



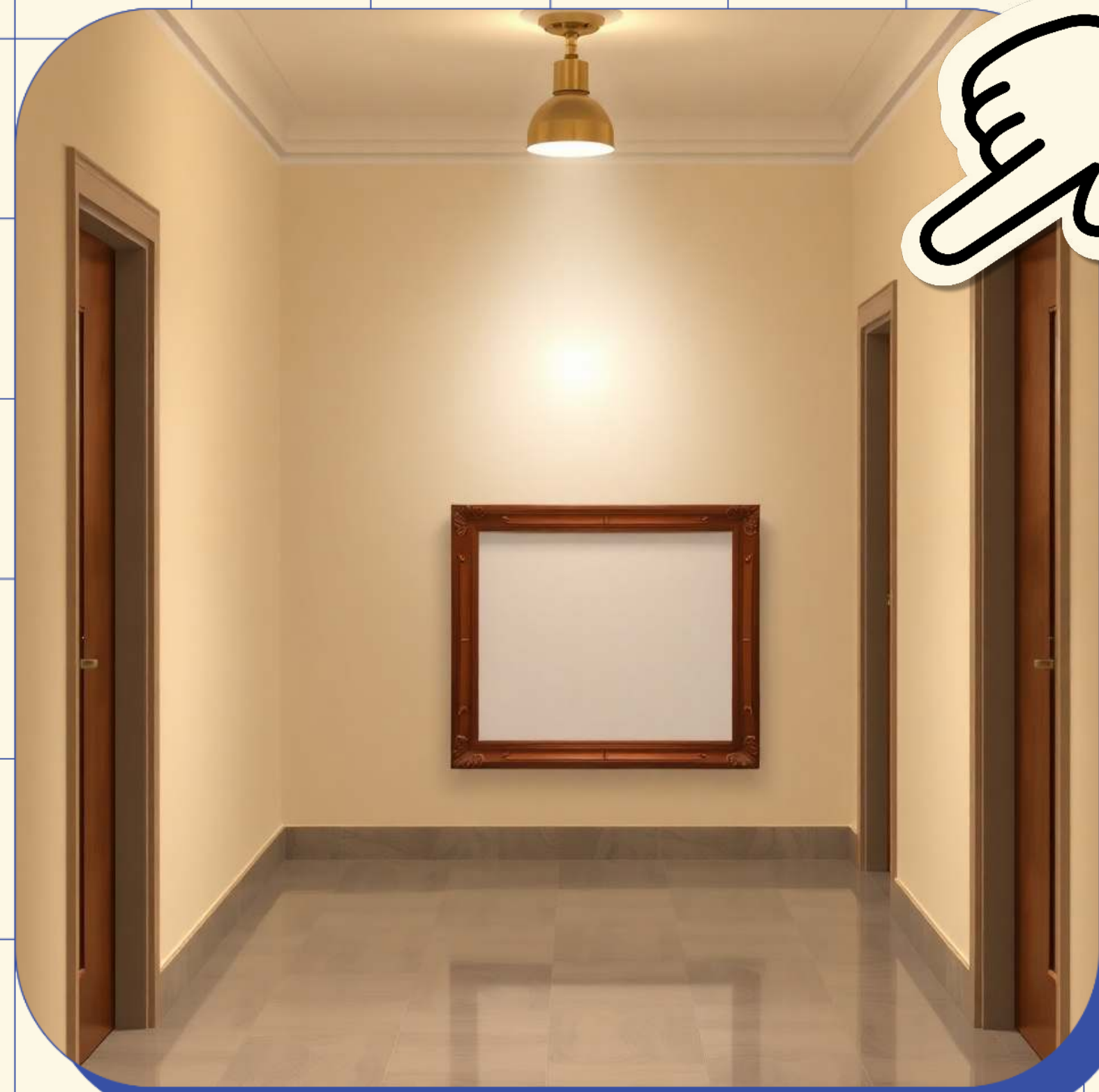
Гомотетия как преобразование фигур в алгебре и геометрии

Фигура сохраняет форму, но меняет размер относительно центра.



Гомотетия: зачем она нужна в 8 классе

Гомотетия помогает увидеть связь геометрии с пропорциями, масштабом и подобием фигур. Она объясняет, как увеличиваются и уменьшаются объекты, и почему площади изменяются быстрее длины.



Как устроена гомотетия на рисунке

Неподвижный центр

Точка O остаётся на месте и служит опорой для всего преобразования. Все новые точки строятся относительно неё, поэтому именно центр задаёт направление и расположение образа.

Положение точки

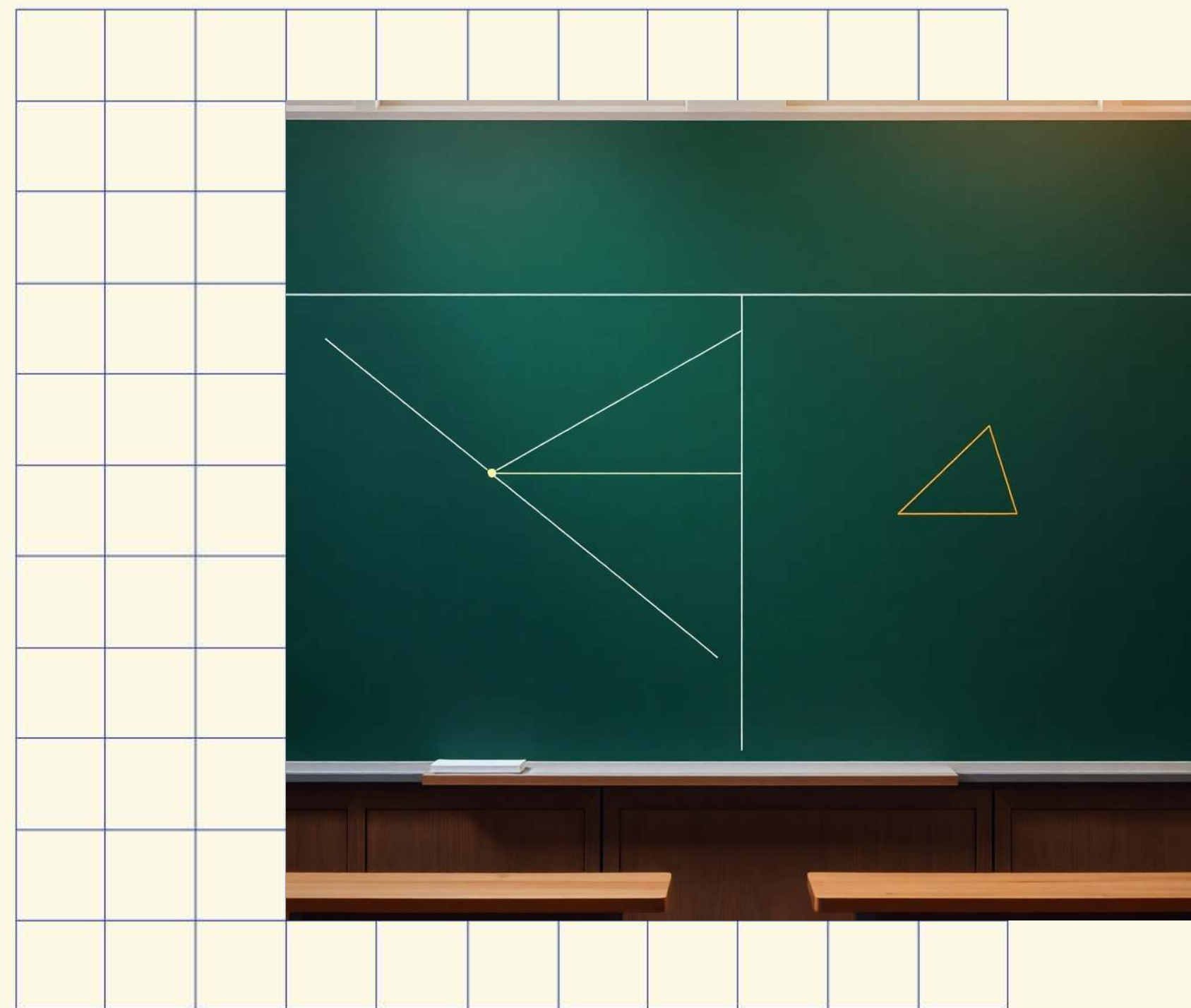
Если коэффициент положительный, точка A переходит на луч OA . При отрицательном коэффициенте образ оказывается на противоположном луче, по другую сторону от центра.

Изменение расстояния

Расстояние до образа равно модулю коэффициента, умноженному на исходное расстояние: $OA' = |k| \cdot OA$. Это позволяет точно строить новые точки без угадывания.

Что показать на рисунке

На схеме удобно изобразить центр O , несколько лучей, исходную фигуру и её уменьшенный или увеличенный образ. Так легко увидеть, как работает правило для каждой вершины.



Значения коэффициента гомотетии и результат преобразования

Таблица показывает, как знак и модуль коэффициента влияют на размер и расположение образа.

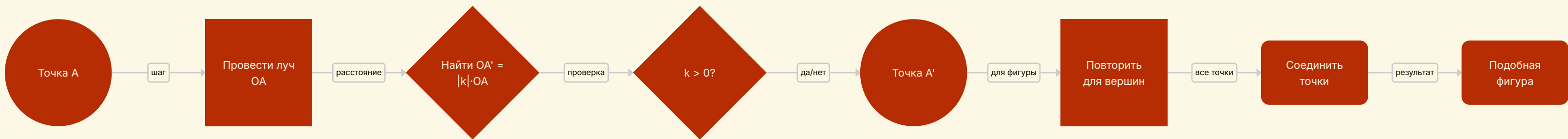
Модуль коэффициента отвечает за изменение размера, а знак определяет, по какую сторону от центра окажется образ.

Правила гомотетии: $|k|$ задаёт масштаб, знак k — расположение образа относительно центра.

k	Результат										Пример				
2	увеличение										в 2 раза				
1/2	уменьшение										в 2 раза				
-2	по другую сторону										в 2 раза				

Построение образа точки и фигуры при гомотетии

Пошаговое построение по центру O и коэффициенту k .



k^2

именно во столько раз
меняется площадь
фигуры

Линейные размеры меняются по модулю коэффициента, поэтому площадь растёт или уменьшается ещё заметнее. Например, при $k = 3$ площадь становится в девять раз больше.

Свойства гомотетии: изменение длины в $|k|$ раз, площади — в k^2 раз.



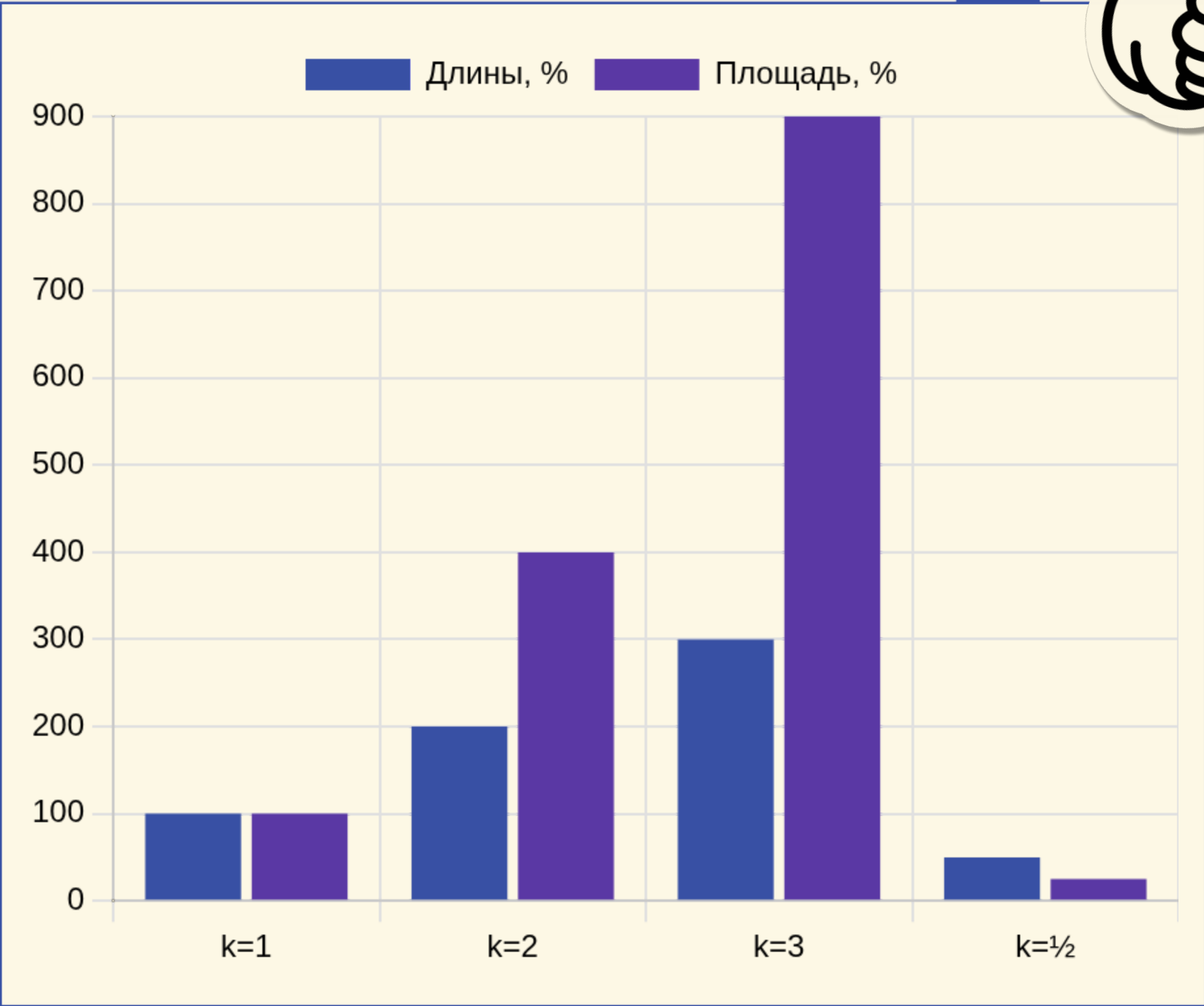
Как меняются длины и площадь при разных коэффициентах



По диаграмме видно, что одинаковый коэффициент по-разному влияет на длины и площадь. Это помогает быстро оценивать результат без сложных вычислений.

Площадь зависит от квадрата коэффициента, поэтому при увеличении фигуры она растёт заметно быстрее длин.

Расчёт по формулам: длины — $|k|$, площадь — k^2 .



Гомотетия и подобие фигур

Одинаковая форма

Любая гомотетия сохраняет общий вид фигуры: треугольник остаётся треугольником, квадрат — квадратом. Меняется только размер и, при отрицательном коэффициенте, расположение относительно центра.

Равные углы

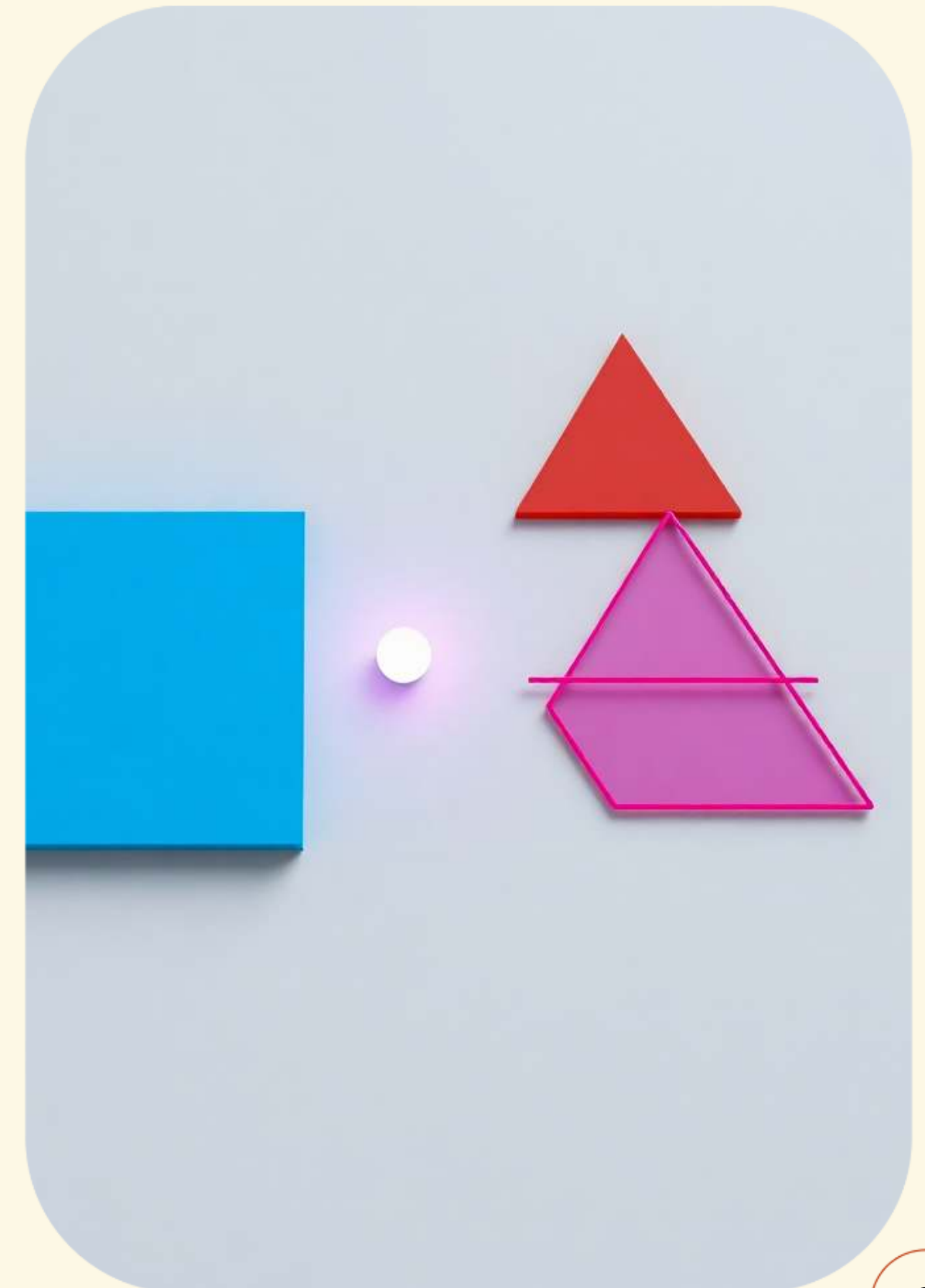
Соответствующие углы после преобразования остаются равными. Это важный признак подобия, который позволяет сравнивать фигуры даже тогда, когда они выглядят совсем разного размера.

Пропорциональные стороны

Соответствующие стороны изменяются одинаково, поэтому их отношения сохраняются. Благодаря этому можно находить неизвестные длины в задачах на подобие, чертежи и масштаб.

Практическое применение

Свойство используют на картах, планах зданий, в моделях и схемах. Если фигура получена только изменением размера относительно центра, она обязательно подобна исходной.



Гомотетия в окружающей жизни



Карта как уменьшенная модель

На карте расстояния сокращены, но расположение объектов остаётся узнаваемым. Один сантиметр может обозначать километр или несколько километров на местности, поэтому карта работает как точная уменьшенная копия территории.



Экран, который умеет масштабировать

При увеличении изображения на телефоне или планшете форма значков и схем сохраняется, а размер меняется. Это удобно, когда нужно рассмотреть детали, не теряя общий вид объекта.



Макеты и модели вокруг нас

Архитектурные макеты, игрушки и детали для демонстрации создаются по тому же принципу. Они помогают показать объект в уменьшенном или увеличенном виде, сохраняя его пропорции и основные особенности.

Координатная запись гомотетии

1 Формула преобразования

Если центр гомотетии совпадает с началом координат, то каждая координата умножается на один и тот же коэффициент. Получаются формулы $x' = kx$ и $y' = ky$.

2 Как меняется точка

Точка $A(3; 4)$ при $k = 2$ переходит в $A'(6; 8)$, потому что обе координаты удваиваются. При $k = \frac{1}{2}$ получаем $A'(1,5; 2)$, то есть координаты уменьшаются вдвое.

3 Знак коэффициента

Положительный коэффициент сохраняет направление точки относительно центра, а отрицательный переносит образ на противоположную сторону. Поэтому меняется не только размер, но и расположение точки на координатной плоскости.

4 Что важно запомнить

Для координатной записи не нужны отдельные построения для каждой точки. Достаточно подставить значение k в формулы и аккуратно вычислить новые координаты, сохраняя порядок записи.



Примеры координатных образов точек

Таблица показывает, как одни и те же точки изменяются при разных коэффициентах гомотетии в координатной записи.

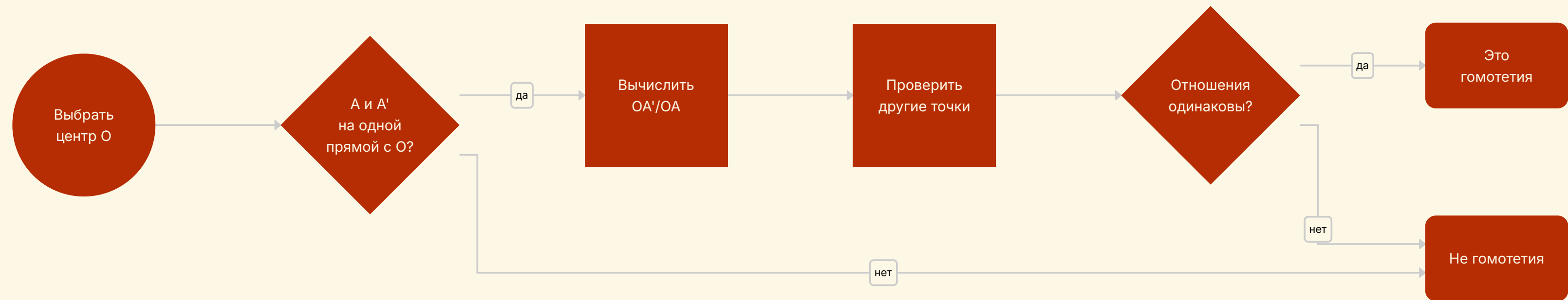
Один и тот же закон по-разному влияет на координаты: модуль k меняет масштаб, а отрицательный знак переносит точку на противоположную сторону центра.

Построено по формуле $x' = kx$, $y' = ky$ для центра в начале координат.

Точка	$k=2$	$k=1/2$	$k=-1$
A(1; 2)	(2; 4)	(0,5; 1)	(-1; -2)
B(-3; 1)	(-6; 2)	(-1,5; 0,5)	(3; -1)
C(4; -2)	(8; -4)	(2; -1)	(-4; 2)

Как проверить, что преобразование является гомотетией

Последовательность проверки по центру O и отношению расстояний OA'/OA .



Частые ошибки при изучении гомотетии

Путают с переносом

При параллельном переносе фигура просто сдвигается, а при гомотетии все её точки связаны с одним центром. Это принципиально разные преобразования, хотя рисунок может выглядеть похоже.

Не учитывают знак k

Модуль коэффициента отвечает за увеличение или уменьшение, а знак показывает, по какую сторону от центра окажется образ. Если забыть про знак, построение получится неверным.

Смешивают вершины

После построения образов точек важно соединять их в том же порядке, что и в исходной фигуре. Иначе можно получить совсем другую ломаную или многоугольник.

Ждут сохранения длины

Гомотетия сохраняет форму и углы, но не размеры отрезков. Поэтому длины меняются, а вот пропорции соответствующих сторон остаются одинаковыми для всей фигуры.

Забывают про площадь

Площадь изменяется не в $|k|$ раз, а в k^2 раз. Это особенно важно в задачах, где нужно сравнить не только стороны, но и результат целиком.

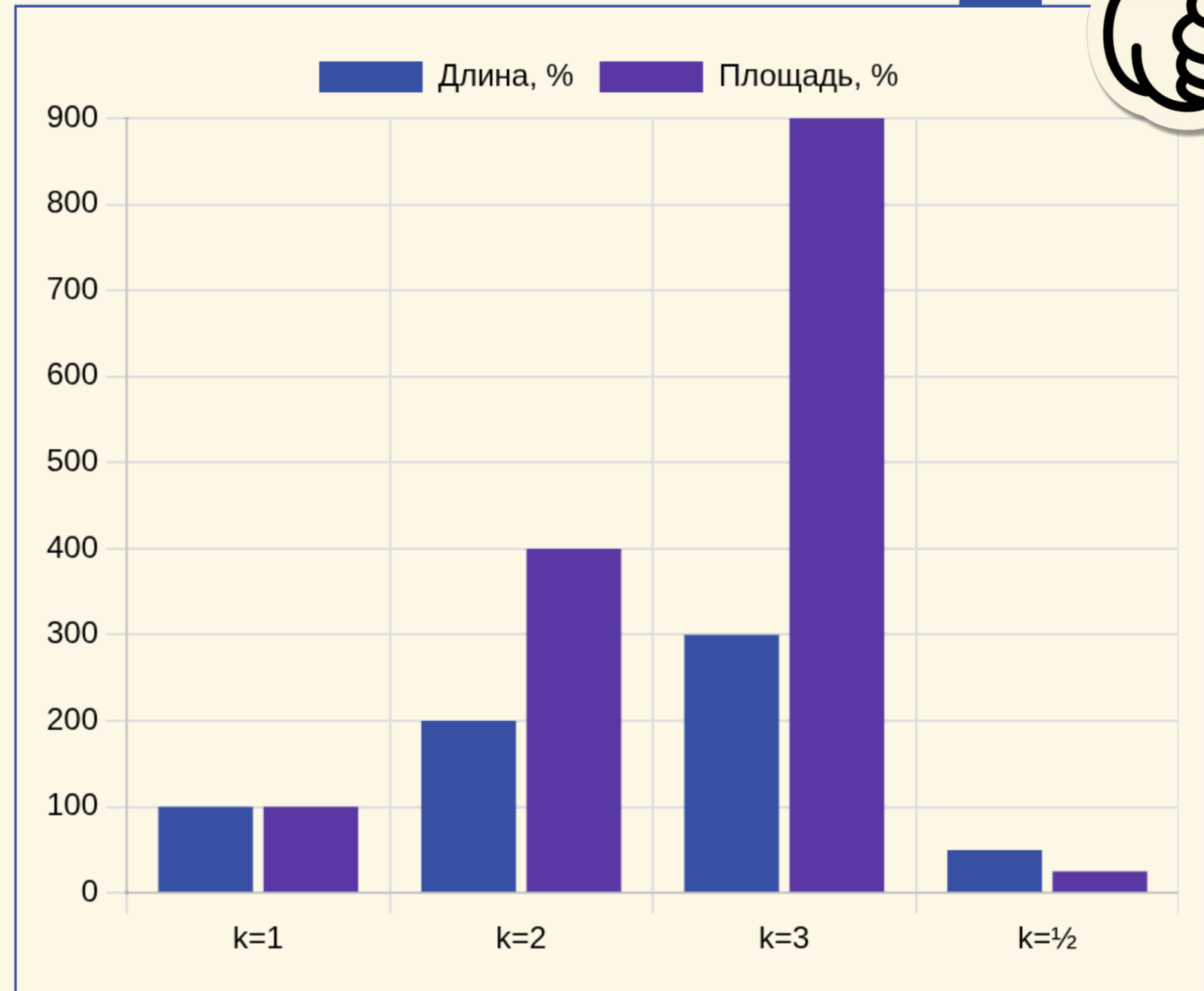
Гомотетия и масштаб в числовых задачах



На одном объекте удобно сравнивать, как масштаб влияет на линейные размеры и на площадь. Это помогает быстро оценивать результат без полного построения.

Площадь растёт быстрее длины, потому что зависит сразу от двух измерений. При уменьшении эффект тоже усиливается по квадрату коэффициента.

Иллюстративные значения по правилам гомотетии: длины — $|k|$, площади — k^2 .



Почему площадь изменяется по квадрату коэффициента

1 Одна сторона

Если сторона фигуры увеличилась в k раз, то и каждая соответствующая линейная величина становится в k раз больше. Это касается всех отрезков, участвующих в построении.

2 Два измерения

Площадь зависит сразу от длины и ширины. Поэтому при умножении обеих сторон на k новая площадь получается $k \cdot k$, то есть k^2 раз больше.

3 Проверка на примере

У квадрата со стороной 2 см площадь 4 см². Если сторону увеличить в 2 раза, получится квадрат со стороной 4 см и площадью 16 см².

4 Практический вывод

При $k=3$ площадь возрастает в 9 раз, а при $k=\frac{1}{2}$ уменьшается в 4 раза. Это удобно помнить при решении задач и сравнении моделей.

Гомотетия в орнаментах и узорах

Ритм и повтор

В орнаментах часто встречаются одинаковые элементы, но разного размера. Такой повтор создаёт чёткий ритм и помогает глазу воспринимать композицию как цельную и упорядоченную.

Сходство форм

Мозаики, витражи и декоративные узоры строятся на похожих фигурах, которые отличаются только масштабом. Благодаря этому композиция выглядит разнообразно, но не теряет единства.

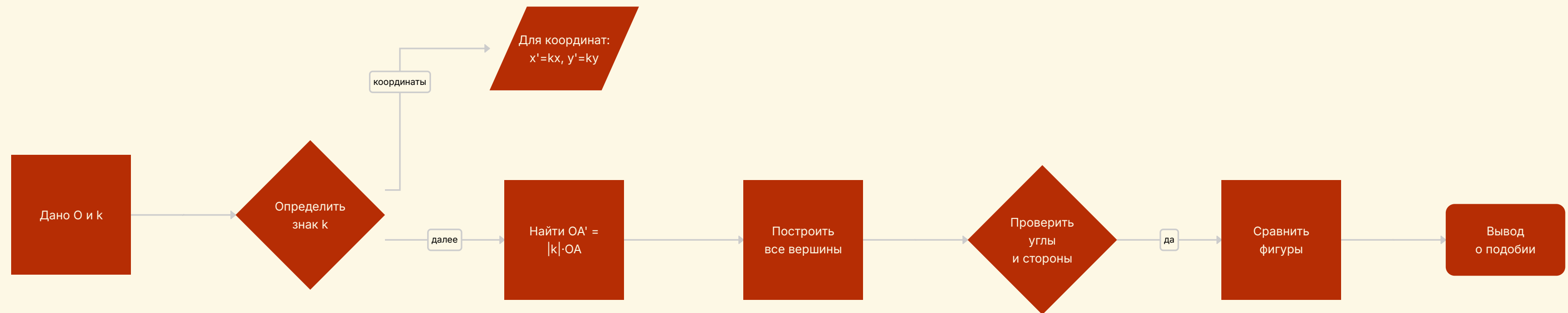
Связь с фракталами

Во многих фрактальных рисунках одна и та же форма повторяется на разных уровнях увеличения. Это хорошо показывает, как изменение масштаба сохраняет общий вид фигуры.

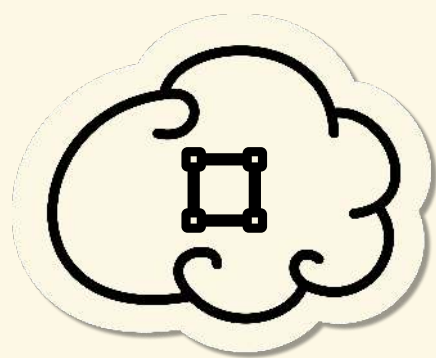


Алгоритм решения задач на гомотетию

Пошаговая схема: от данных о центре и коэффициенте к проверке результата.

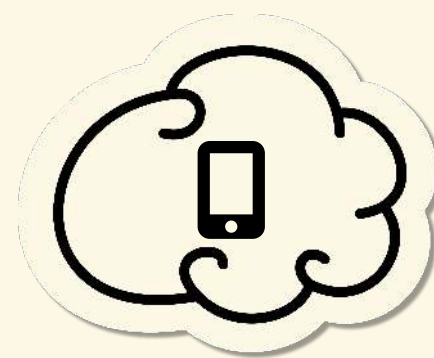


Гомотетия и компьютерная графика



Векторные изображения

Векторные рисунки можно увеличивать и уменьшать без потери чёткости, потому что они описываются линиями и формулами, а не отдельными точками изображения.



Масштаб на экране

Значки, схемы и карты на экранах устройств часто меняют размер пропорционально. Это похоже на гомотетию: форма остаётся прежней, а изображение становится больше или меньше.



Растровая графика

В растровом изображении увеличение может сделать картинку размытой, потому что она состоит из пикселей. Чем сильнее масштаб, тем заметнее становятся отдельные элементы.



Практическое применение

Карты, чертежи и простые анимации используют идею пропорционального изменения размеров. Это помогает сохранять узнаваемость объекта при разном масштабе отображения.

Сравнение гомотетии с другими преобразованиями

Таблица помогает увидеть, что именно сохраняется и что изменяется у разных преобразований фигур.

Гомотетия отличается тем, что сохраняет не все размеры, а только форму и пропорции. Именно поэтому она тесно связана с подобием фигур.

Сводка свойств школьных геометрических преобразований.

Преобразование	Сохраняется				Меняется										
Перенос	длины, углы				положение										
Поворот	расстояния, углы				ориентация										
Отражение	длины, углы				расположение										
Гомотетия	форма, углы				размер, площадь										



Гомотетия: форма остаётся, масштаб меняется

Гомотетия показывает, как можно изменить размер фигуры, не нарушая её формы. Она помогает понимать подобие, масштаб, координаты и реальные модели в учебных и практических задачах.

