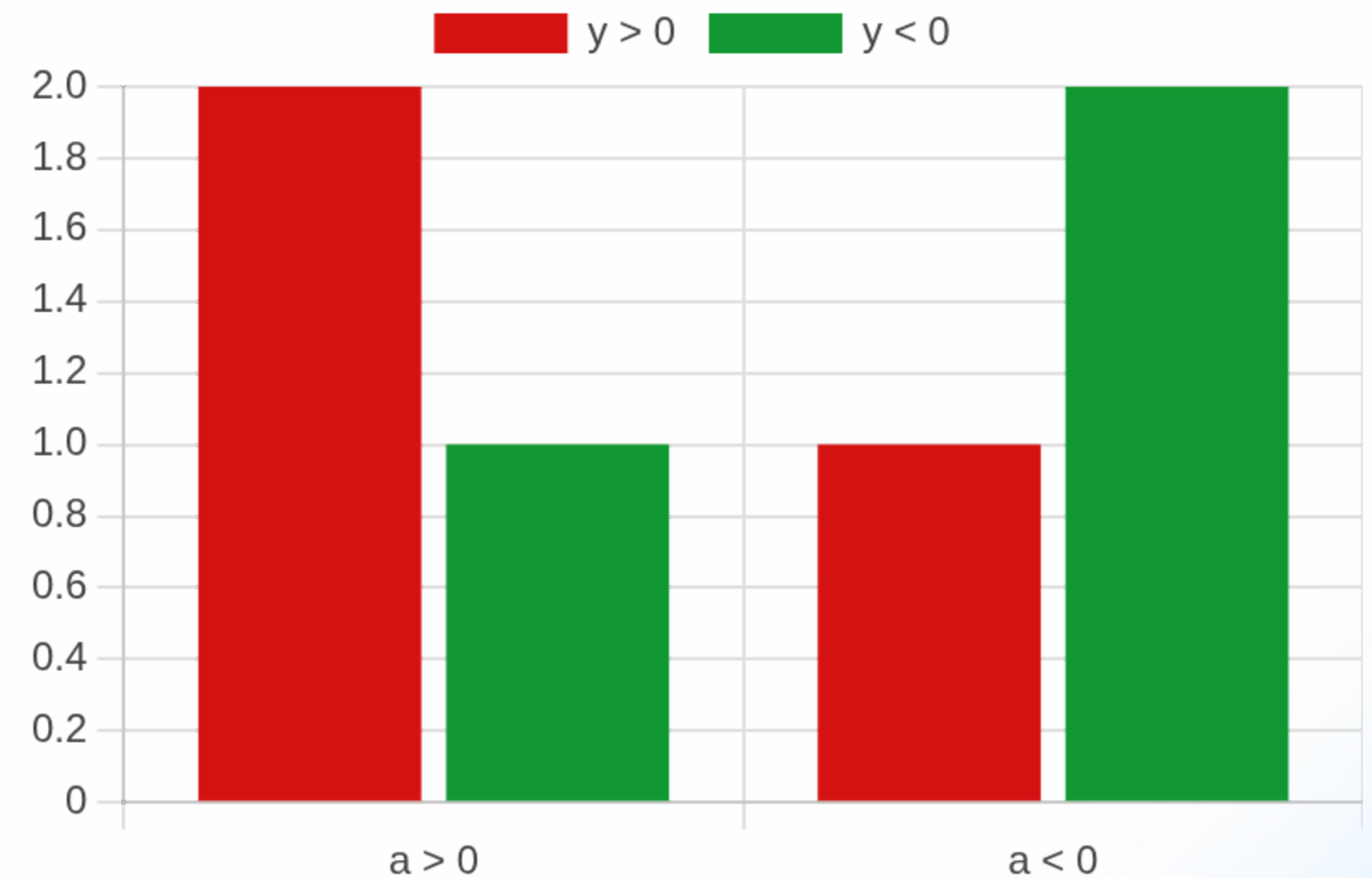
Что означает число корней

Если корней два, график пересекает ось Ox в двух точках. Если корень один, он касается оси. Если корней нет, пересечения отсутствуют.

Как знак коэффициента a влияет на ответ

Столбцы показывают, что направление ветвей меняет расположение подходящих промежутков. Это помогает заранее понять, искать ответ между корнями или вне их.

При $a > 0$ положительные значения лежат вне корней, а отрицательные — между ними. При $a < 0$ всё наоборот.



Схематическое сравнение по правилам знаков квадратной функции

Виды неравенств и запись ответа

Сравнение знака неравенства, положения графика и записи решения.

Строгие неравенства исключают корни, а нестрогие включают их. Выбор промежутков зависит от расположения графика относительно оси Ox .

Знак	Где график	Корни	Запись
$>, \geq$	выше Ox	нет / да	интервалы
$<, \leq$	ниже Ox	нет / да	интервалы

Правила решения квадратных неравенств графическим методом

Строгие и нестрогие неравенства

1

Знаки $>$ и $<$

Если в неравенстве стоят знаки $>$ или $<$, точки, где выражение равно нулю, в ответ не включают. Эти значения не удовлетворяют условию.

2

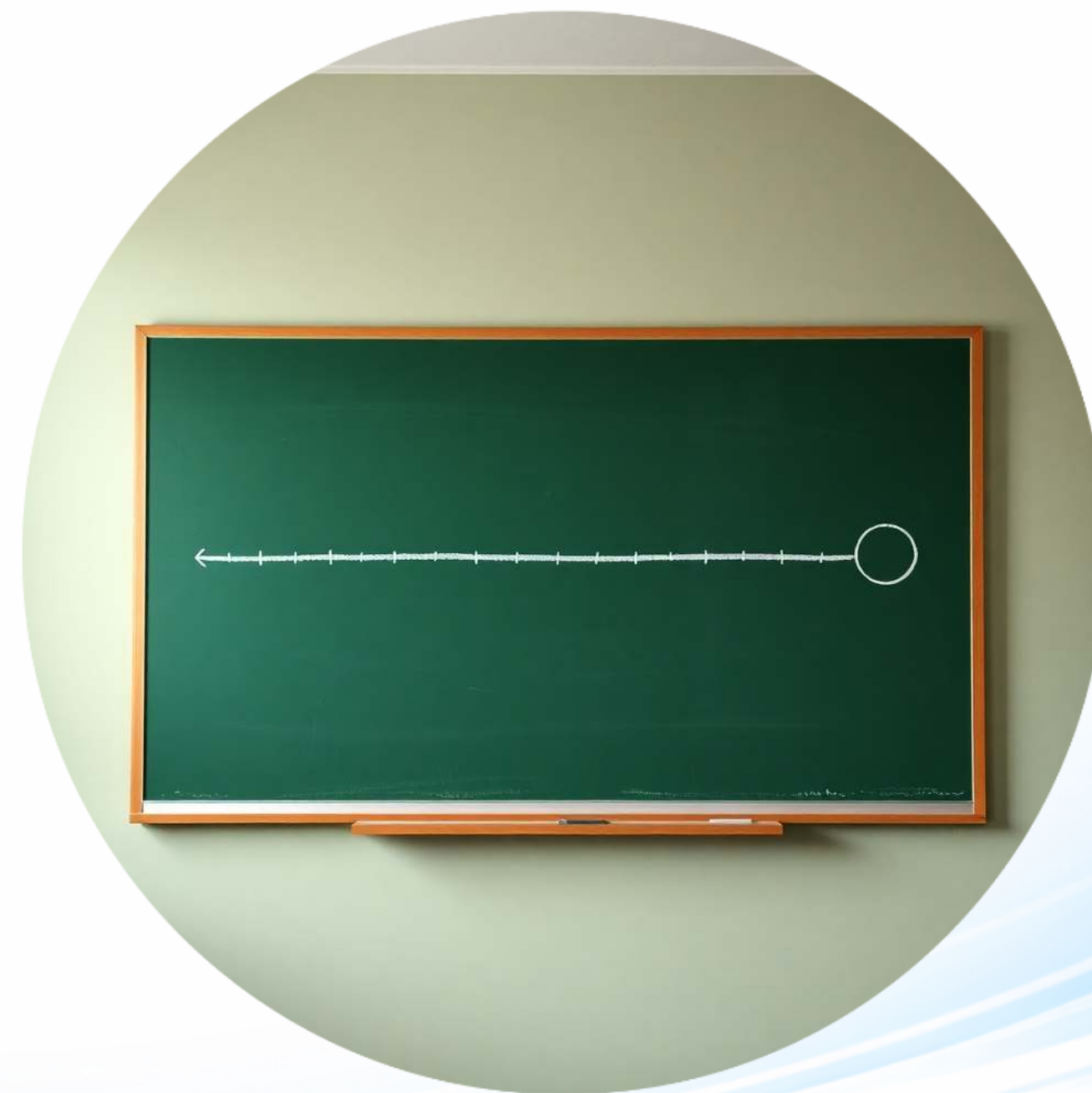
Знаки $\geq$ и $\leq$

При знаках $\geq$ и $\leq$ нули функции входят в решение, потому что значение ноль подходит. Поэтому границы промежутков становятся частью ответа.

3

Обозначение на прямой

На числовой прямой такие границы показывают по-разному: пустой точкой для строгих неравенств и закрашенной точкой для нестрогих. Это помогает не перепутать ответ.



Пример: $x^2 - 5x + 6 > 0$

Находим корни

Решаем уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$. Разложение на множители даёт $(x - 2)(x - 3)$, значит, нули функции: $x = 2$ и $x = 3$.

Определяем направление

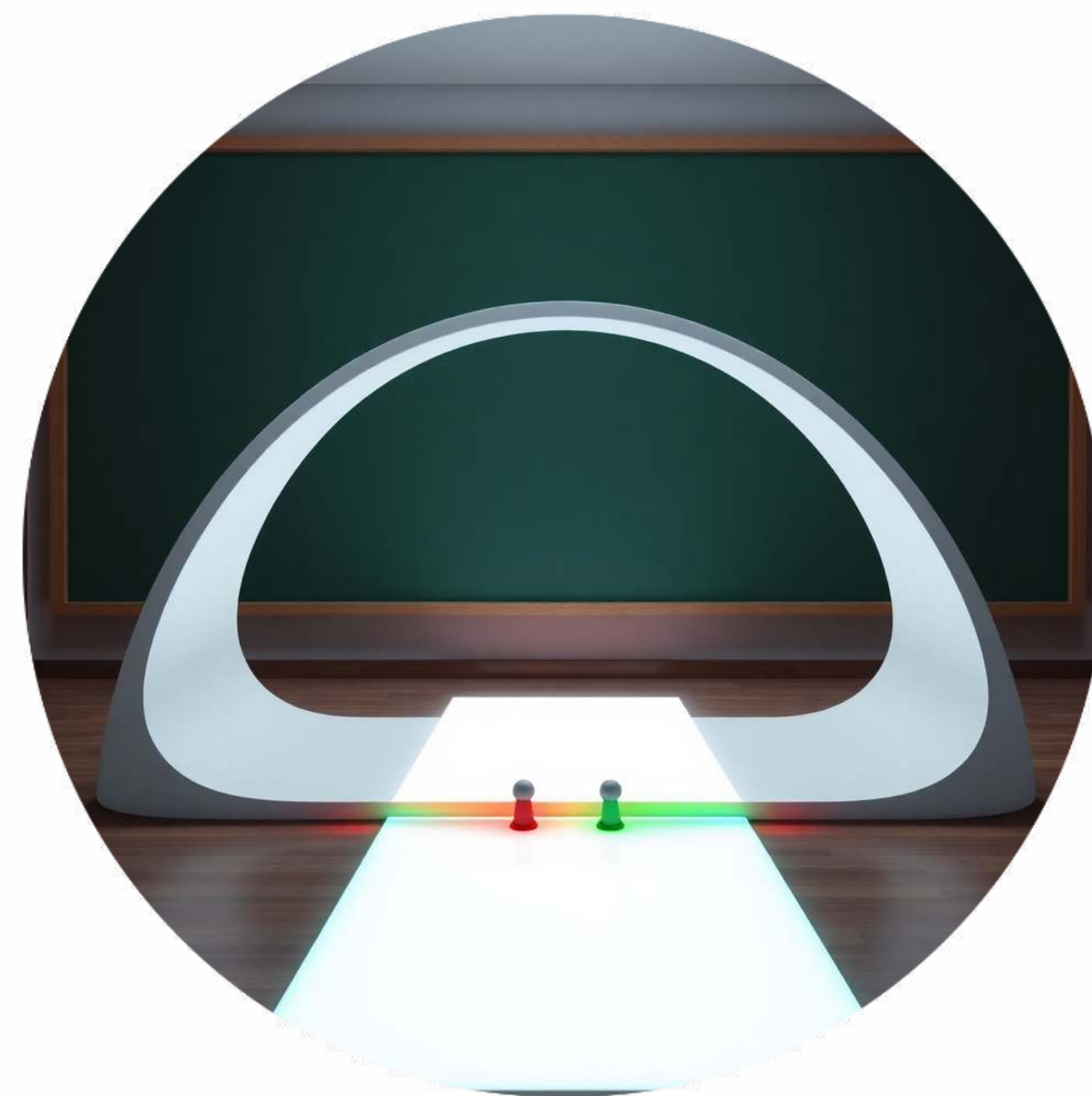
Так как $a = 1$, ветви параболы направлены вверх. Это значит, что выше оси Ox график расположен вне корней, а ниже — между ними.

Ответ для > 0

Для неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$ подходят промежутки $x < 2$ и $x > 3$. Корни не включаются, потому что знак строгий.

Ответ для < 0

Для неравенства $x^2 - 5x + 6 < 0$ решение находится между корнями: $2 < x < 3$. Здесь график расположен ниже оси Ox .



Положение параболы между корнями

Два корня найдены

После решения уравнения отмечают точки, где функция равна нулю. Эти значения делят ось Ox на промежутки, по которым затем удобно читать знак выражения.

Смотрим на ветви параболы

Если ветви направлены вверх, то между корнями график оказывается ниже оси Ox , а вне корней — выше. При ветвях вниз картина меняется.

Выбираем нужные промежутки

Сравнивают полученное расположение графика со знаком неравенства и записывают только те промежутки, где условие выполняется, включая или не включая корни по знаку.

Три возможные ситуации с корнями

Каждый случай по-разному делит числовую прямую на промежутки, а значит, меняет вид ответа в неравенстве.

Чем меньше точек пересечения с осью Ox , тем проще знак на всей прямой: он меняется только в местах нулей или не меняется вовсе.



Учебная схема по теме квадратных неравенств

Случай без корней

1

Нет действительных корней

Если дискриминант меньше нуля, уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений в действительных числах. Значит, парабола не пересекает ось Ox и не делит прямую на части.

2

Знак не меняется

При $a>0$ график целиком расположен выше оси Ox , поэтому выражение всегда положительно. При $a<0$ парабола лежит ниже оси Ox , и выражение всегда отрицательно.

3

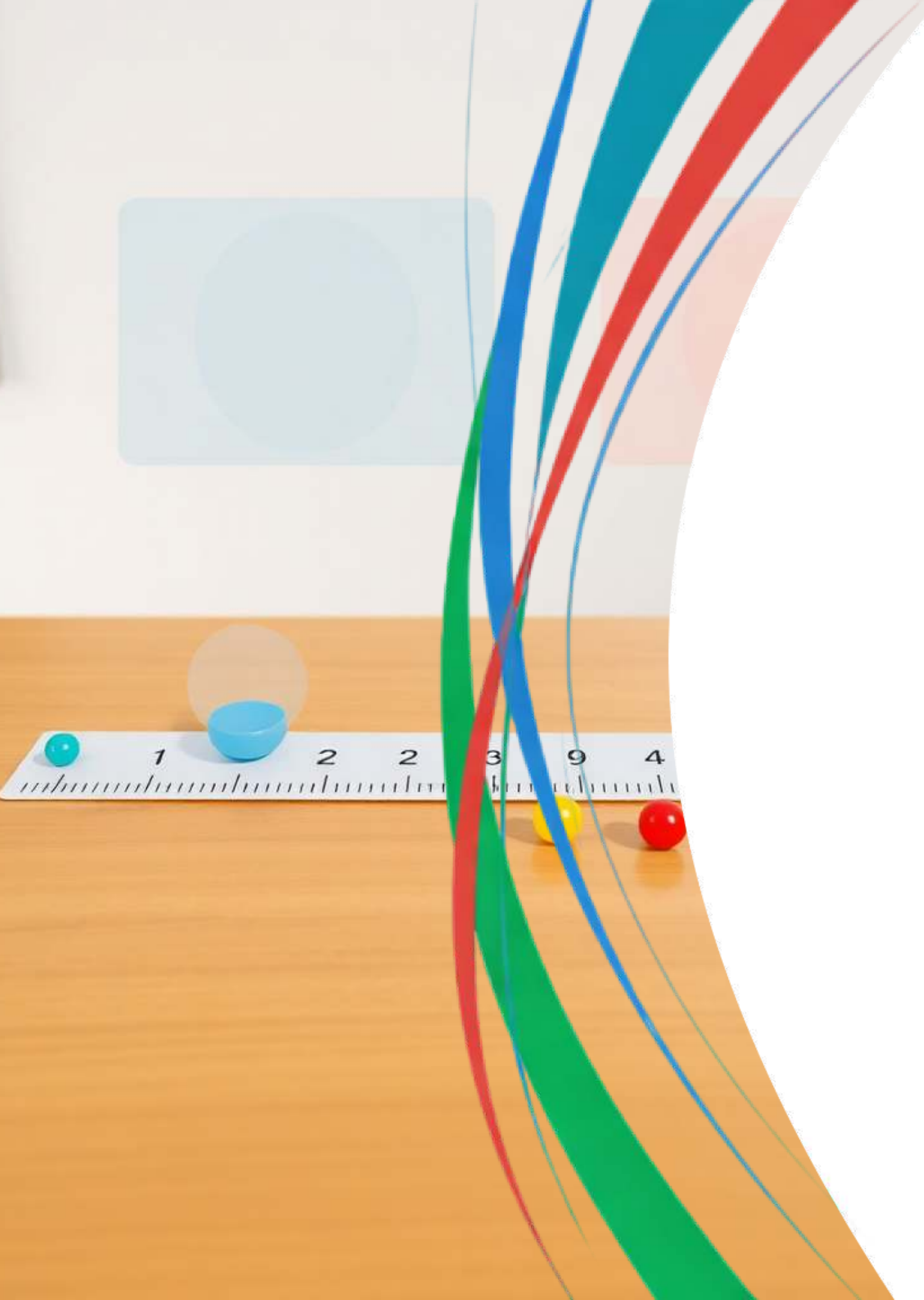
Что делать с неравенством

Для строгих неравенств ответ сразу определяется знаком выражения на всей прямой. Для нестрогих важно помнить: если нулей нет, то равенство нулю нигде не выполняется.

4

Полезный вывод

Такой случай позволяет решить неравенство почти без построения графика. Достаточно понять, куда направлены ветви, и проверить, может ли выражение принять нужный знак.



Проверка ответа на числовой прямой

Возьмите пробное число

Из каждого найденного промежутка достаточно выбрать одно удобное число и подставить его в выражение. Это быстро показывает, подходит ли промежуток под знак неравенства.

Сверьте знак результата

Если при подстановке получается положительное, отрицательное или нулевое значение в нужной ситуации, промежуток выбран верно. Если знак не совпадает, ответ нужно исправить.

Проверьте границы

Особенно внимательно смотрят на корни: в строгих неравенствах они не входят в ответ, а в нестрогих входят. Такой контроль помогает избежать ошибок в записи интервалов.

Типичные ошибки при решении

Ошибка	Почему	Правильно
Корни включены в $>$, $<$	Не учтён знак	Края пустые
Перепутан порядок корней	Сбита запись	Сначала меньший
Внутри вместо вне корней	Неверный знак	Смотреть на $a < 0$

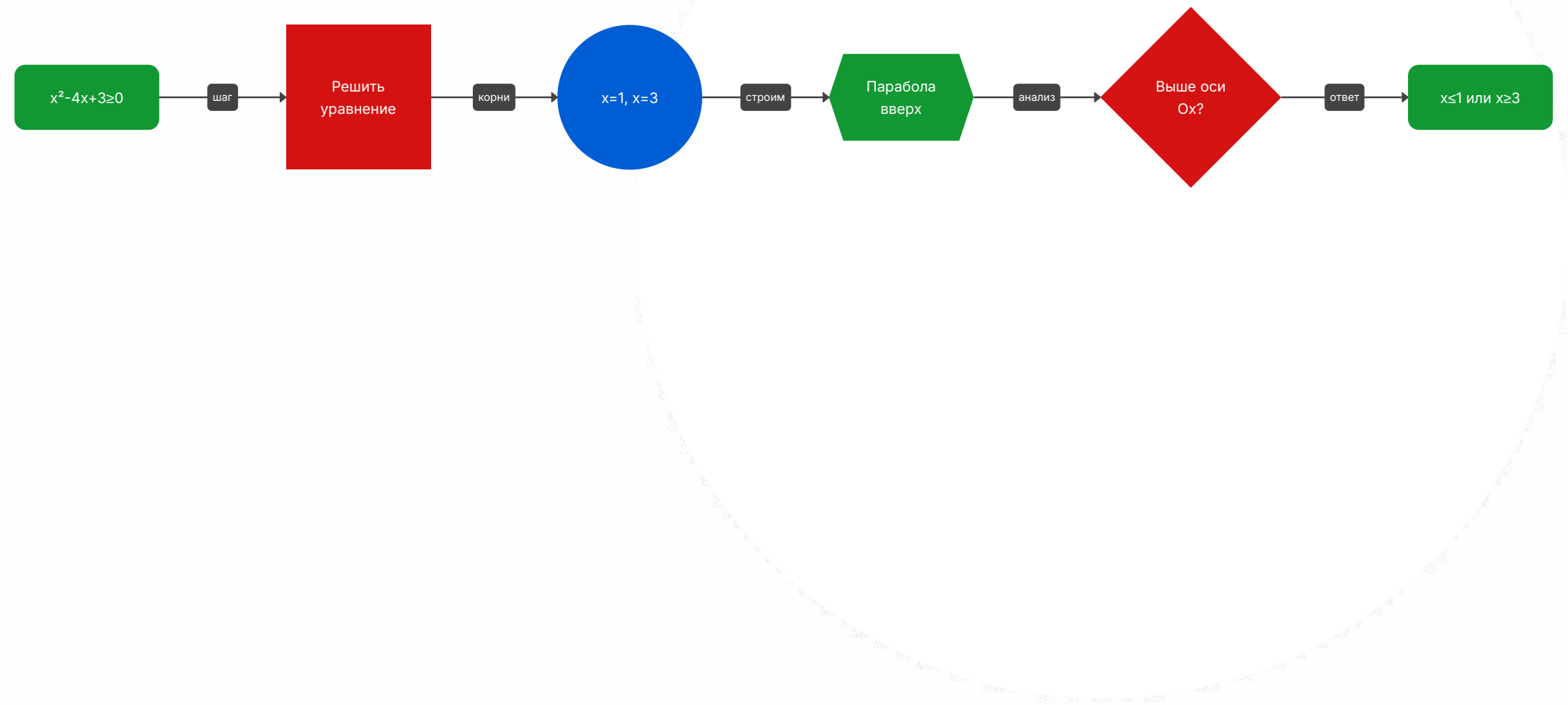
Сравните распространённые ошибки с правильным способом записи ответа и проверьте, что корни, знаки и промежутки определены верно.

Большинство ошибок связано не с вычислениями, а с чтением графика и знака неравенства. Проверка подстановкой и аккуратная запись границ заметно повышают точность.

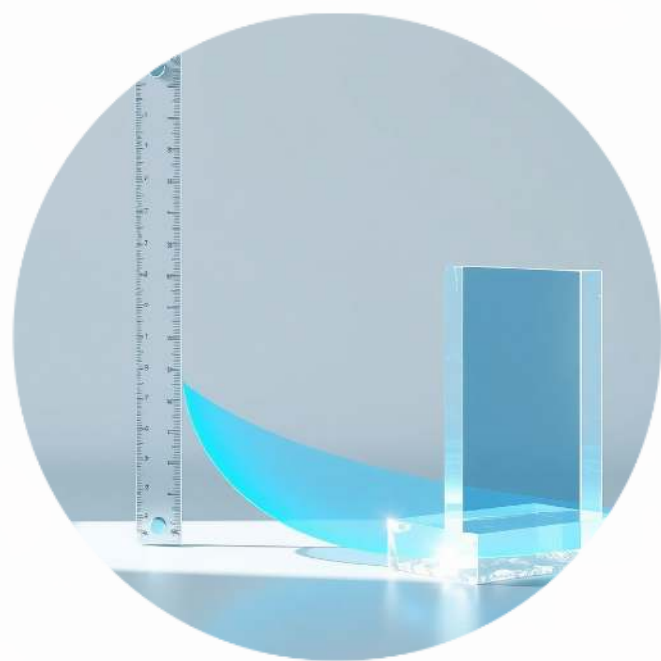
Обобщение типичных ошибок по теме

Решение по шагам: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Пошаговая схема решения
квадратного неравенства
графическим методом
на примере.



Связь с практическими задачами



Когда нужно не меньше заданного

В задачах о длине, площади или времени часто требуется, чтобы значение не опускалось ниже установленной границы. Тогда квадратное неравенство помогает найти допустимые значения величины и сразу увидеть, где условие выполняется на числовой прямой.



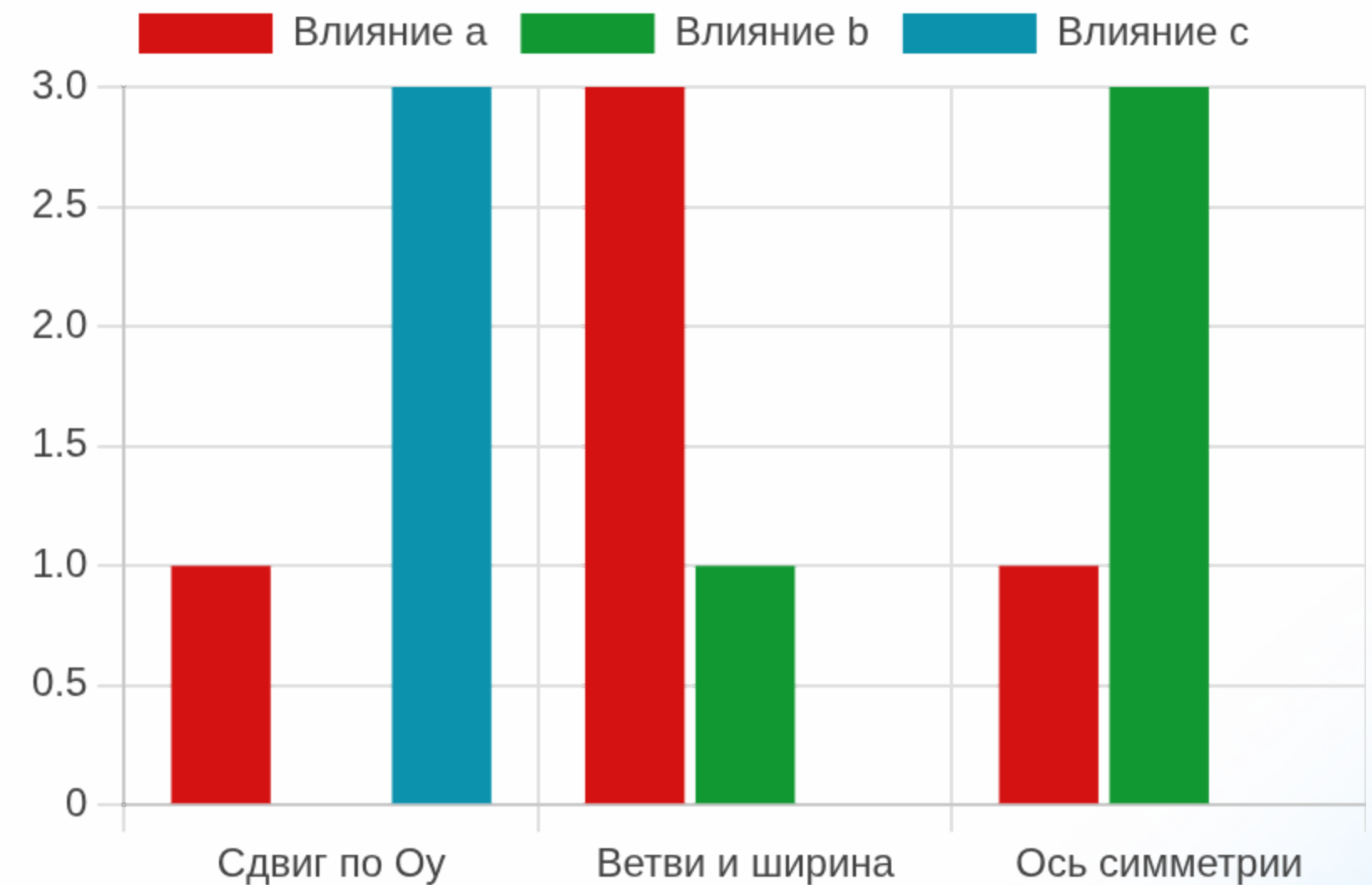
Когда важно не превысить предел

Встречаются и обратные ситуации: нагрузка, скорость или расход должны оставаться в безопасных пределах. График параболы подсказывает, при каких значениях переменной условие соблюдается, а изображение реального объекта делает смысл задачи нагляднее.

Как меняется график при изменении коэффициентов

Каждый коэффициент по-своему влияет на форму и положение параболы. Из-за этого меняются нули функции и промежутки, где выражение положительно или отрицательно.

Коэффициент c сдвигает график, а меняет его форму, а b смещает ось симметрии. Поэтому даже небольшое изменение формулы может полностью изменить ответ.



Схематическое сравнение влияния коэффициентов

Короткие правила для запоминания



Смотри на параболу

Решение квадратного неравенства всегда связано с тем, где график расположен относительно оси Ox . Именно это показывает, какие промежутки подходят под условие.



Нули делят прямую

Точки, где выражение равно нулю, разбивают числовую прямую на отдельные участки. На каждом из них знак выражения можно определить отдельно.



Знак коэффициента a

Если ветви направлены вверх или вниз, легче понять, где находится положительная и отрицательная часть графика. Это ускоряет выбор нужного промежутка.



Корни и тип неравенства

В строгих неравенствах границы не включают, потому что там значение не должно быть равно нулю. В нестрогих неравенствах нули входят в ответ.



Всегда проверяй ответ

Подстановка удобного числа из каждого промежутка помогает убедиться, что выбранный ответ действительно подходит. Это особенно полезно при близко расположенных корнях.

Графический метод делает ответ ВИДИМЫМ

Он связывает формулу, параболу и числовую прямую, помогая быстро определить нужные промежутки. Благодаря этому квадратные неравенства становятся понятными и удобными для проверки.