



Исследование графиков на выпуклость

Выпуклость графика читается через вторую производную
и точки перегиба.

Почему эта тема важна в 10 классе

Исследование выпуклости продолжает изучение производной и дополняет анализ возрастания, убывания и экстремумов. Оно помогает точнее описывать форму графика и уверенно находить точки перегиба.



Основные определения выпуклости

Выпуклость вверх

График называют выпуклым вверх на интервале, если его касательная на этом участке проходит ниже кривой. Такая форма соответствует увеличению наклона по мере движения вправо.

Выпуклость вниз

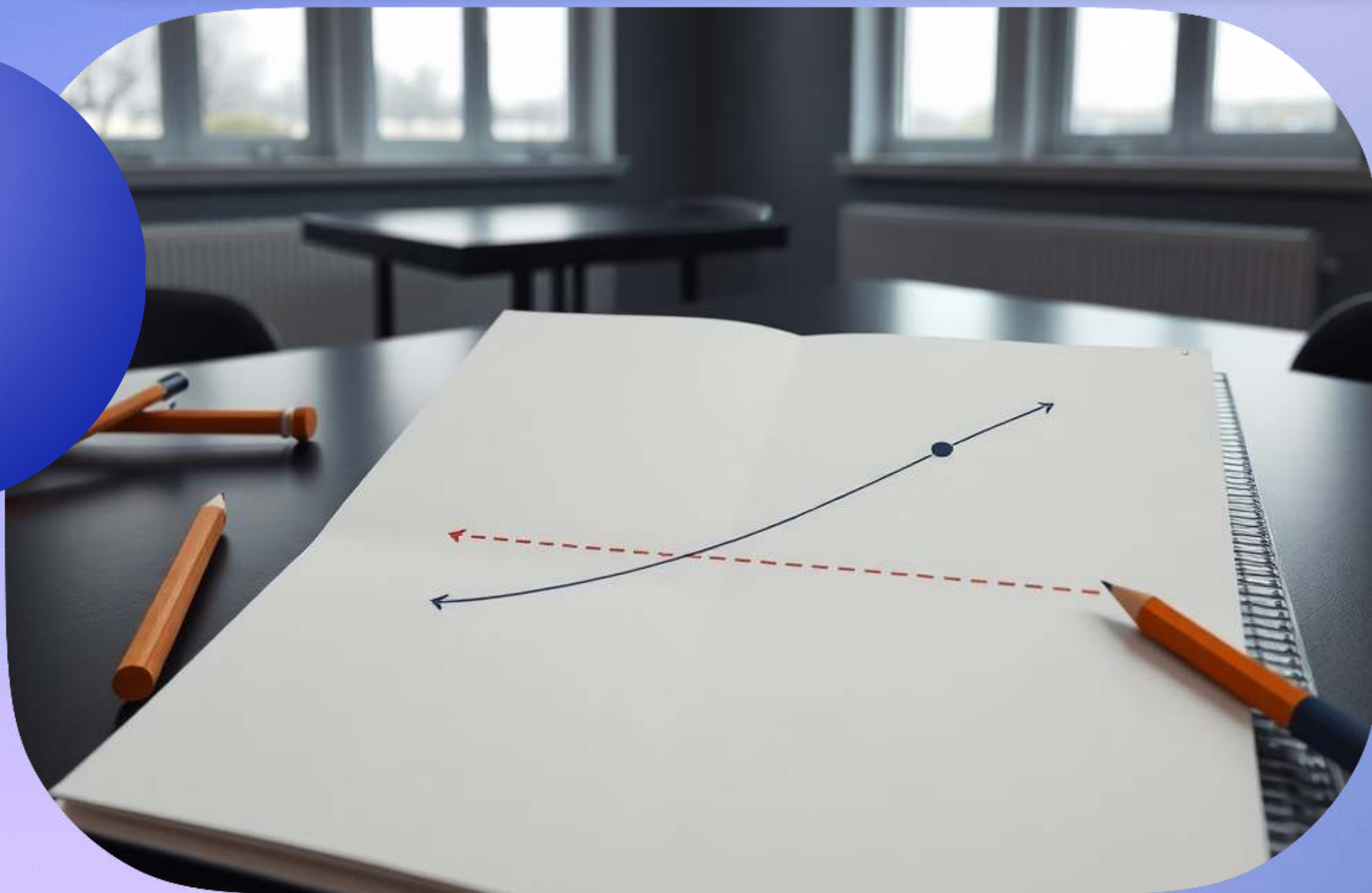
График называют выпуклым вниз, если касательная на данном промежутке лежит выше кривой. В этом случае наклон касательной уменьшается, а линия как бы «загибается» в другую сторону.

Знак второй производной

В школьном курсе выпуклость удобно определять по знаку второй производной: при $f''(x) > 0$ и $f''(x) < 0$ получаются разные типы кривизны, которые легко проверить вычислением и анализом знаков.



Как выпуклость выглядит на графике



Касательная и кривая

На рисунке видно, что положение касательной помогает быстро оценить выпуклость: при одном типе кривизны она остается ниже графика, при другом — поднимается выше него.

Изменение наклона

Если $f''(x) > 0$, наклон касательных возрастает, и график выглядит как «чаша». Если $f''(x) < 0$, наклон убывает, а линия приобретает обратную форму.

Точка перегиба

Отдельно выделяется точка, где кривая меняет направление изгиба. Именно здесь происходит переход от одной выпуклости к другой, поэтому такие точки особенно важны при исследовании функции.

Связь первой и второй производной

1 Первая производная

Первая производная показывает наклон касательной и описывает, как функция изменяется при движении по оси x . Она служит основой для более тонкого анализа формы графика.

2 Вторая производная

Вторая производная отражает, как меняется сама первая производная. Поэтому она показывает не только скорость изменения функции, но и характер изменения этой скорости на промежутке.

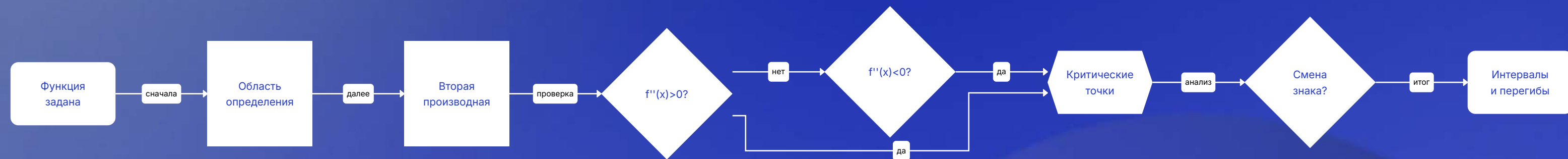
3 Практический вывод

Если $f''(x) > 0$, значения $f'(x)$ возрастают; если $f''(x) < 0$, значения $f'(x)$ убывают. Именно это делает вторую производную главным инструментом исследования выпуклости.



Алгоритм исследования функции на выпуклость

Последовательность действий при анализе графика функции в школьной задаче.



Признаки выпуклости по знаку второй производной

$f''(x)$	Форма	Касательная	Вывод
>0	вверх	ниже	выпуклость
<0	вниз	выше	выпуклость
$=0$	проверка	—	не факт

Таблица показывает, как знак второй производной связан с формой графика и расположением касательной.

Нулевое значение второй производной само по себе не доказывает перегиб; нужна проверка смены знака.

Точки перегиба

1 Смысл точки

Точка перегиба — это место, где график меняет выпуклость: с одной стороны кривая изгибается в одном направлении, а с другой — в противоположном. Это важный ориентир при построении графика.

2 Недостаточно равенства нулю

Условие $f''(x)=0$ лишь указывает на возможный перегиб, но не доказывает его. Для окончательного вывода нужно исследовать знак второй производной по обе стороны от найденного значения.

3 Запись координат

Если смена знака подтверждена, координаты точки перегиба записывают как $(x_0; f(x_0))$. Такой результат удобно использовать при оформлении полного исследования функции и построении её графика.

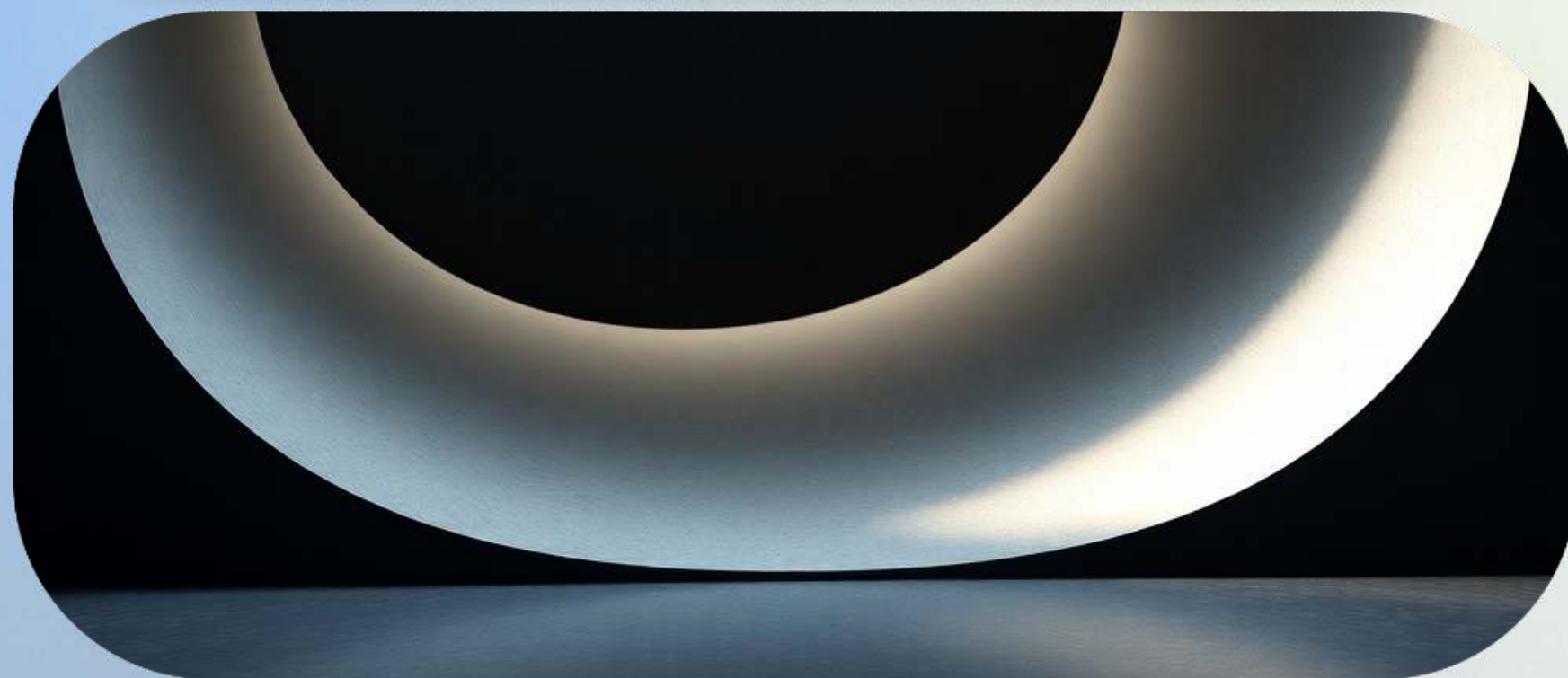
Пример: парабола и кубическая функция

Парабола без перегиба

График $y=x^2$ имеет одинаковую кривизну на всей области определения. Его форма не меняется, поэтому точек перегиба здесь нет. Этот пример хорошо показывает случай постоянной выпуклости, когда вторая производная сохраняет один знак.

Кубическая кривая с перегибом

У функции $y=x^3$ кривизна меняется около $x=0$, и точка $(0; 0)$ становится точкой перегиба. На графике видно, как одна и та же кривая по разные стороны от нуля изгибается в противоположные стороны.



Знак второй производной на промежутках

Схематическое представление по материалам школьного исследования функции

Линейная схема помогает увидеть, где знак второй производной сохраняется, а где возможен переход к новой кривизне.

Смена знака в критических точках указывает на возможный перегиб; постоянный знак означает один тип выпуклости на промежутке.

Работа с дробно-рациональными и корневыми функциями

1 Проверка области определения

Сначала выделяют все ограничения: для дробно-рациональной функции исключают нули знаменателя, а для корневой — значения, при которых подкоренное выражение становится отрицательным.

2 Вычисление второй производной

После уточнения области определения находят вторую производную и упрощают её, чтобы получить удобное выражение для исследования знака на промежутках.

3 Анализ особых точек

Отдельно рассматривают точки разрыва, границы области определения и места, где формула второй производной не существует: именно там часто меняется характер графика.

4 Разбор по промежуткам

Затем определяют знак $f''(x)$ на каждом промежутке и сравнивают соседние интервалы, чтобы установить области выпуклости и возможные точки перегиба.

Частые ошибки при исследовании выпуклости

Ошибка	Последствие	Как избежать
$f''(x)=0$	Ложный перегиб	Проверить знак
Нет ОДЗ	Попадание разрыва	Сначала ОДЗ
Без проверки слева/справа	Нет вывода	Сравнить интервалы
Путают термины	Неверная запись	Сверять учебник

Обобщение правил исследования функции из школьного курса алгебры 10 класса

Таблица показывает типичные ошибки, которые мешают правильно определить выпуклость графика и точки перегиба.

Нулевое значение второй производной не дает ответа само по себе: решающими остаются область определения и смена знака на соседних промежутках.

Выпуклость в прикладных задачах



Физика

Выпуклость помогает описывать, как меняются скорость и ускорение тела. По знаку второй производной можно судить, усиливается ли изменение движения или, наоборот, замедляется.



Экономика

В экономических моделях выпуклость показывает, как меняются темпы роста затрат, выручки и прибыли. Это помогает сравнивать периоды, где рост становится быстрее или постепенно ослабевает.



Геометрия

При изучении кривых выпуклость характеризует форму линии и переходы между её участками. Такой подход позволяет сравнивать графики не только по значению, но и по характеру изгиба.



Общий метод

Во всех этих задачах используется одна идея: анализ знака второй производной. Поэтому школьный метод исследования выпуклости оказывается полезным и в алгебре, и в прикладных моделях.

Сравнение функций по числу точек перегиба

Сравнение удобно использовать как проверку: чем сложнее строение функции, тем больше участков смены кривизны может появиться при исследовании.

Парабола не имеет перегибов, кубическая функция обычно имеет один, а более сложные выражения могут давать несколько изменений выпуклости.

Схематическое сравнение типовых функций школьного курса алгебры

Проверка точки на перегиб

Схема основана на последовательной проверке знака второй производной по соседним промежуткам.

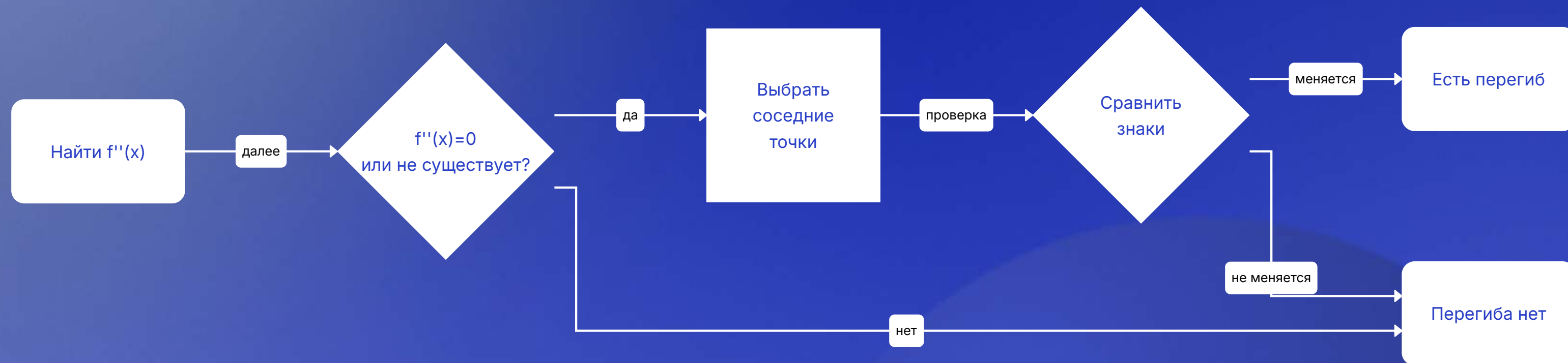


График с несколькими участками выпуклости

Первый участок

На одном промежутке кривая сохраняет выпуклость одного типа, поэтому касательные располагаются одинаково относительно графика и форма линии меняется плавно.

Два перегиба

Отмеченные точки перегиба показывают, что функция может дважды менять направление кривизны. Это важный пример для понимания, что перегибов может быть больше одного.

Разные интервалы

Сопоставление соседних участков помогает увидеть, как знак второй производной задаёт чередование выпуклости вверх и вниз без необходимости каждый раз заново строить график.



Мини-практикум: интерпретация знака $f''(x)$

Функция	Знак	Вывод
$2x$	Меняется	Возможен перегиб
x^2	Не меняется	Перегиба нет
$6x-12$	Проверить	Нужна проверка

Таблица сопоставляет формальный ноль второй производной и реальную смену выпуклости на соседних промежутках.

Сам факт $f''(x)=0$ недостаточен: решающим является только переход к другому знаку слева и справа от найденной точки.

Примеры для отработки критерия перегиба на уроках алгебры 10 класса

Связь выпуклости с построением графика функции

1

Опорные точки

После нахождения экстремумов и промежутков монотонности выпуклость уточняет, как именно кривая соединяет найденные точки и где её форма меняется без разрыва.

2

Изменение крутизны

Знак второй производной показывает, где график поднимается или опускается всё быстрее, а где его наклон изменяется постепенно, что важно для точного эскиза.

3

Полный результат

Совмещение информации о первой и второй производных с точками перегиба даёт наиболее надёжное описание функции и позволяет строить график без существенных пропусков.

Сводная схема результатов исследования

Сводная схема по материалам школьного курса алгебры 10 класса

Схема объединяет все основные итоги: форму кривой, точки смены выпуклости и области, которые нельзя включать в анализ без проверки определения.

Исследование выпуклости требует не одного вычисления, а последовательной проверки знака, области определения и поведения функции на промежутках.

Выпуклость делает график понятнее

Исследование выпуклости дополняет привычный анализ функции и показывает, как меняется форма графика между опорными точками. Именно поэтому вторая производная и точки перегиба делают построение более точным и осмысленным.