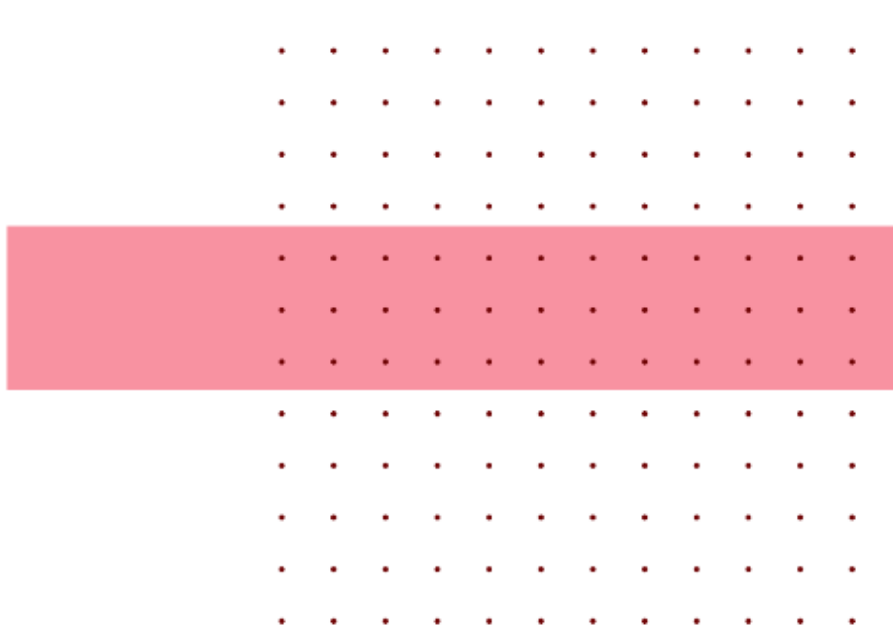
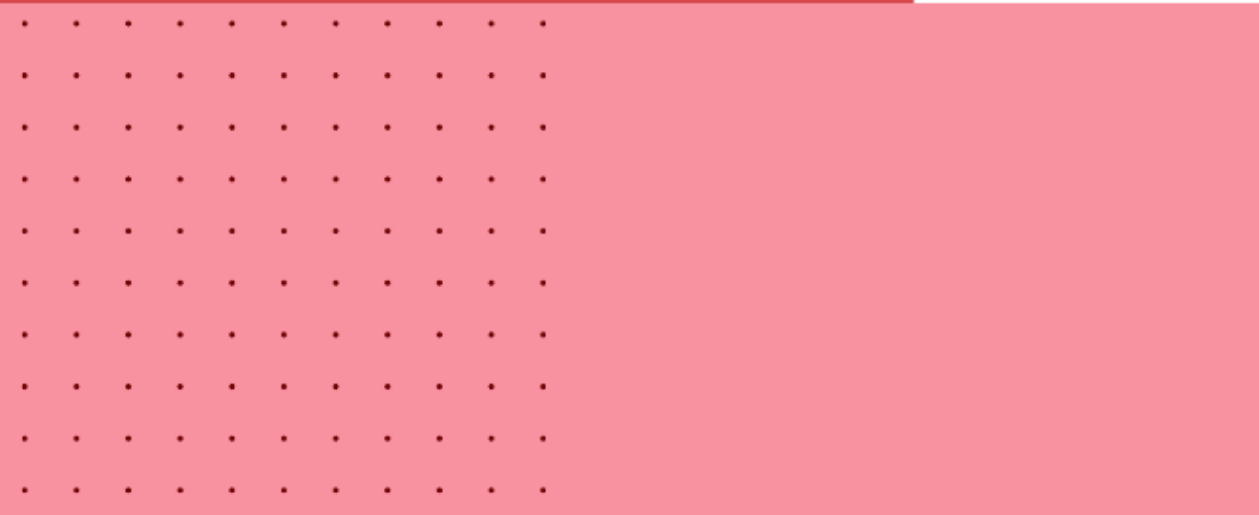




Неопределённый интеграл: основное понятие и способы вычисления



Путь от производной к первообразной и дальше — к практике.



Почему эта тема важна в 11 классе

Неопределённый интеграл завершает школьное изучение производной и показывает её обратное действие. Он требует уверенного владения формулами дифференцирования, преобразованием выражений и базовыми функциями, без которых переход к интегрированию невозможен.



Определение неопределённого интеграла

1. Семейство первообразных

Неопределённый интеграл функции — это все её первообразные сразу. Если одна функция $F(x)$ имеет производную $f(x)$, то именно $F(x)$ считается ответом на интегрирование с точностью до постоянной.

2. Стандартная запись

Принято писать $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$, а C обозначает произвольную постоянную, которая отражает бесконечное число возможных ответов.

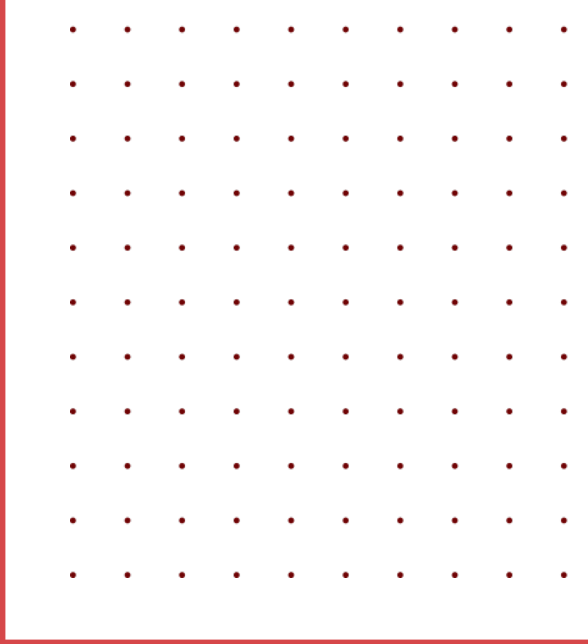
3. Роль постоянной

Разные первообразные одной и той же функции отличаются только на число. Поэтому добавление C обязательно: без него ответ был бы неполным и не учитывал бы все возможные решения.

4. Значение записи dx

Символ dx указывает переменную интегрирования и помогает понять, по какой переменной ищется первообразная. Это особенно важно, когда в выражении присутствуют несколько букв и составные функции.

Первообразная и производная: обратная связь



Что означает первообразная

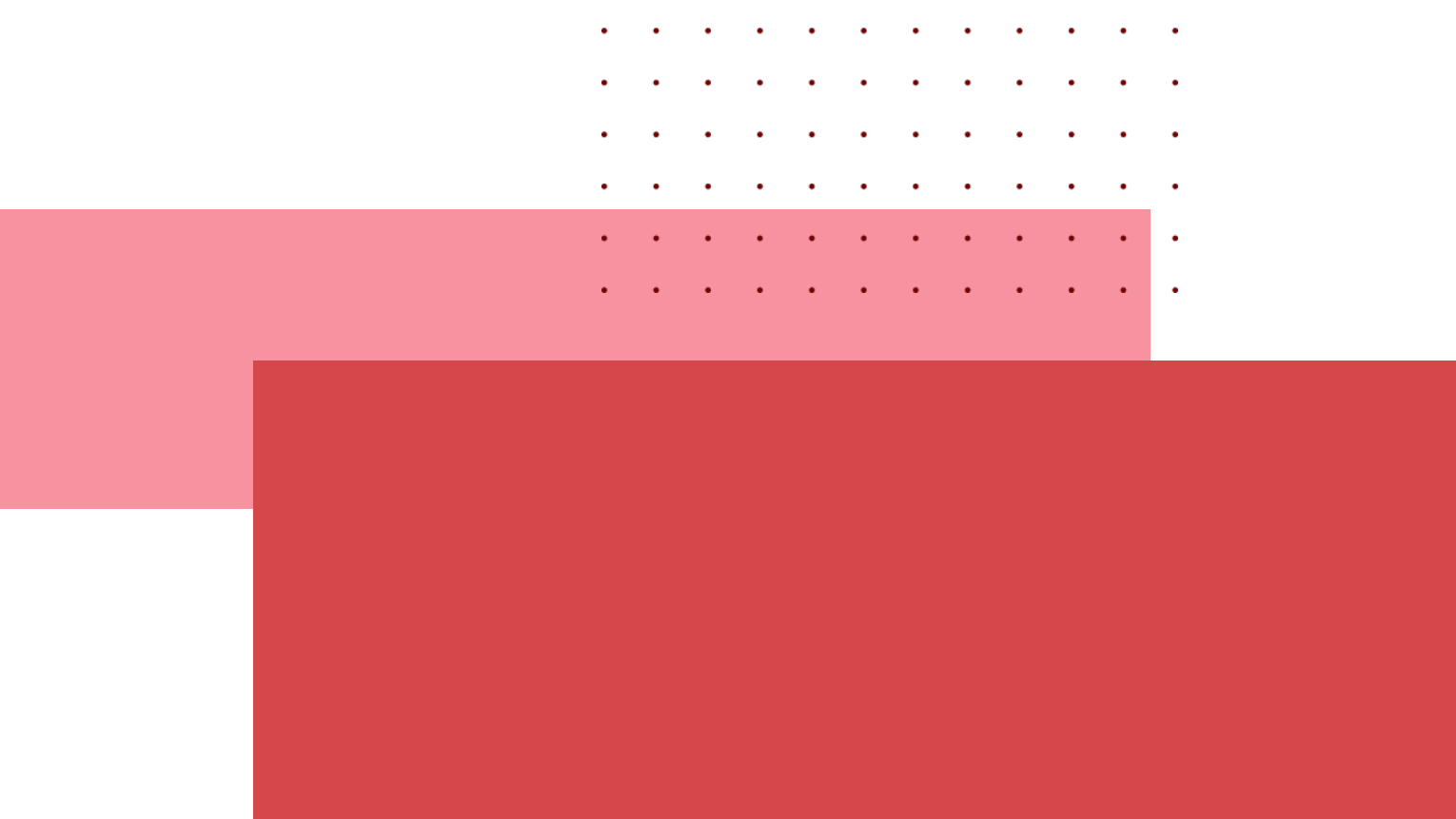
Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$, если при дифференцировании даёт $f(x)$. Тем самым интегрирование восстанавливает исходную функцию по её производной.

Почему появляется C

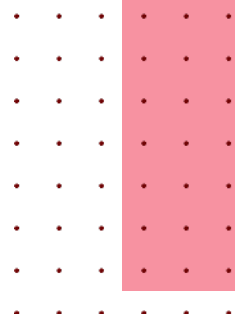
При нахождении производной любая постоянная исчезает. Поэтому все первообразные одной функции отличаются только постоянным слагаемым, а неопределённый интеграл всегда записывают с $+C$.

Как проверять ответ

Чтобы убедиться в правильности вычисления, найденную первообразную дифференцируют и сравнивают с исходным подынтегральным выражением. Совпадение означает, что интеграл найден верно.



Основные табличные интегралы

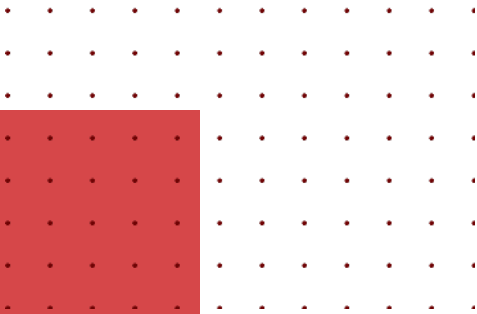


Эти формулы составляют основу вычислений и используются как опорные случаи при решении более сложных примеров.

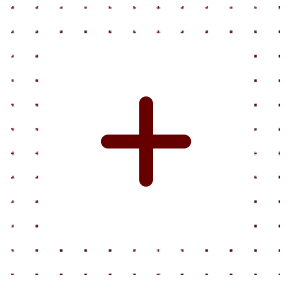
Случай $n = -1$ выделяется отдельно; остальные формулы позволяют быстро распознавать стандартные интегралы.

Функция	Первообразная	Условие
x^n	$x^{(n+1)/(n+1)}+C$	$n \neq -1$
$1/x$	$\ln x +C$	особый случай
$e^x, \sin x$	$e^x+C; -\cos x+C$	стандартные
$\cos x, a^x$	$\sin x+C; a^x/\ln a + C$	$a>0, a \neq 1$

Школьные формулы неопределённых интегралов из курса алгебры и начал анализа

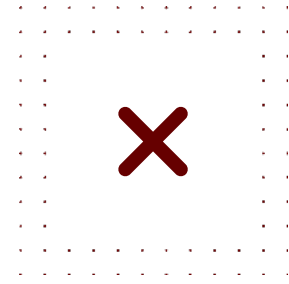


Линейность интеграла: три ключевые идеи



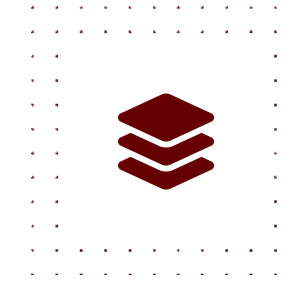
Сумма интегралов

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому сложное выражение можно разбить на несколько простых частей и вычислять каждую отдельно.



Постоянный множитель

Число можно вынести за знак интеграла, не меняя сути задачи. Это удобно, когда в подынтегральном выражении есть общий коэффициент.

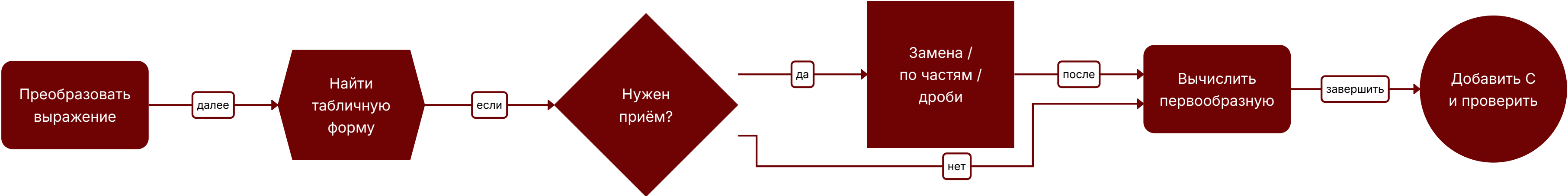


Обобщённая форма

Для комбинации нескольких функций работает правило $\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$, что делает вычисления более прозрачными.

Как находят неопределённый интеграл

Последовательность действий при решении типичного примера



Первообразная как накопление изменения

От скорости к пути

Если известна скорость движения, первообразная позволяет восстановить пройденный путь или координату. На графике это видно как накопление площади под кривой: чем дольше длится движение, тем больше итоговое изменение.



От ускорения к скорости

В физике первообразная связывает ускорение и скорость. Сначала находят функцию скорости, а затем, при необходимости, положение тела. Так одна зависимость постепенно превращается в более полное описание движения.



Один график — много сдвигов

График производной задаёт целое семейство первообразных: они имеют одинаковую форму, но различаются только вертикальным смещением. Это наглядно показывает, что константа C меняет положение, но не характер функции.



Примеры функций и их первообразных

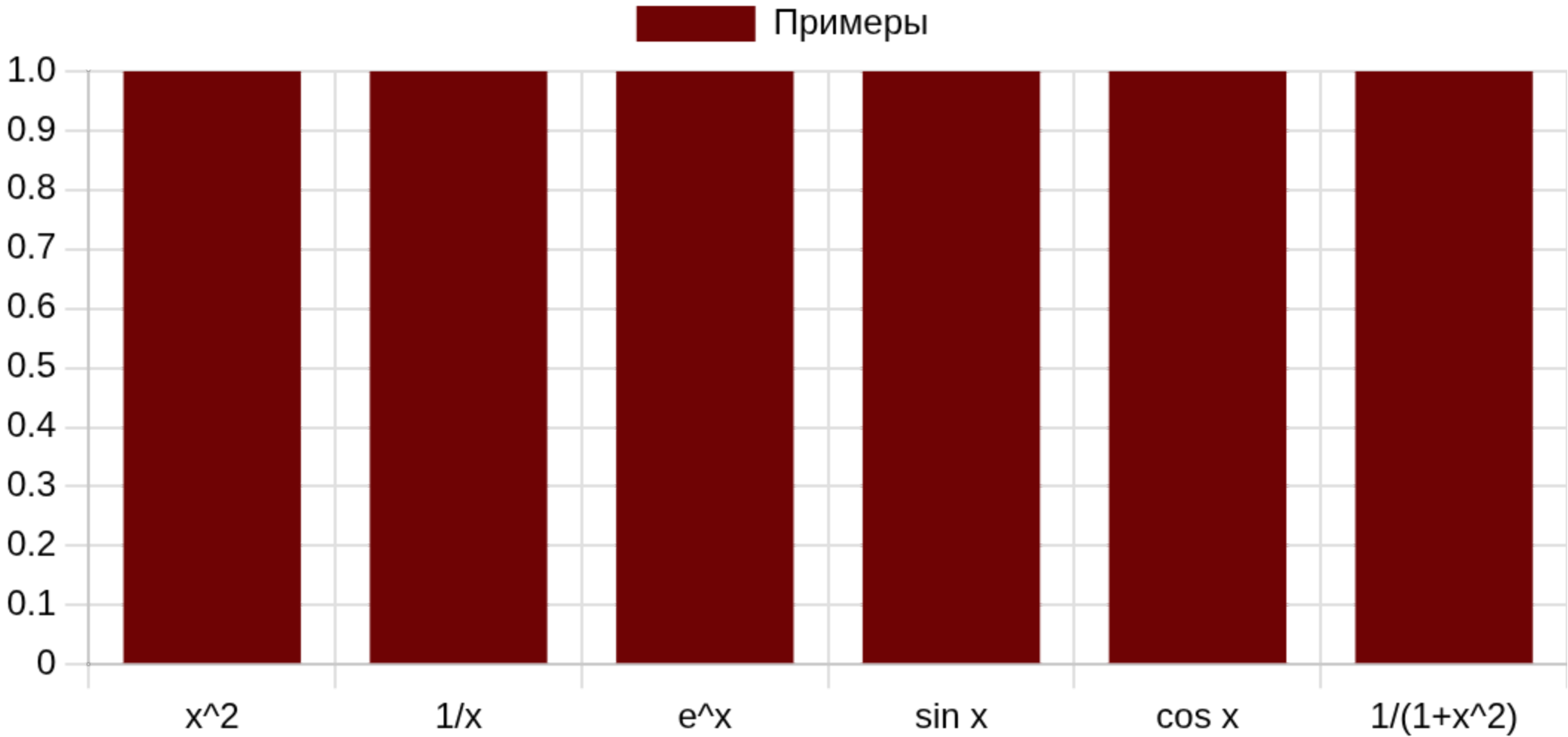


Диаграмма объединяет стандартные случаи, которые удобно держать в памяти как опорные образцы для дальнейших преобразований.

Все примеры проверяются одним действием — дифференцированием найденной первообразной.

Метод замены переменной



1.

Когда он нужен

Замена переменной особенно полезна, если под знаком интеграла есть составная функция и рядом с ней — её производная или близкое к ней выражение. Тогда структура интеграла становится заметно проще.

2.

Ввод новой переменной

Обычно полагают $u = g(x)$, после чего все части выражения переводят через u . Это позволяет заменить сложную зависимость более удобной и свести задачу к стандартной форме.

3.

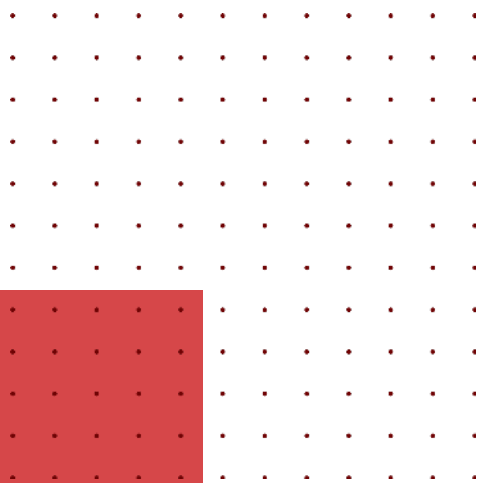
Вычисление в новой записи

После перехода к переменной u интеграл решают уже в новом виде, используя привычные формулы. Такой приём особенно эффективен для выражений типа $f(g(x))g'(x)$, где элементы хорошо согласованы.

4.

Возврат к x

Когда первообразная найдена, нужно снова перейти к исходной переменной x и не забыть добавить постоянную C . Именно этот шаг завершает решение и возвращает ответ к исходной задаче.



Интегрирование по частям

Выбор множителей

Сначала выделяют часть, которую удобно дифференцировать, и часть, которую легко проинтегрировать. Обычно выбирают u так, чтобы после дифференцирования выражение стало проще.

Применение формулы

Используют запись $\int u \, dv = uv - \int v \, du$, полученную из производной произведения. Она позволяет заменить исходный интеграл на новый, часто более простой.

Упрощение нового интеграла

После вычисления du и v подставляют их в формулу и получают интеграл, который нередко содержит более простые функции или меньшую степень многочлена.

Запись ответа

После нахождения первообразной обязательно добавляют постоянную C . Если исходный интеграл сложный, метод можно применять несколько раз, пока не получится стандартная форма.

Рациональные функции и разложение на простые дроби

Что рассматривают

Рациональная функция имеет вид $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Для интегрирования важно сначала определить, можно ли упростить дробь или выделить целую часть.

Когда делят многочлены

Если степень числителя не меньше степени знаменателя, выполняют деление многочленов. Это переводит выражение в сумму многочлена и правильной дроби, которую уже удобнее разлагать.

Как раскладывают дробь

Правильную рациональную дробь представляют суммой более простых дробей с линейными и квадратными множителями в знаменателе. Такое представление подбирают так, чтобы каждый член было легко интегрировать.

Что делают дальше

После разложения интегрируют каждый полученный член отдельно, используя табличные формулы и свойства линейности. В результате исходная сложная дробь распадается на набор стандартных интегралов.

Сравнение основных методов интегрирования

Метод	Когда применять	Основная идея
Табличный	Стандартные формы	Использовать готовую формулу
Замена переменной	Составные функции	Перейти к новой переменной
По частям	Произведения функций	Упростить через $\int u dv$
Простые дроби	Рациональные дроби	Разложить на сумму дробей

Школьный курс алгебры и начал анализа, тема «Неопределённый интеграл»

Выбор метода зависит от вида подынтегрального выражения и того, можно ли привести его к стандартной форме.

Метод выбирают по структуре выражения: сначала ищут стандартную форму, затем — возможность замены, произведения или разложения на простые дроби.

Типичные ошибки при нахождении неопределённого интеграла



Забывают C

В ответе часто пропускают произвольную постоянную. Это снижает полноту решения, потому что семейство первообразных отличается именно на константу, а не на форму функции.



Ошибаются в замене

При замене переменной нередко переводят в новую переменную не все части выражения. Из-за этого подставленный интеграл перестаёт быть эквивалентным исходному.



Теряют модуль

В формуле $\int dx/x = \ln|x| + C$ иногда забывают модуль. Без него ответ становится неполным, так как логарифм определён только для положительного аргумента.



Неверная формула

Иногда табличную формулу применяют к похожему, но не совпадающему выражению. Перед вычислением нужно проверить коэффициенты, степени, скобки и вид функции.

Где используется неопределённый интеграл



На школьном уровне особенно заметны задачи, где по известной скорости находят путь, а по производной восстанавливают исходную функцию.

Интеграл нужен не только в алгебре: он описывает накопление, восстановление и переход от скорости изменения к самой величине.

Содержательная схема по теме «Неопределённый интеграл», 2025

Связь с физикой: скорость, ускорение, путь

1. Из скорости к пути

Если задана скорость $v(t)$, первообразная позволяет восстановить закон движения $s(t)$. Постоянная интегрирования отражает начальное положение тела и определяется из условия задачи.

2. Из ускорения к скорости

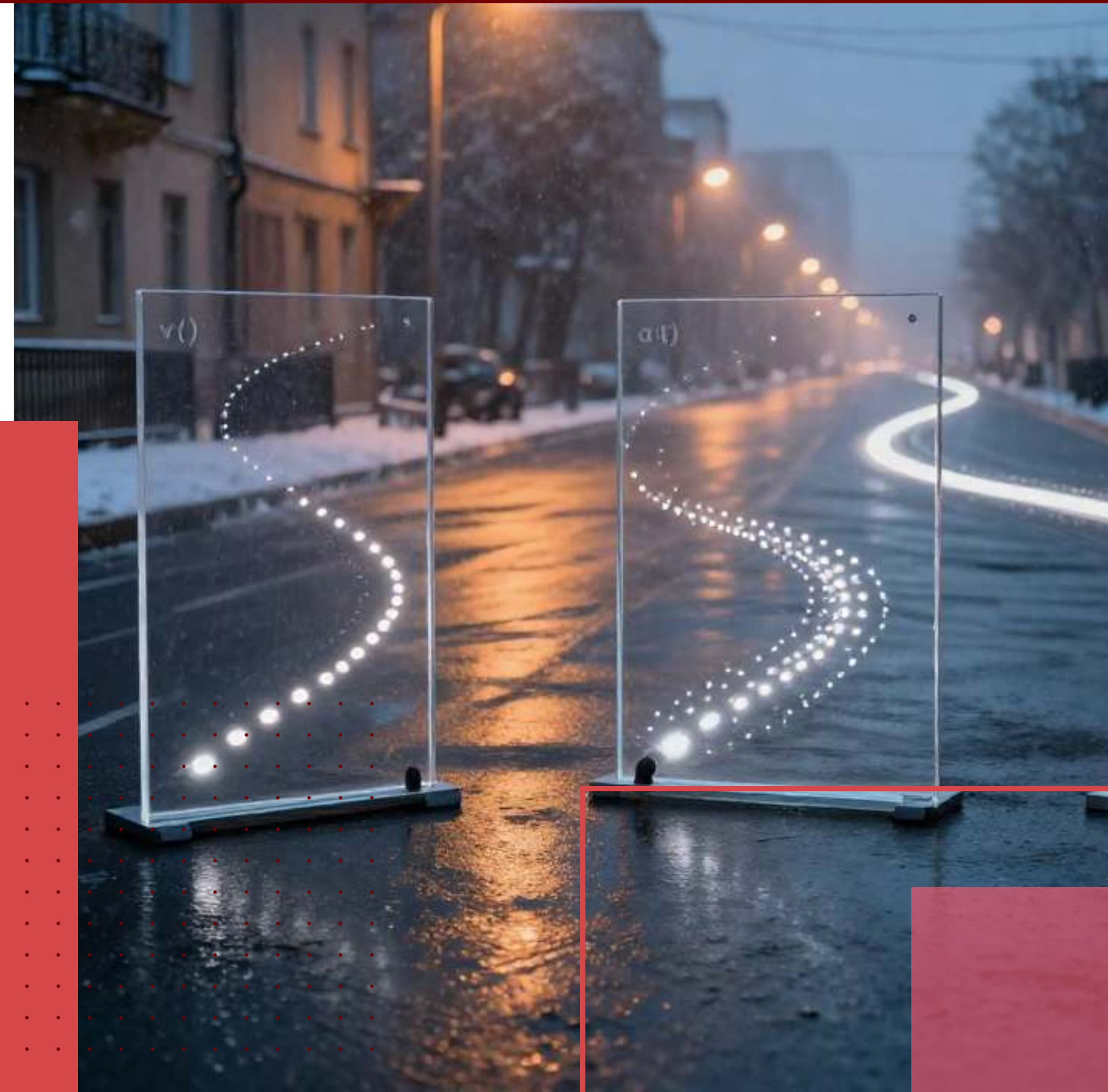
Когда известно ускорение $a(t)$, сначала находят первообразную и получают скорость. Затем по новой функции снова интегрируют, чтобы определить перемещение или координату.

3. Равномерно изменяющееся движение

При постоянном ускорении интегрирование связывает три величины: ускорение, скорость и путь. Это наглядно показывает, как одна физическая характеристика порождает другую.

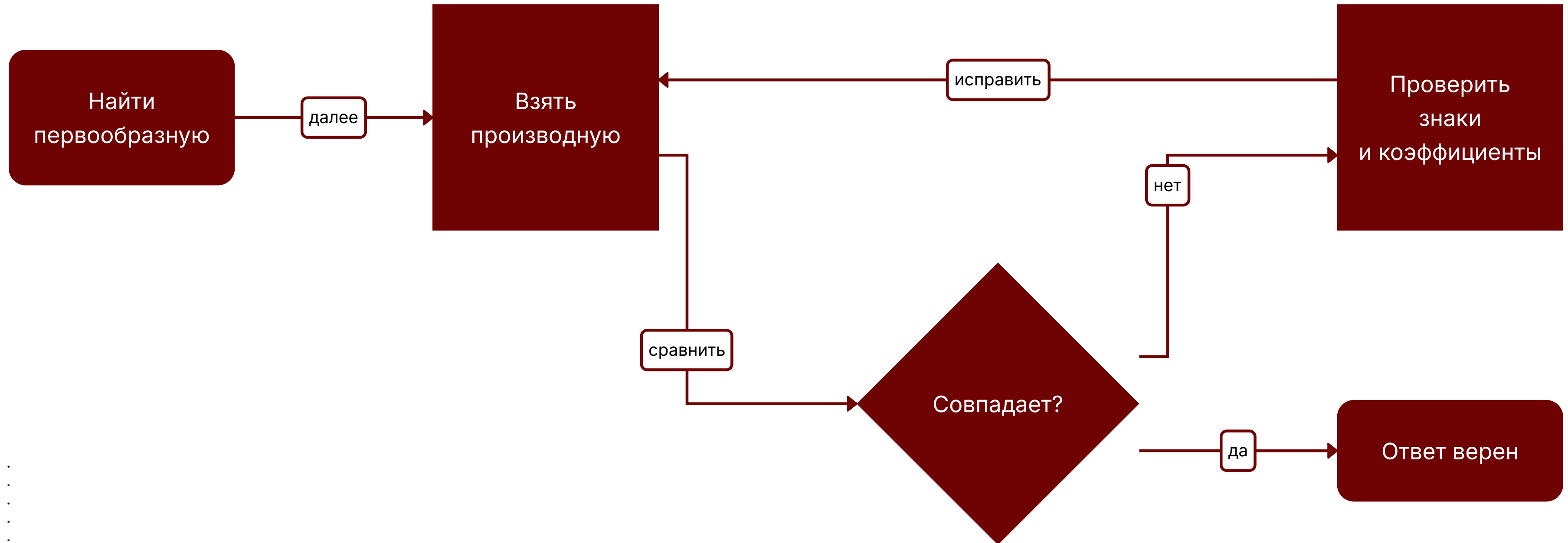
4. Смысл графиков

График скорости и график пути демонстрируют накопление изменения во времени. Чем больше площадь под кривой скорости, тем больше пройденный путь за промежуток.



Проверка найденной первообразной

Алгоритм контроля ответа через дифференцирование и сравнение с исходным подынтегральным выражением.



Краткие исторические сведения о возникновении интеграла

XVII век: первые идеи

В работах учёных XVII века складывается представление об интегрировании как о способе восстановления величины по её изменению. Эти идеи возникают вместе с задачами механики и геометрии.

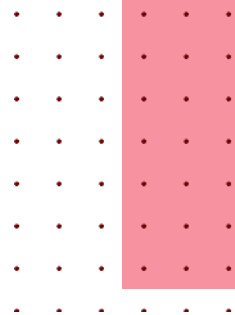
Лейбниц и обозначения

Готфрид Вильгельм Лейбниц ввёл удобную символику $\int$ и dx , которая закрепилась в математике. Благодаря этому интеграл стал частью единого языка математического анализа.

Ньютон и задачи движения

Исаак Ньютон связывал интегральные методы с описанием движения, скорости и ускорения. Его подход показывал, что анализ помогает решать реальные физические задачи.

Примеры для закрепления формул

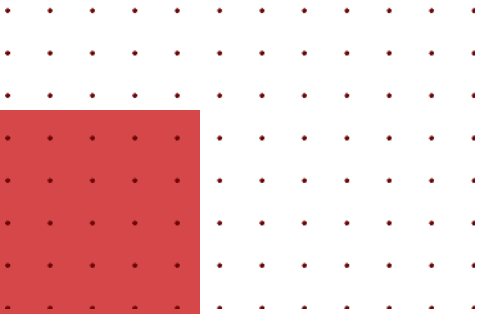


Небольшой набор типовых примеров помогает быстро узнать стандартную форму и выбрать верное правило интегрирования.

Примеры показывают действие степенного правила, логарифмической формулы, тригонометрических интегралов и вынесения постоянного множителя.

Выражение	Первообразная
$5x^4$	$x^5 + C$
$1/(2x)$	$(1/2)\ln x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$e^{(3x)}$	$(1/3)e^{(3x)} + C$
7	$7x + C$
$3/x^2$	$-3/x + C$

Школьные табличные формулы неопределённого интеграла



Неопределённый интеграл: главное в одной теме

Неопределённый интеграл объединяет идею первообразной, табличные формулы и несколько универсальных приёмов вычисления. Умение выбирать метод и проверять ответ делает эту тему базой для дальнейшего изучения анализа и прикладных задач.