

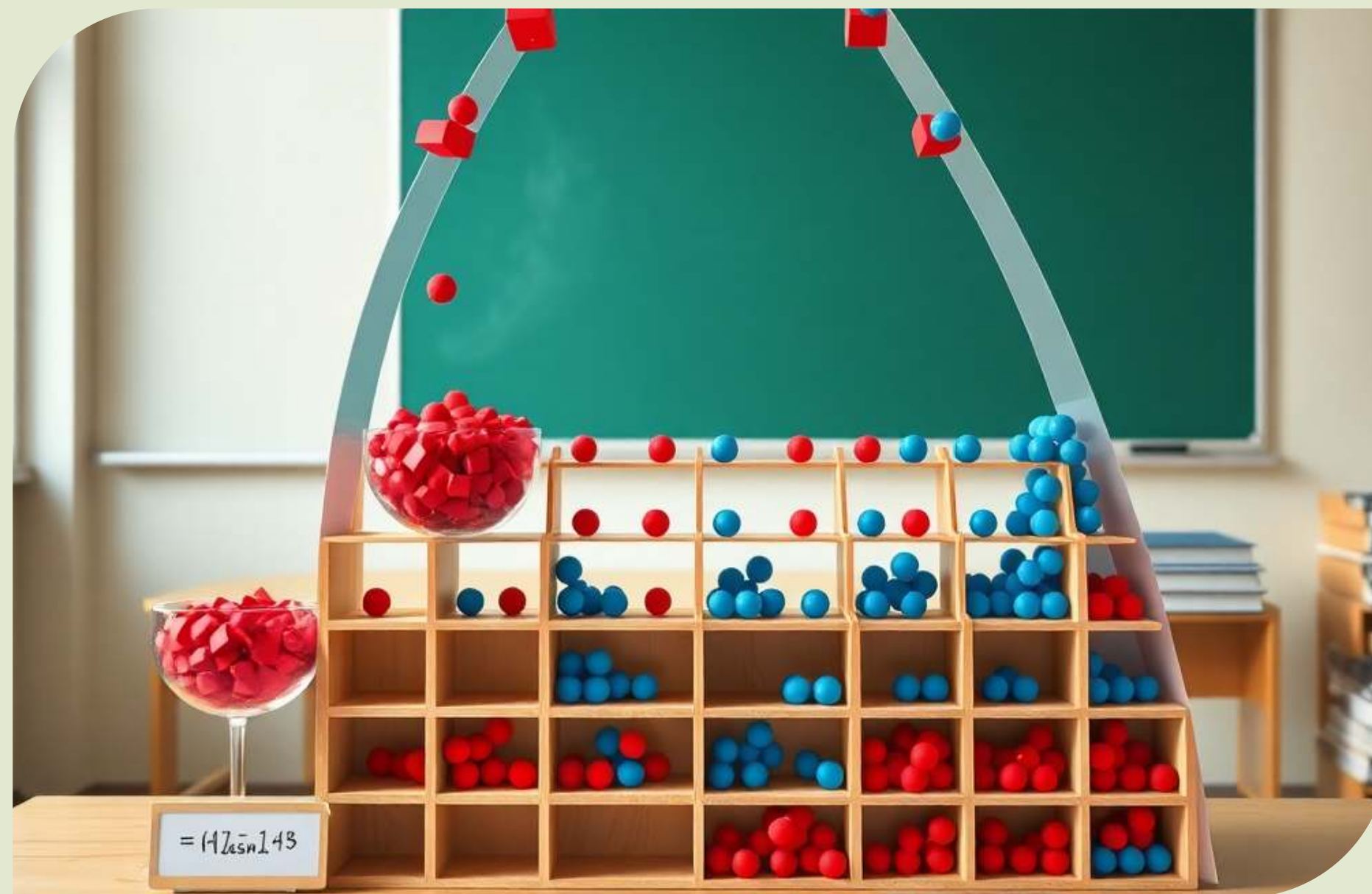


# Формула бинома Ньютона: разложение степени суммы и его смысл

Одна формула раскрывает всю структуру степени суммы.

# Как одна формула связывает алгебру и подсчёт вариантов

Формула Ньютона обобщает раскрытие скобок для любого натурального показателя и естественно входит в школьную алгебру 11 класса. Она соединяет степени, сочетания, треугольник Паскаля и элементы теории вероятностей в одном компактном правиле.





# $n+1$

слагаемых содержит разложение степени суммы.

Число членов в разложении равно этому значению, а их показатели всегда в сумме дают  $n$ .

Школьный курс алгебры; биномиальная формула

# Первые разложения и закономерность коэффициентов

| n | Разложение                              | Коеф.         |
|---|-----------------------------------------|---------------|
| 2 | $a^2+2ab+b^2$                           | 1,2,1         |
| 3 | $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$                   | 1,3,3,1       |
| 4 | $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$           | 1,4,6,4,1     |
| 5 | $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ | 1,5,10,10,5,1 |

Строки коэффициентов симметричны и совпадают с треугольником Паскаля.

Таблица показывает, как меняются коэффициенты и как быстро проявляется симметрия разложения.

Стандартные разложения бинома  
Ньютона

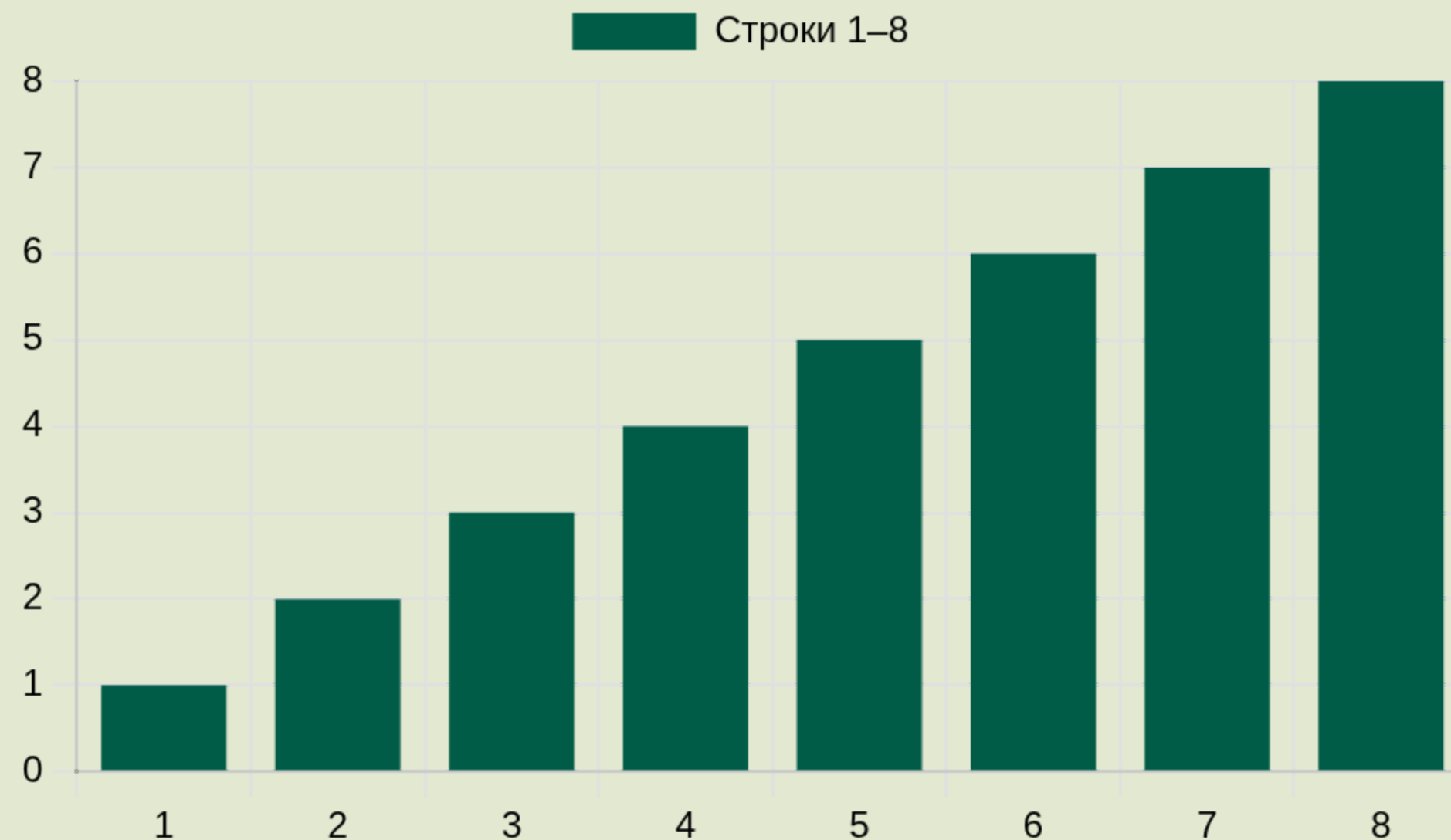
# Как строится разложение по формуле Ньютона

Алгоритм раскрытия скобок для выражения вида  $(a+b)^n$

# Треугольник Паскаля как источник биномиальных коэффициентов

Каждая новая строка строится по одному правилу сложения соседних чисел, поэтому коэффициенты можно получать без факториалов.

Треугольник Паскаля, строки 1–8



Крайние значения всегда равны 1, а внутренняя часть строки быстро растёт к центру.

# Связь формулы с треугольником Паскаля



## Строка задаёт разложение

Каждая строка треугольника Паскаля превращается в коэффициенты конкретной степени суммы. Например, строка 1, 5, 10, 10, 5, 1 сразу подсказывает разложение для пятой степени, не требуя полного перемножения скобок.



## Симметрия видна сразу

Если строку читать с краёв к центру, а затем обратно, числа совпадают попарно. Это наглядно показывает равенство  $C(n, k) = C(n, n-k)$  и помогает быстро находить нужный коэффициент по положению в строке.

# Частные случаи для $n=2, 3$ и $4$

## 1 Вторая степень

Разложение  $(a+b)^2$  даёт первый нетривиальный пример бинома Ньютона:  $a^2+2ab+b^2$ . Оно удобно для проверки вычислений и показывает появление среднего коэффициента 2.

## 2 Третья степень

Для  $(a+b)^3$  получаем  $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ . Здесь особенно заметна симметрия коэффициентов и переход от одного смешанного члена к двум.

## 3 Четвёртая степень

Разложение  $(a+b)^4$  приводит к  $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ . Центральный коэффициент 6 уже показывает, как быстро растут значения в середине строки Паскаля.



# Свойства биномиальных коэффициентов

Эти свойства позволяют находить коэффициенты быстро и без полного разложения выражения.

## Свойства биномиальных коэффициентов

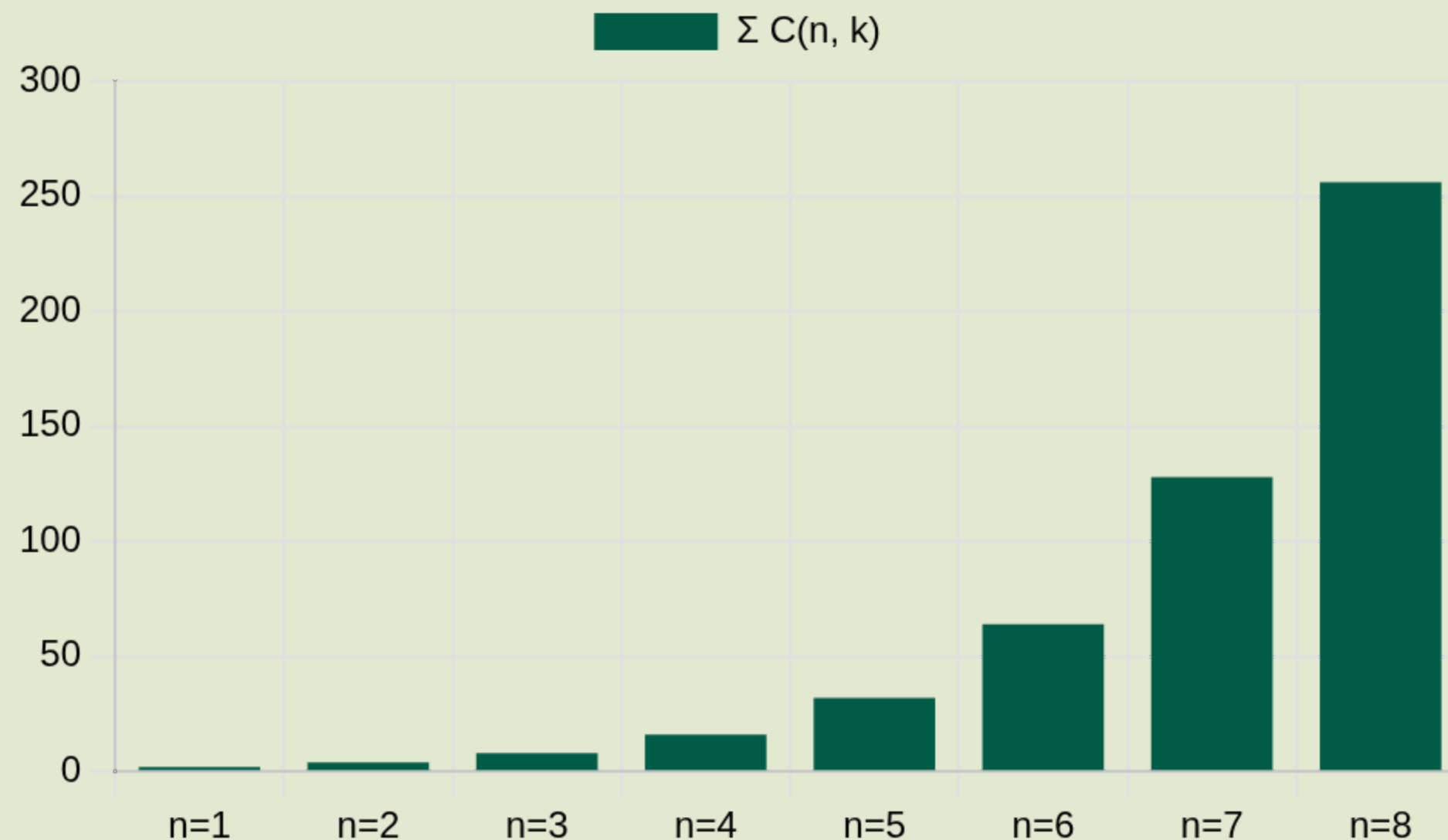
| Свойство  | Формула                    | Смысл           |
|-----------|----------------------------|-----------------|
| Крайние   | $C(n, 0)=C(n, n)=1$        | Начало и конец  |
| У краёв   | $C(n, 1)=C(n, n-1)=n$      | Выбор одного    |
| Симметрия | $C(n, k)=C(n, n-k)$        | Парные значения |
| Сумма     | $\sum_{k=0}^n C(n, k)=2^n$ | Всего вариантов |

Биномиальные коэффициенты образуют симметричную структуру, где сумма всех элементов строки равна степени двойки.

# Рост суммы коэффициентов при увеличении $n$

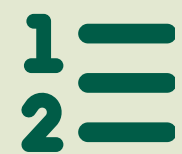
Сумма коэффициентов каждой строки совпадает с количеством всех возможных выборов между  $a$  и  $b$  в  $n$  скобках.

Тождество  $\sum C(n, k) = 2^n$



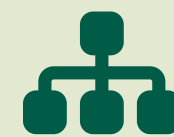
Закон  $2^n$  показывает экспоненциальный рост числа комбинаций и объясняет быстрый подъём центральных коэффициентов.

# Комбинаторный смысл коэффициента $C(n, k)$



## Выбор позиций

Коэффициент  $C(n, k)$  показывает, сколько способов выбрать ровно  $k$  скобок из  $n$ , в которых берётся  $b$ , если в остальных выбирается  $a$ . Каждый выбор даёт один член разложения.



## Перебор вариантов

При раскрытии  $(a+b)^n$  не нужно перечислять все произведения вручную: коэффициент сразу учитывает число одинаковых по виду случаев. Это сокращает вычисления и делает запись компактной.



## Связь с сочетаниями

По смыслу  $C(n, k)$  совпадает с числом сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ . Поэтому биномиальные коэффициенты естественно возникают в задачах на выбор, подсчёт и сравнение вариантов.



## Вероятностная интерпретация

В вероятностных моделях тот же коэффициент описывает число способов получить  $k$  успехов в  $n$  испытаниях. Формула бинома Ньютона здесь становится инструментом подсчёта вероятностей.

# Алгоритм раскрытия скобок по биному Ньютона

Последовательность шагов для выражения вида  $(a+b)^n$

# Пример полного разложения: $(x+2)^4$

01

## Берём строку Паскаля

Для  $n=4$  используются коэффициенты 1, 4, 6, 4, 1. Они определяют структуру разложения и показывают, сколько слагаемых будет в итоге после раскрытия скобок.

02

## Подставляем степени

Степени  $x$  убывают от 4 до 0, а степени числа 2 возрастают от 0 до 4. Каждый член строится как произведение коэффициента, степени  $x$  и соответствующей степени 2.

03

## Собираем выражение

Получаем  $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$ . Видно, что каждый коэффициент возникает из произведения биномиального коэффициента на подходящую степень второго слагаемого.

04

## Проверяем результат

Разложение удобно сверять по структуре: сумма степеней  $x$  и 2 в каждом члене равна 4, а коэффициенты образуют симметричную последовательность.



# Коэффициенты разложения для $n=8$

Строка для  $n=8$  особенно хорошо показывает, как быстро растут средние коэффициенты по сравнению с крайними значениями.

Треугольник Паскаля, строка  $n=8$



Центр строки заметно доминирует, а симметрия подтверждает равенство коэффициентов на одинаковом расстоянии от краёв.

# Связь формулы с вероятностью и биномиальным распределением



## Два исхода

Если у каждого испытания есть только успех и неудача, то именно биномиальная схема описывает все возможные результаты серии. Формула  $(p+q)^n$  служит её алгебраической моделью.



## Вероятность варианта

Множитель  $p^k q^{n-k}$  задаёт вероятность одного конкретного набора из  $k$  успехов и  $n-k$  неудач. Умножение на  $C(n, k)$  даёт итоговую вероятность события.



## Число способов

Коэффициент  $C(n, k)$  показывает, сколькими способами можно выбрать  $k$  успешных испытаний из  $n$ . Это число учитывает только расположение успехов, а не порядок внутри одинаковых исходов.



## Практический смысл

Такая запись полезна в задачах на серии подбрасываний, контроль качества и простые модели случайных процессов. Она позволяет получать ответ без полного перебора всех исходов.

# Алгебраическая запись и комбинаторный смысл

| Элемент         | Смысл         | Пример            |
|-----------------|---------------|-------------------|
| $C(n, k)$       | число выборов | $C(5,2)=10$       |
| $a^{n-k}b^k$    | один вариант  | $a^3b^2$          |
| $\Sigma$ по $k$ | все случаи    | полное разложение |
| симметрия       | равные выборы | $C(5,2)=C(5,3)$   |

Одна и та же запись работает и как алгебраическое правило, и как способ подсчёта вариантов. Это делает формулу удобной для задач на выбор и перечисление.

Сопоставление элементов формулы с их комбинаторной интерпретацией помогает понимать, откуда берётся каждый член разложения.

Свойства биномиальных коэффициентов и формула Ньютона

# Типичные ошибки при работе с формулой

## 1 Порядок степеней

Часто путают, как убывает степень первого слагаемого и как возрастает степень второго. В правильном члене сумма показателей всегда равна  $n$ , поэтому структура должна быть строго согласована.

## 2 Пропуск коэффициентов

Иногда при записи разложения теряется один из членов или один коэффициент. Это нарушает симметрию строки и сразу приводит к неверному результату, особенно при больших  $n$ .

## 3 Ошибка в знаках

Для  $(a-b)^n$  знаки чередуются, а не остаются одинаковыми. Если не учитывать чётность номера члена, легко получить разложение, которое не соответствует исходному выражению.

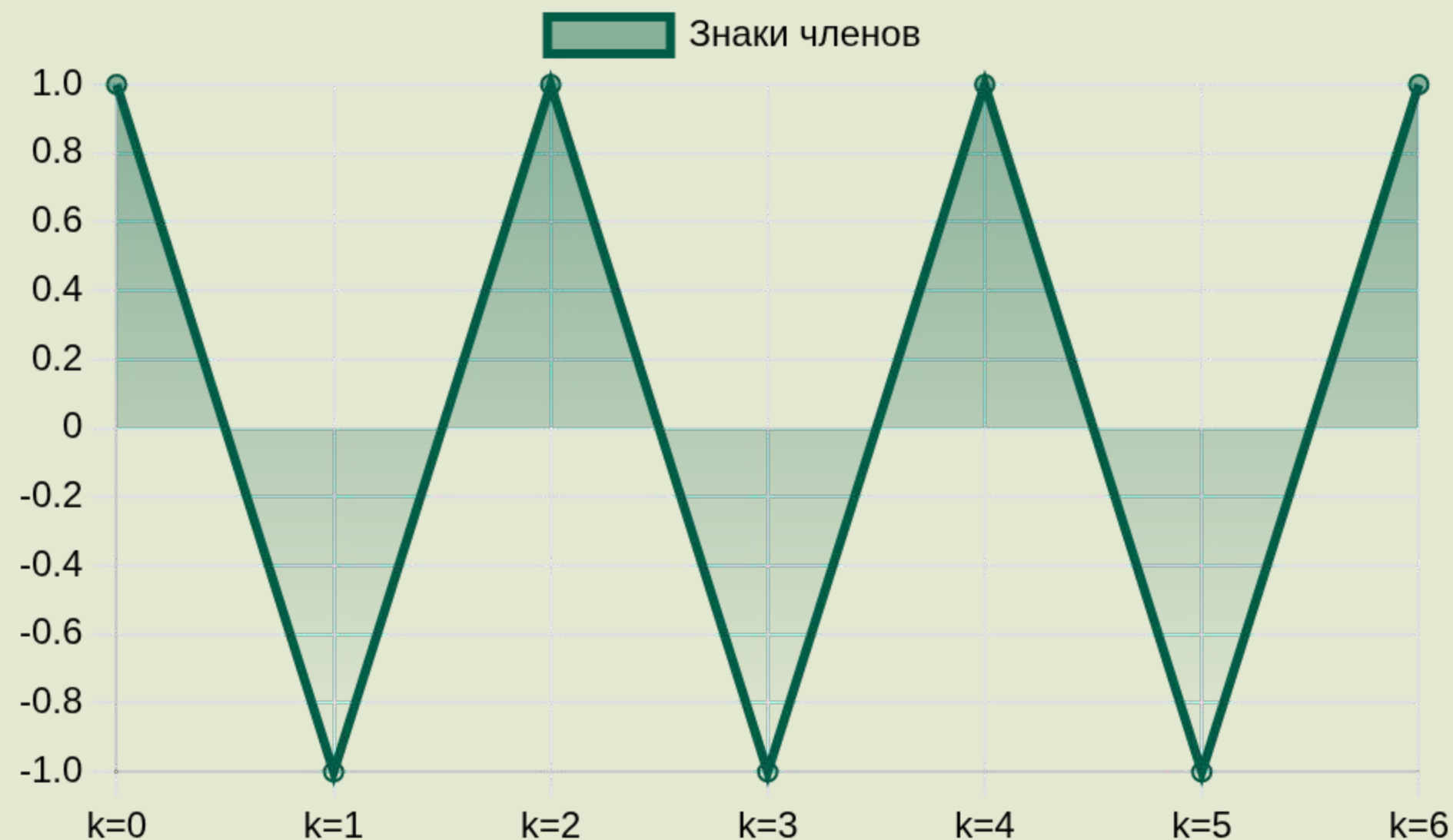
## 4 Неверный выбор формулы

Ещё одна ошибка связана с факториалами и вычислением  $C(n, k)$ . Нужно внимательно проверять значения  $n$  и  $k$ , иначе даже верная схема даёт неправильный числовой ответ.

# Разложение $(a-b)^n$ и чередование знаков

Абсолютные значения коэффициентов совпадают с разложением  $(a+b)^n$ ; меняется только знак, определяемый номером члена.

Правило знаков в формуле бинома Ньютона



Чередование знаков делает разложение для разности предсказуемым: положительные и отрицательные члены идут строго по порядку, сохраняя биномиальную структуру.

# Практические применения формулы в алгебре и вне её



## Быстрое раскрытие скобок

В алгебре формула помогает сразу записать результат без громоздкого перемножения множителей. Это особенно удобно, когда степень велика и ручное раскрытие скобок становится слишком длинным.



## Поиск нужного коэффициента

Нередко требуется найти только один член многочлена, например коэффициент при заданной степени. Формула позволяет сделать это напрямую, не выписывая все остальные слагаемые, что экономит время на экзамене.



## Приближения и вероятности

Первые члены разложения используют для оценок, когда одна переменная мала. В вероятностных задачах та же структура описывает распределение успехов в серии независимых испытаний и помогает строить модели.



# Формула, которая связывает разные разделы математики

Формула бинома Ньютона показывает, как одно алгебраическое правило соединяет раскрытие скобок, сочетания, треугольник Паскаля и вероятностные модели. Именно в этом заключается её особая математическая сила.

