

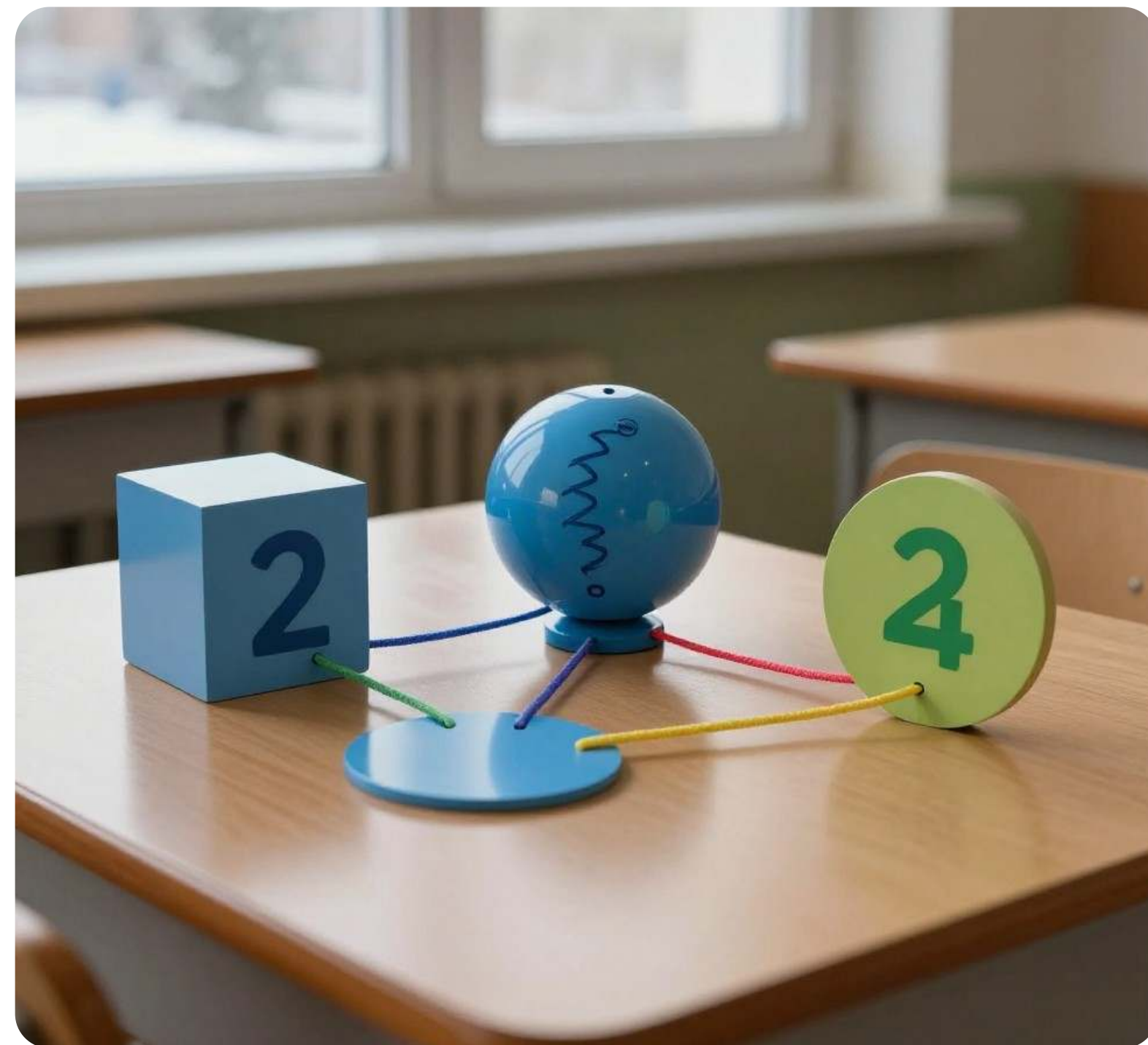
Неравенства и уравнения, содержащие степень

Степени, корни, уравнения
и неравенства



Повторяем главные связи

Степень и корень помогают переходить от числа к его повторному умножению и обратно. Эти операции часто встречаются в геометрии, физике и задачах на измерения, поэтому важно уверенно работать с ними.



Где встречаются степени и корни

Геометрия и движение

Площадь квадрата выражается через сторону как x^2 , а в задачах на движение и расстояние часто появляются степени и формулы с ними. Это делает тему практической и наглядной.

Объём и размерности

Объём куба связан с x^3 , потому что три одинаковых измерения перемножаются. Поэтому кубические выражения особенно удобно использовать, когда речь идёт о длине, площади основания и высоте.

Обратный переход

Корни появляются, когда нужно восстановить исходное число по его площади, объёму или другому результату. Например, $\sqrt{x}$ помогает найти сторону, если известна площадь квадрата.

Типовые записи

Часто встречаются записи $x^2=25$, $\square x=2$ и $\sqrt{x+1}=4$. Именно такие выражения будут основой для уравнений и неравенств в этой теме.



Степени и корни: одна запись

01

Одна и та же идея

Запись $a^{(1/n)}$ и корень $\sqrt[n]{a}$ означают одно и то же: извлечение n -го корня. Это удобно использовать, когда степень записана в дробном виде.

02

Нечётный показатель

Если показатель n нечётный, корень можно находить для любых чисел. Например, кубический корень существует и для положительных, и для отрицательных значений.

03

Чётный показатель

Если n чётный, подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Это ограничение сразу задаёт допустимые значения переменной и помогает не делать лишних шагов.

Область допустимых значений

Выражение	ОДЗ
$\sqrt{x}$	$x \geq 0$
$\sqrt{x-5}$	$x \geq 5$
$\sqrt[n]{x}$	нет ограничений

Перед решением важно определить, какие значения переменной допустимы в выражении. Это особенно важно для корней и дробных степеней.

Для квадратного корня нужны неотрицательные значения под знаком корня, а для кубического корня ограничений нет.

Свойства корней и определения области допустимых значений

Общая идея для $x^n=a$

01

Увидеть форму

Сначала приводят уравнение к виду $x^n=a$, чтобы увидеть, какая операция скрыта. Тогда решение ищут как обратное действие — извлечение n -го корня.

02

Нечётная степень

При нечётном n обычно получается одно решение, потому что нечётная степень сохраняет знак числа. Это удобно, когда справа стоит положительное или отрицательное число.

03

Чётная степень

При чётном n возможны два симметричных ответа, если число a положительное, или ни одного, если a отрицательное. Здесь особенно важна аккуратность записи.

04

Контроль ответа

После нахождения ответа его обязательно подставляют в исходное уравнение. Проверка показывает, подходит ли найденное значение и не возник ли лишний корень.

Пример: нечётная степень

01

Куб равен 27

В уравнении $x^3=27$ ищем число, куб которого равен 27. Подходит $x=3$, потому что $3 \cdot 3 \cdot 3=27$, и других решений нет.

02

Пять степеней

В уравнении $x^5=-32$ ответ $x=-2$, так как нечётная степень сохраняет знак. Пять множителей -2 дают именно -32 .

03

Проверяем подстановкой

Проверка всегда завершает решение: найденное число подставляют в исходную запись и убеждаются, что равенство выполняется без дополнительных корней.

Пример: чётная степень

○ Два симметричных корня

Для $x^2=49$ получаем два решения: $x=7$ и $x=-7$. Квадрат уничтожает знак, поэтому оба числа дают одно и то же значение.

○ Четвёртая степень

Для $x^4=16$ тоже возможны два ответа: $x=2$ и $x=-2$. Это характерно для уравнений вида $x^n=a$ при чётном n и положительном a .



Сведение к одной степени

Два случая

После вынесения получаем $x^2(x^2-5)=0$. Значит, либо $x^2=0$, либо $x^2=5$, и дальше каждый случай решается отдельно.

Общий множитель

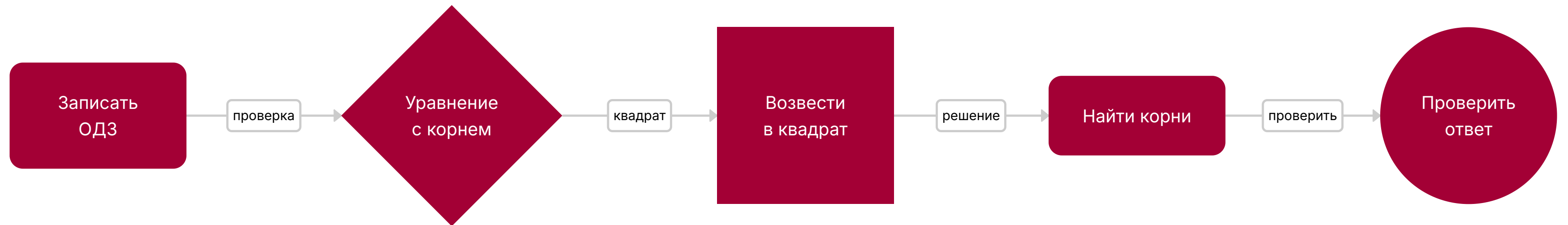
Начинаем с уравнения $x^4-5x^2=0$ и замечаем общий множитель x^2 . Это позволяет заменить одно сложное выражение несколькими более простыми случаями.

Ответы

Из первого случая получаем $x=0$, из второго — $x=\pm\sqrt{5}$. Так одно уравнение с четвёртой степенью превращается в набор коротких ответов.

Уравнения с корнями

Последовательность действий при решении уравнений с корнями и последующей проверке



2

Именно столько исходов может дать одна ошибка преобразования: лишний корень или потерянное решение.

После возведения в квадрат или умножения на неизвестное выражение ответ нужно перепроверить.

Алгебраические преобразования уравнений и неравенств, школьный курс математики

5

Нечётная степень не меняет направление неравенства.

Для степени 5 порядок чисел сохраняется, поэтому сравнение можно читать напрямую, без перехода к новому виду.

Свойства возрастания функции x^n при нечётном n ,
школьный курс математики

Неравенства с чётной степенью

Чётная степень делает выражение неотрицательным, поэтому решения часто распадаются на два симметричных промежутка или один центральный интервал.

У неравенства с квадратом решение чаще всего задаётся несколькими промежутками, а не одним числом или точкой.

Иллюстрация по темам квадратных неравенств и промежутков решения



Пример: квадрат и промежутки

Неравенство	Ответ
$x^2 \geq 9$	$(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$
$x^2 < 16$	$(-4; 4)$

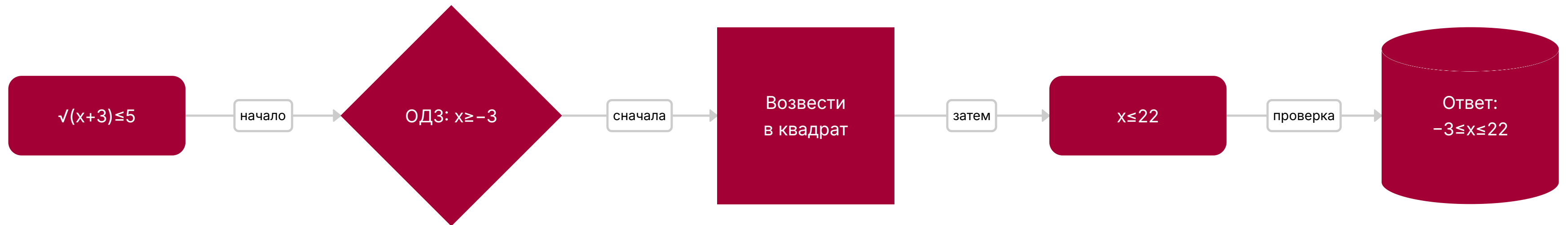
Сравнение двух типичных случаев показывает, как записывать ответ через объединение промежутков или один внутренний интервал.

В первом случае решение состоит из двух лучей, во втором — из одного промежутка между границами.

Школьный пример решения квадратных неравенств

Решение через ОДЗ и проверку

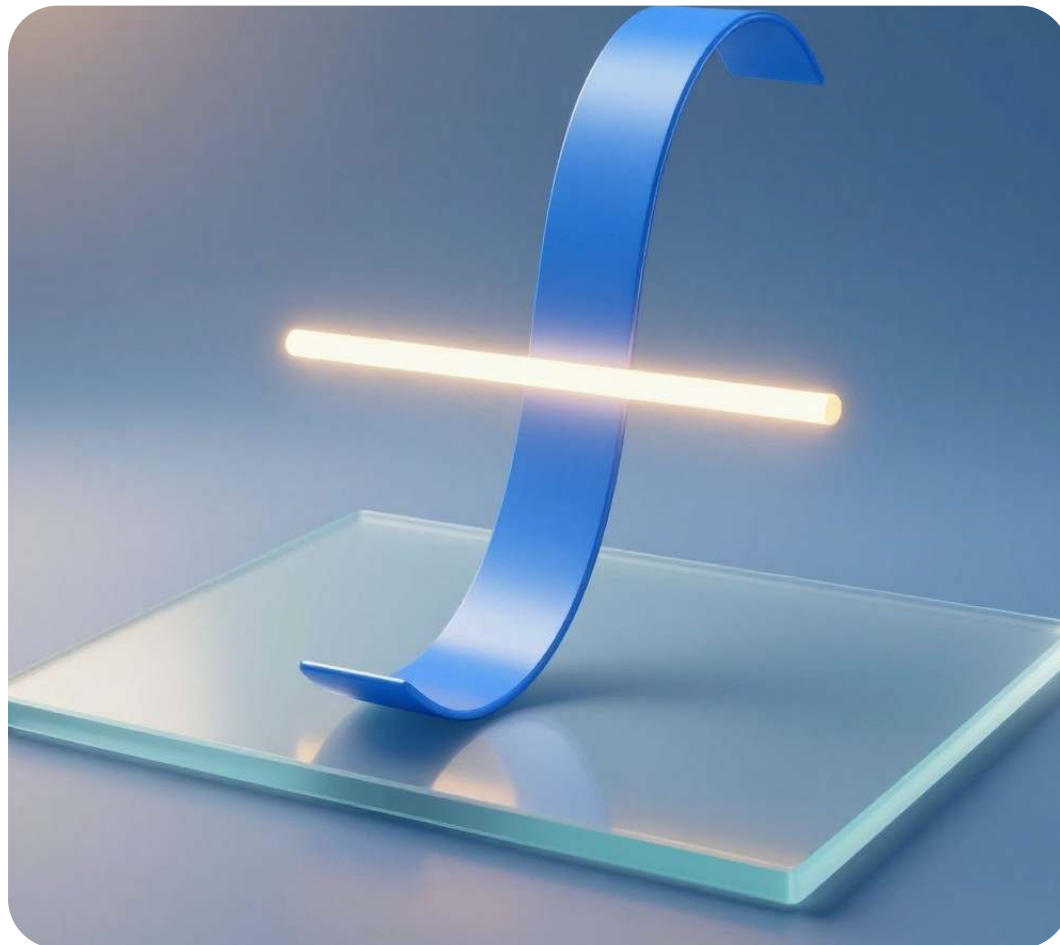
Последовательность решения основана на проверке области допустимых значений и последующей подстановке корней.



Как график подсказывает число решений

Парабола и два пересечения

На координатной плоскости парабола поднимается вверх и опускается вниз симметрично относительно оси. Если провести горизонтальную линию, она часто пересечёт её в двух точках, поэтому квадратное уравнение даёт два ответа.



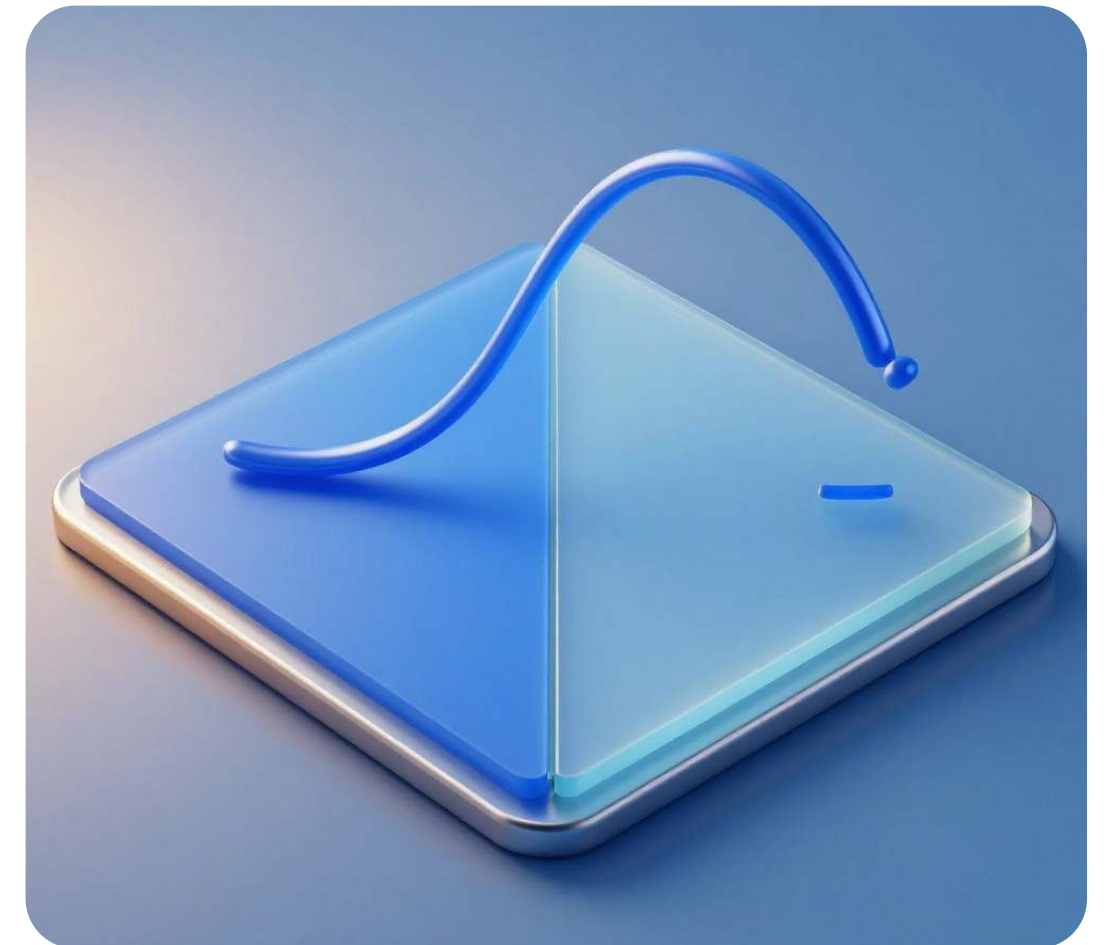
Линия, которая не раздваивается

Кубическая кривая выглядит иначе: она плавно идёт снизу вверх и проходит через начало координат. Для любого значения по высоте обычно находится только одна точка, поэтому нечётная степень ведёт к единственному решению.



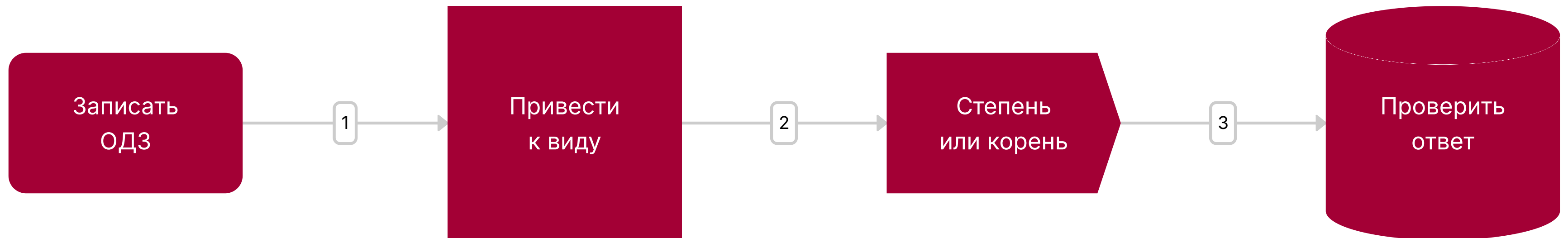
Чтение ответа по рисунку

График помогает увидеть знак ответа ещё до вычислений. Если значение должно быть больше нуля, ищем точки правее нужной границы; если меньше — левее. Так алгебраическая запись превращается в понятную картину.



Алгоритм решения задач

Алгоритм подходит для уравнений и неравенств со степенями и корнями, если соблюдать порядок действий.



Что чаще всего идёт не так



Пропущена ОДЗ

У корня есть свои условия существования. Если их не записать сразу, в ответ могут попасть числа, которые вообще не подходят под исходное выражение.



Неравносильное преобразование

Квадрат и возведение в степень не всегда сохраняют точность перехода. После такого шага возможны лишние решения, поэтому итог обязательно сверяют с исходным уравнением.



Потеря второго корня

При чётной степени легко забыть про два симметричных ответа. Но если квадрат равен положительному числу, нужно указывать оба знака: плюс и минус.



Неверная запись промежутков

Промежутки нужно записывать аккуратно: с нужными скобками, границами и объединением частей. Одна неверная скобка меняет смысл всего ответа.

Задания и ответы

Задание	Ответ
$x^2=36$	± 6
$x^3=-125$	-5
$\sqrt{x-1}=4$	$x=17$
$x^2<25$	$-5<x<5$

Короткие задания помогают быстро проверить, как работает алгоритм: от точных корней до промежутков решения.

Во всех примерах ответ получается после выбора нужного свойства степени или корня, а для корня отдельно учитывается ОДЗ.

Подборка тренировочных заданий по теме

Запомни главное

При решении задач со степенями и корнями сначала смотрят на область допустимых значений, затем выбирают нужное преобразование и в конце обязательно проверяют ответ. Так уменьшается риск ошибки.