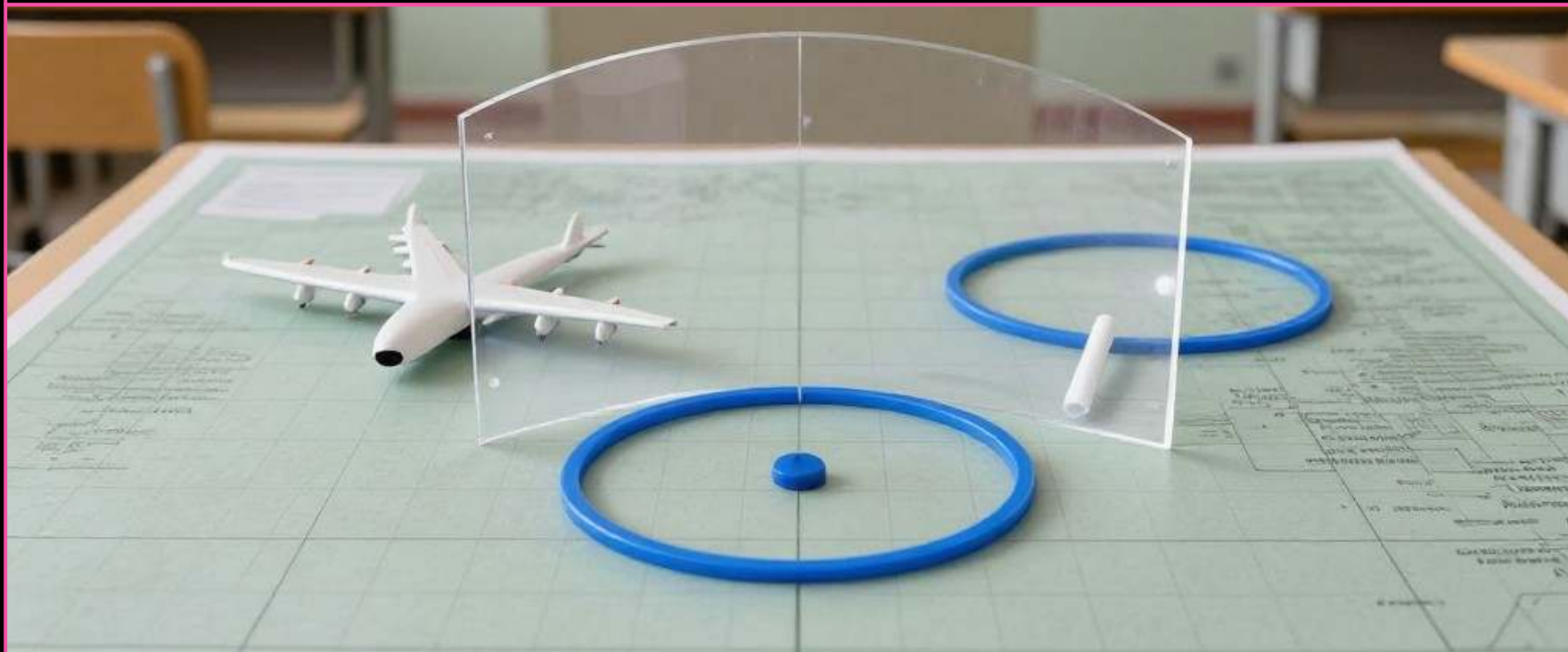


ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ В ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ



Поговорим о переносах, симметриях, поворотах и гомотетиях – и почему это мощный метод решения задач.



ГДЕ ТЕМА «ПРЕОБРАЗОВАНИЙ» ЖИВЁТ В КУРСЕ 11 КЛАССА

Преобразования плоскости тесно связаны с координатным методом и векторным подходом. Они помогают доказывать равенство и подобие треугольников, строить симметричные фигуры, находить образы точек и линий, связывая чертёж и аналитику.



ПОНЯТИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Геометрическое преобразование – это правило, по которому каждой точке фигуры ставится в соответствие новая точка на плоскости. Так возникает связь между «исходным» и «полученным» состоянием фигуры.

01

Исходная фигура называется прообразом, а полученная – образом. Важно, что преобразование действует на все точки сразу, поэтому у фигуры меняется расположение, а иногда и масштаб.

02

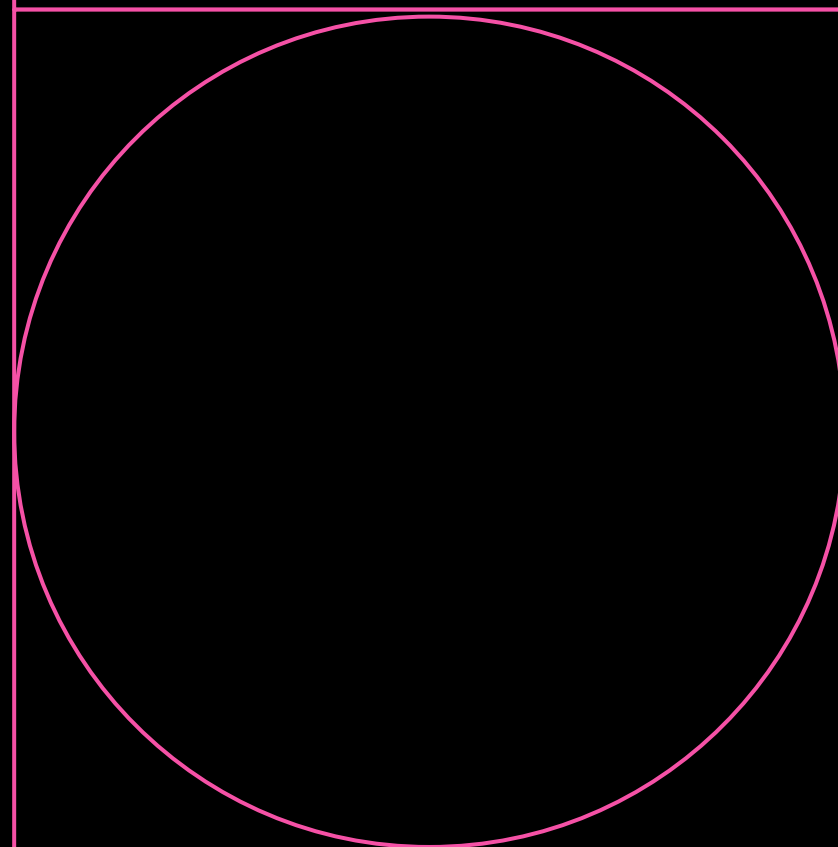
Некоторые преобразования сохраняют длины и углы, сохраняя форму. Другие меняют размеры, но оставляют «внутреннюю геометрию» в виде подобия – как при гомотетии.

03

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ЕГО СВОЙСТВА

Параллельный перенос задается вектором: каждую точку смещают на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. Поэтому сохраняются расстояния между точками, а образ отрезка равен исходному.

Из-за сохранения линейных расстояний треугольник после переноса совпадает по форме и размеру с исходным: меняется лишь положение. Пример: перенос на вектор $(3; 2)$ смещает фигуру на 3 клетки вправо и на 2 вверх.





СРАВНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ

Во всех четырёх случаях – перенос, осевая и центральная симметрия, поворот – фигуры сохраняют размеры и углы (то есть относятся к движениям). Гомотетия, наоборот, масштабирует фигуры.

Диаграмма показывает: ключевой признак движений – сохранение метрик. Как только появляется изменение масштаба, преобразование перестаёт быть движением и переходит к подобию – это как раз гомотетия.



ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Осевая симметрия переводит каждую точку в точку по другую сторону от оси на равном расстоянии. Геометрически это выглядит как «зеркальное отражение» относительно прямой.

Ось симметрии является серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему точку и её образ. Поэтому отрезок «точка-образ» пересекает ось под прямым углом и делится ею пополам.

У правильного квадрата осей симметрии четыре, у равнобедренного треугольника – одна, а у окружности осей бесконечно много. Количество осей отражает степень «симметричности» фигуры.



СВОЙСТВА СИММЕТРИЙ И ПЕРЕНОСОВ

Вид преобразования	Сохраняет и пример
Параллельный перенос	Длины и углы; ориентация сохраняется. Пример: сдвиг фигуры в другую область плоскости.
Осевая симметрия	Длины и углы; ориентация меняется. Пример: отражение относительно прямой.
Центральная симметрия	Длины и углы; ориентация меняется. Эквивалентна повороту на 180° .
Поворот	Длины и углы вокруг центра; ориентация может сохраняться или изменяться в зависимости от угла. Пример: поворот вокруг точки.

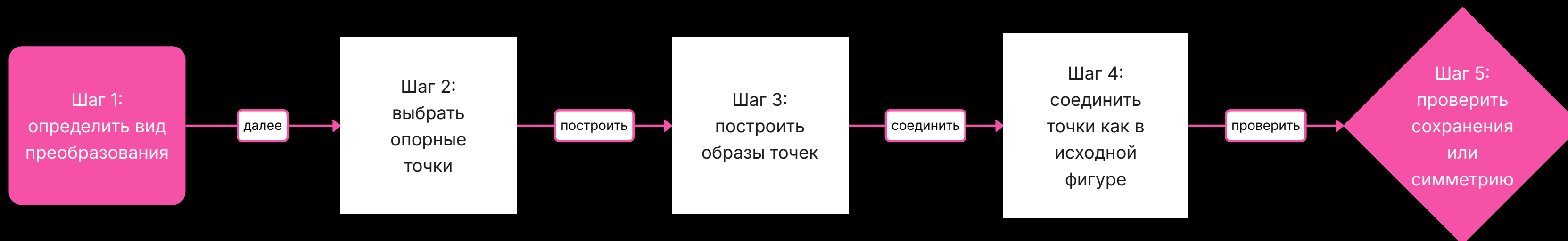
Таблица кратко фиксирует соответствие между видом преобразования и тем, что сохраняется. Это помогает быстро выбирать стратегию решения в задачах на доказательство и построение.

Во всех перечисленных преобразованиях фигура не деформируется: сохраняются базовые геометрические величины. Поэтому их относят к движениям и используют для построений, где требуется равенство или точная перестановка элементов фигуры.



АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАЗА ФИГУРЫ

Порядок действий помогает не пропустить этапы и проверить корректность результата.





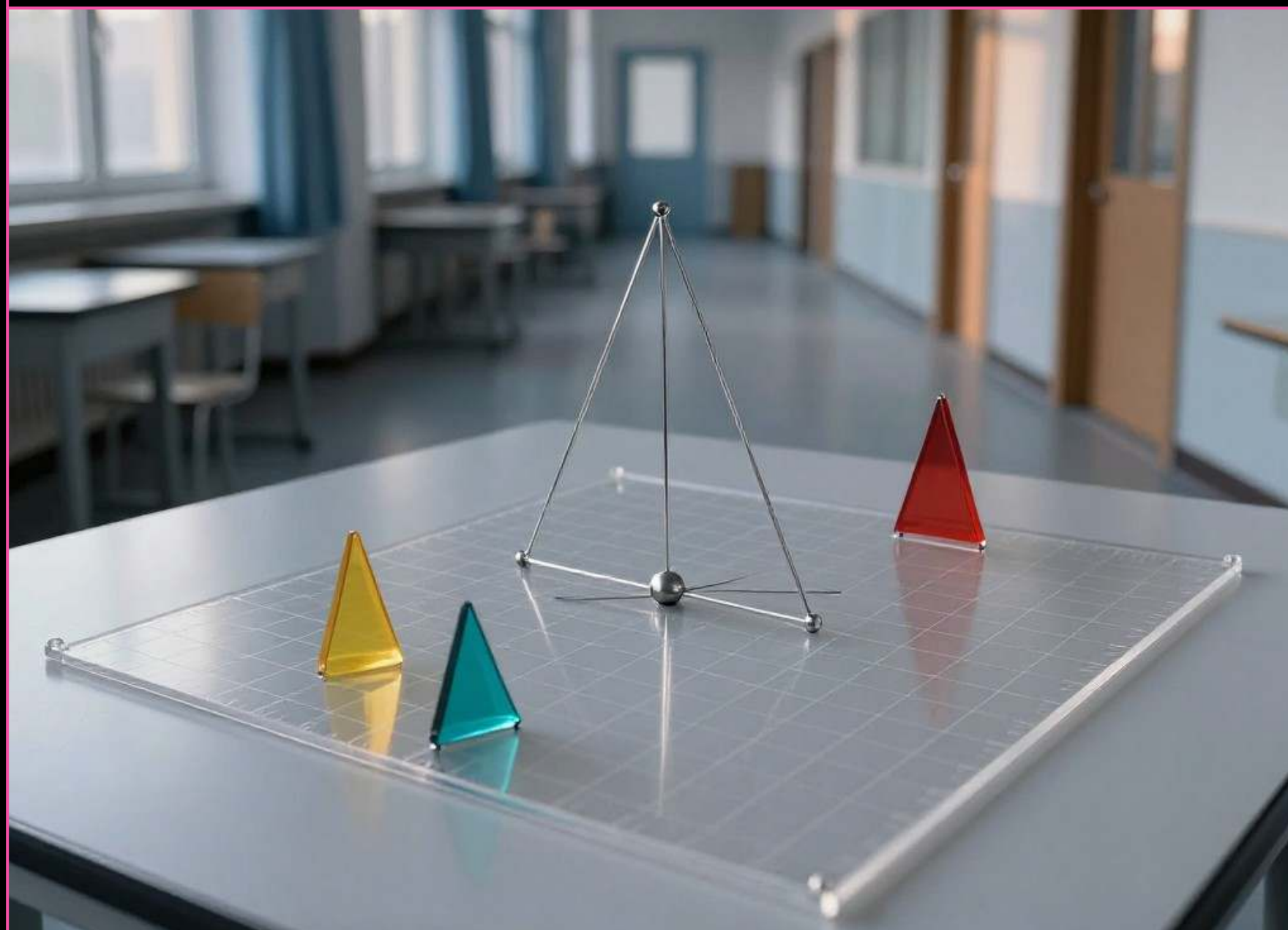
ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Центральная симметрия относительно точки O переводит каждую точку A в точку A' так, что O является серединой отрезка AA' . Получается точечная «отражающая» пара вокруг центра.

Это преобразование эквивалентно повороту на 180° вокруг центра O . Поэтому оно сохраняет прямолинейность: прямые переходят в прямые, а отрезки – в отрезки той же длины.

Углы также сохраняются, как и расстояния. При этом ориентация фигуры меняется: «направление» обхода контуром перестраивается, хотя геометрические величины остаются прежними.

ПОВОРОТ ВОКРУГ ТОЧКИ



Как задаётся поворот

Поворот задается центром, углом и направлением поворота. Для каждой точки задаётся дуга окружности: расстояние до центра поворота не меняется, значит радиус и геометрическая «форма» сохраняются.

Что происходит с фигурой при разных углах

При повороте на 90° , 120° или 180° каждая точка описывает дугу окружности с центром в центре поворота. Например, квадрат при повороте на 90° совпадает сам с собой, а равнобедренный треугольник обычно переходит в равную фигуру, но с другим расположением.



УГЛЫ ПОВОРОТА И РЕЗУЛЬТАТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Повороты на 90° и 270° меняют ориентацию фигуры и задают новый «направленный» порядок вершин. Поворот на 360° действует как тождественное преобразование.

Диаграмма показывает, что лишь при 180° поворот совпадает с центральной симметрией, а при 360° фигура полностью возвращается. Остальные углы дают разные изображения.



ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ ФИГУР

Гомотетия с центром O и коэффициентом k переводит каждую точку A в точку A' на луче OA : точки O , A , A' лежат на одной прямой. Направление задаёт знак k .

01

Если $k > 1$, образ удаляется от центра сильнее, и фигура увеличивается; при $0 < k < 1$ она приближается, поэтому уменьшается. При $k < 0$ образ оказывается по другую сторону от O .

02

Главная связь гомотетии с подобием: соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Поэтому гомотетия переводит одну подобную фигуру в другую, сохраняя форму.

03

КОЭФФИЦИЕНТ ГОМОТЕТИИ И ИЗМЕНЕНИЕ РАЗМЕРОВ

При $k=1$ фигура совпадает с образом, а при $|k|=1$ сохраняется масштаб по длинам. Знак коэффициента влияет не на размер, а на то, по какую сторону от центра окажется образ.

График подчёркивает: линейный размер меняется пропорционально $|k|$. Отрицательный коэффициент при $|k|=1$ даёт центральную симметрию, то есть разворот относительно центра.

ЧТО СОХРАНЯЮТ И ЧТО ИЗМЕНЯЮТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Движения плоскости – параллельный перенос, осевая и центральная симметрии, поворот – сохраняют длины отрезков и величины углов. Поэтому фигуры имеют ту же форму и в точности тот же «размер».

01

Гомотетия сохраняет углы между прямыми и отношения соответствующих сторон, то есть формирует подобие. Однако длины масштабируются: каждое измерение умножается на $|k|$, а не остаётся прежним.

02

Площади при гомотетии изменяются сильнее: они масштабируются в k^2 раз. Это удобно проверять на фигурах с понятной площадью – например, на треугольниках и многоугольниках.

03

Если $k > 0$, ориентация фигуры сохраняется: «порядок» вершин и направление обхода не меняются. При $k < 0$ ориентация меняется, и образ оказывается «перевернут» относительно центра.

04

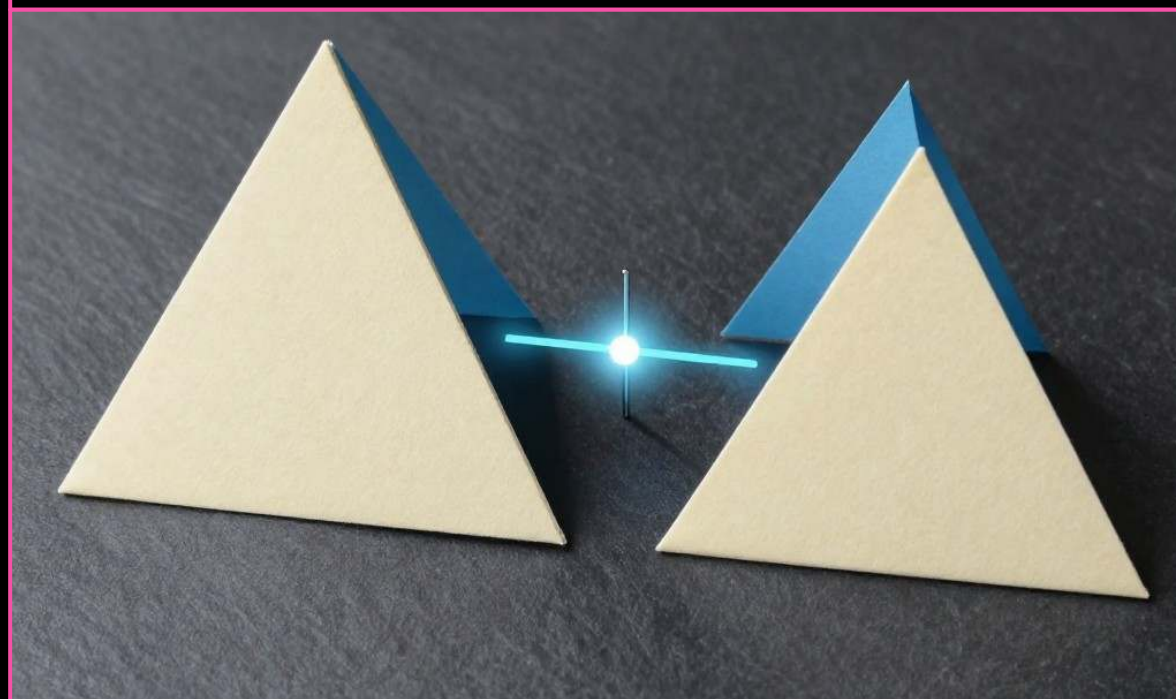
ОСНОВНЫЕ ПРИЗНАКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ключевые параметры преобразования позволяют однозначно задать правило и быстро понять, что именно сохраняется в задаче.

По таблице видно: для движений достаточно центра/оси или вектора и угла, а для гомотетии ключевы центр и коэффициент. Знак k объясняет смену ориентации, даже когда $|k|=1$.

Преобразование	Параметры	Сохраняет расстояния	Сохраняет ориентацию
Перенос	вектор	да	да
Осевая симметрия	ось	да	нет
Центральная симметрия	точка	да	нет
Поворот	центр, угол	да	зависит от угла
Гомотетия	центр, k	нет	да при $k>0$

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧАХ: ОТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ДО ДИЗАЙНА



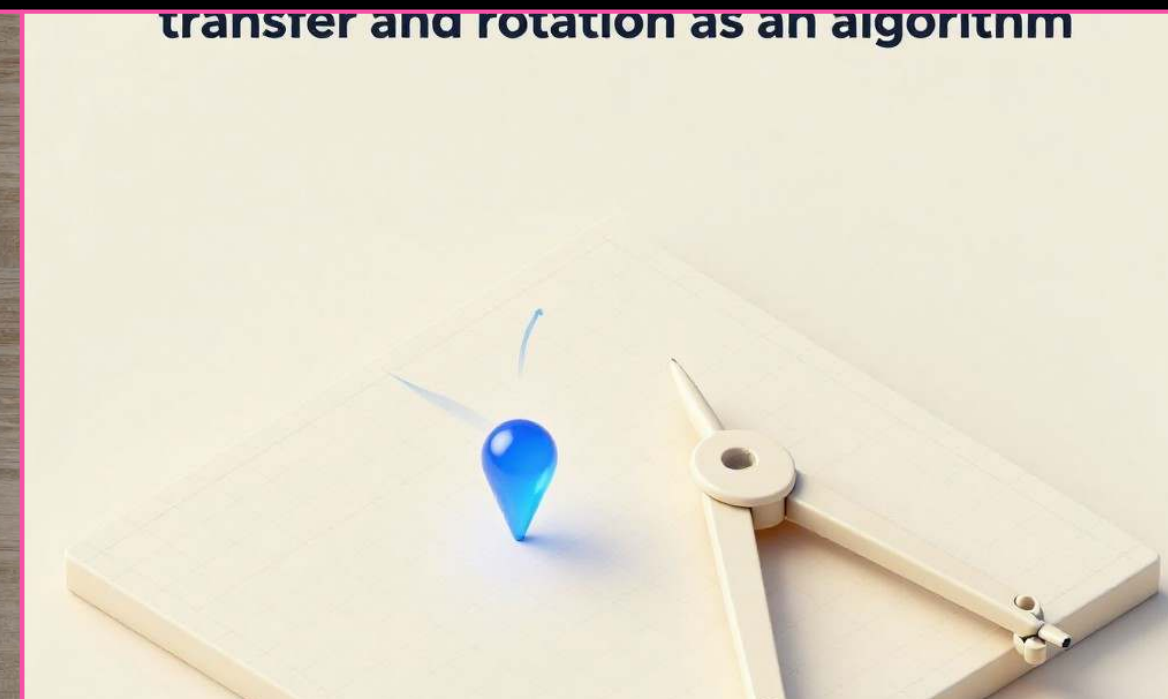
Равенство треугольников через «перемещение»

Когда два треугольника выглядят по-разному, но есть подозрение на движение, преобразование часто превращает задачу о равенстве в проверку совпадения образов. Ось симметрии или поворот помогают свести доказательство к тождественному расположению фигур.



Симметричные орнаменты и «копирование» фрагментов

Орнаменты на плитке и узоры в тетрадах строятся как повторяющиеся фрагменты. Если рисунок обладает осевой или центральной симметрией, достаточно описать один элемент и способ его переноса или отражения, чтобы получить всю композицию.



Координаты: перенос и поворот как алгоритм

В координатной геометрии преобразование становится вычислимой операцией: по формуле получают координаты образа точки. Перенос и поворот особенно удобны, когда нужно находить новые точки по заданным координатам без лишних построений.

ГДЕ ВСТРЕЧАЕТСЯ СИММЕТРИЯ В ОКРУЖАЮЩЕМ МИРЕ

В технике и архитектуре симметрия помогает добиваться баланса и повторяемости деталей. Наблюдайте: даже сложные формы часто состоят из симметричных модулей.

Диаграмма подчёркивает преобладание осевой и центральной симметрий. Переносная симметрия чаще проявляется в повторяющихся структурах – орнаментах и решётках.



ТИПИЧНЫЕ ЗАДАНИЯ 11 КЛАССА



ОБРАЗ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

Дано преобразование (перенос, симметрия, поворот, гомотетия). Нужно найти координаты образа точки или построить точку на чертеже, используя заданные параметры.



ОТРАЖЕНИЕ ОТРЕЗКА И ПОИСК ОСИ

Часто требуется восстановить ось симметрии или проверить, что два отрезка переходят друг в друга при отражении. Решение опирается на серединный перпендикуляр и равенство расстояний.



ЦЕНТР И УГОЛ ПОВОРОТА

Поворот задают центром и углом. В задачах находят центр по паре точек и затем определяют угол, проверяя совпадение образов характерных точек фигуры.

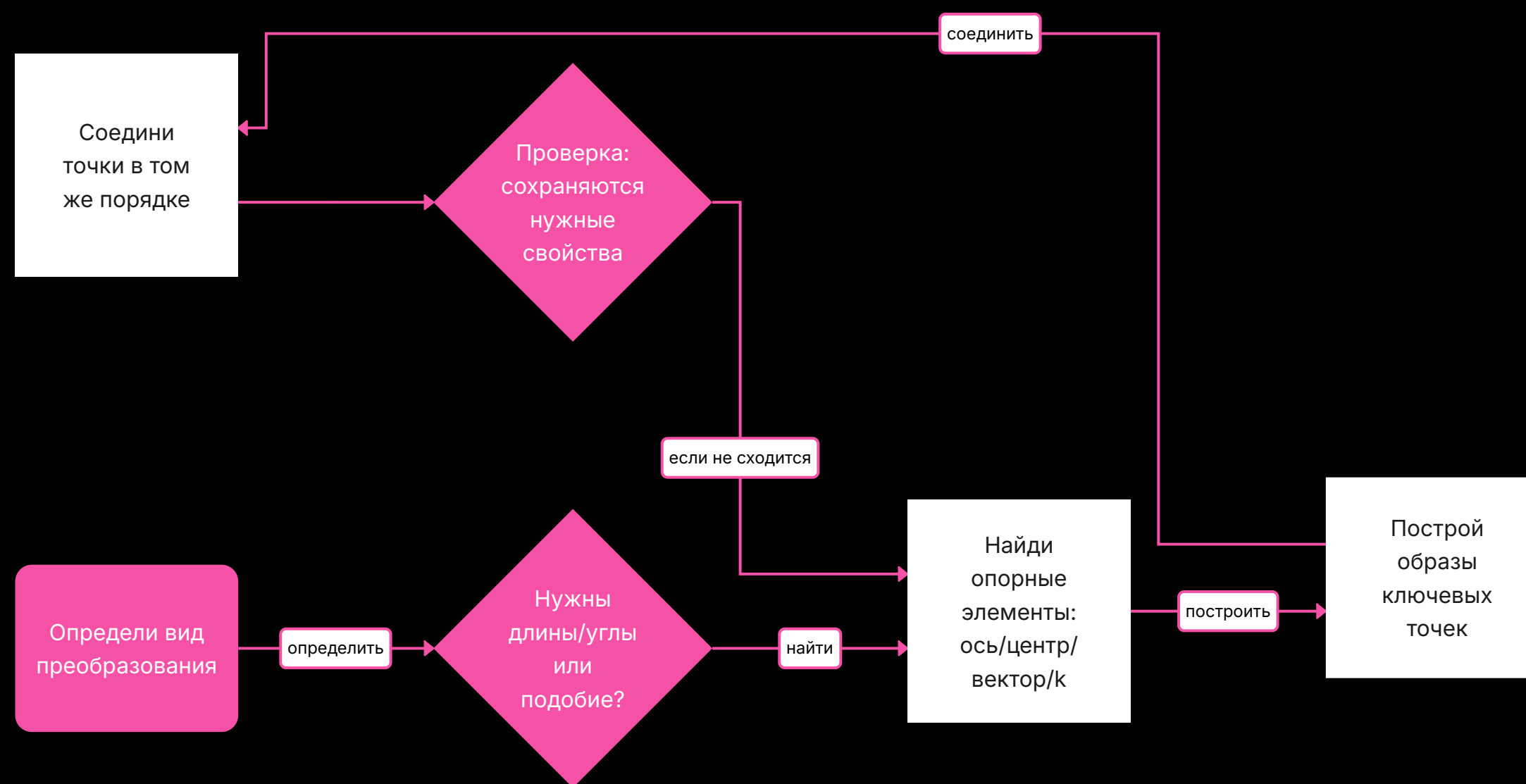


ГОМОТЕТИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОДОБИЯ

По условию нужно показать, что фигуры подобны и определить коэффициент гомотетии. Используются пропорции соответствующих сторон и равенство углов при переходе к образу.

КАК РЕШАЮТСЯ ЗАДАЧИ НА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Схема выбора шага в зависимости от вида преобразования и требуемого свойства (равенство, подобие, симметричность).



ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕЛАЮТ ГЕОМЕТРИЮ «УПРАВЛЯЕМОЙ»



Геометрические преобразования образуют связующее звено школьной геометрии: они соединяют чертёж, координаты и свойства фигур. Движения сохраняют длины и углы, а гомотетия добавляет масштаб и подобие, расширяя инструменты решения задач.