

Функция $y = x^2$ и её график

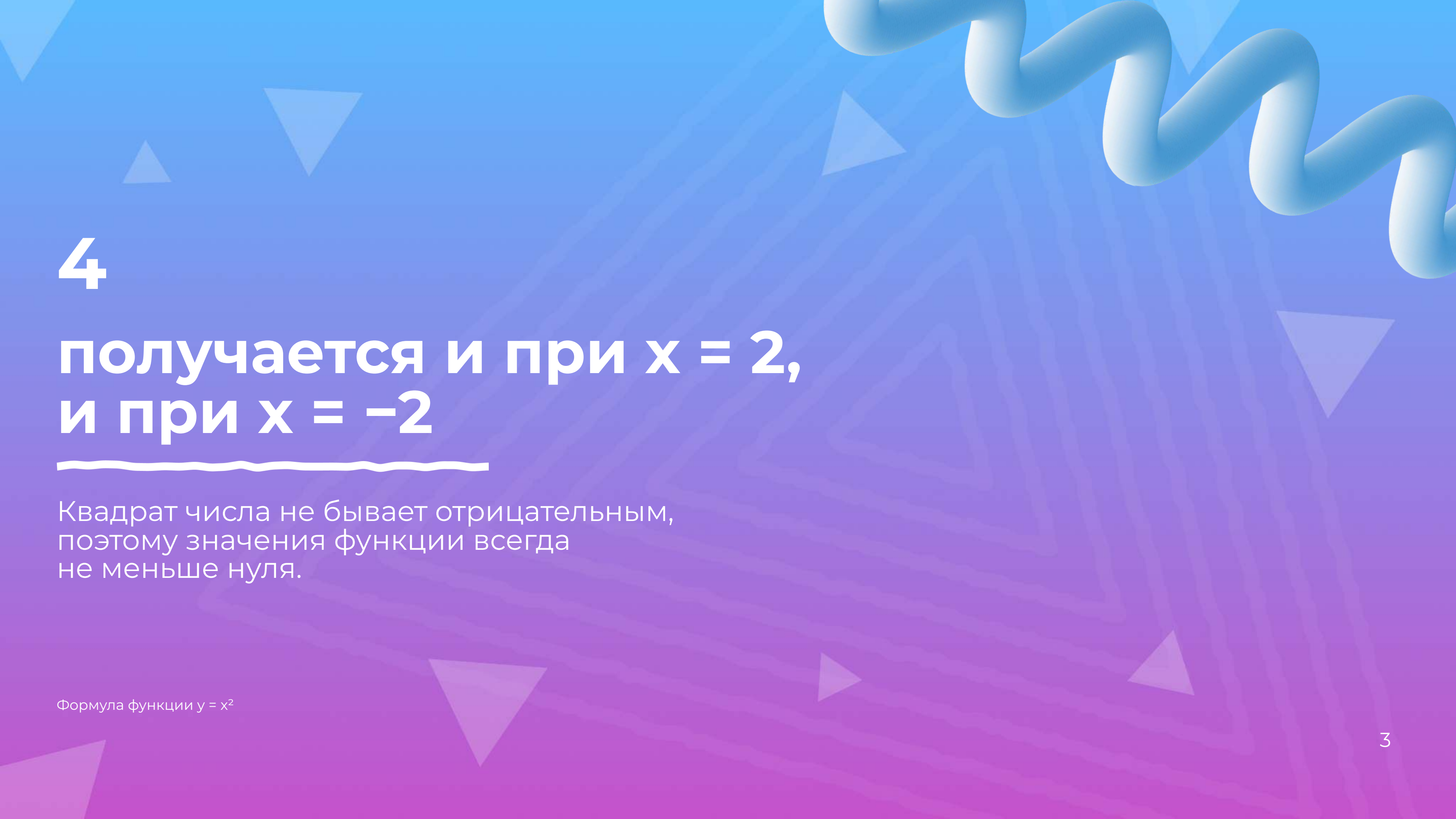
Изучаем параболу, формулу и свойства функции $y = x^2$.



Зачем изучать $y = x^2$ в 8 классе

Квадрат числа нужен в геометрии, физике и повседневных расчётах. Эта функция учит строить таблицы, читать графики и видеть симметрию на координатной плоскости.





4

получается и при $x = 2$,
и при $x = -2$

Квадрат числа не бывает отрицательным,
поэтому значения функции всегда
не меньше нуля.

Формула функции $y = x^2$

Таблица значений функции

Значения получены прямым вычислением по формуле $y = x^2$.

x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Вычисления по формуле $y = x^2$

При удалении x от нуля значения y растут всё быстрее, а одинаковые по модулю числа дают одинаковый результат.

Точки на координатной плоскости

Точки по таблице

Каждая пара чисел из таблицы задаёт точку: например, $(-3; 9)$ или $(2; 4)$. Так формула превращается в изображение на плоскости.

Начало координат

Точка $(0; 0)$ лежит на графике и показывает, что функция проходит через начало координат. Это самая нижняя точка параболы.

Левая и правая часть

Точки справа и слева от оси Oy располагаются зеркально. Поэтому график выглядит одинаково в обе стороны от нуля.



Плавная линия

Отмеченные точки нельзя соединять ломаной. Их нужно объединить плавной линией, чтобы получить настоящий график квадратичной функции.

Расположение графика

Вся парабола находится выше оси Ox , кроме одной точки в начале координат. Ниже этой оси значения функции не опускаются.

Как построить график $y = x^2$

Последовательность построения по формуле и таблице значений



Почему график симметричен

01

Замена на противоположное число

Если вместо x подставить $-x$, квадрат не изменится: $(-x)^2 = x^2$. Поэтому для каждого значения справа от нуля есть такое же слева.

02

Одинаковые значения y

Числа 3 и -3 дают один и тот же результат, как и 2 и -2 . Значит, важен не знак, а расстояние до нуля.

03

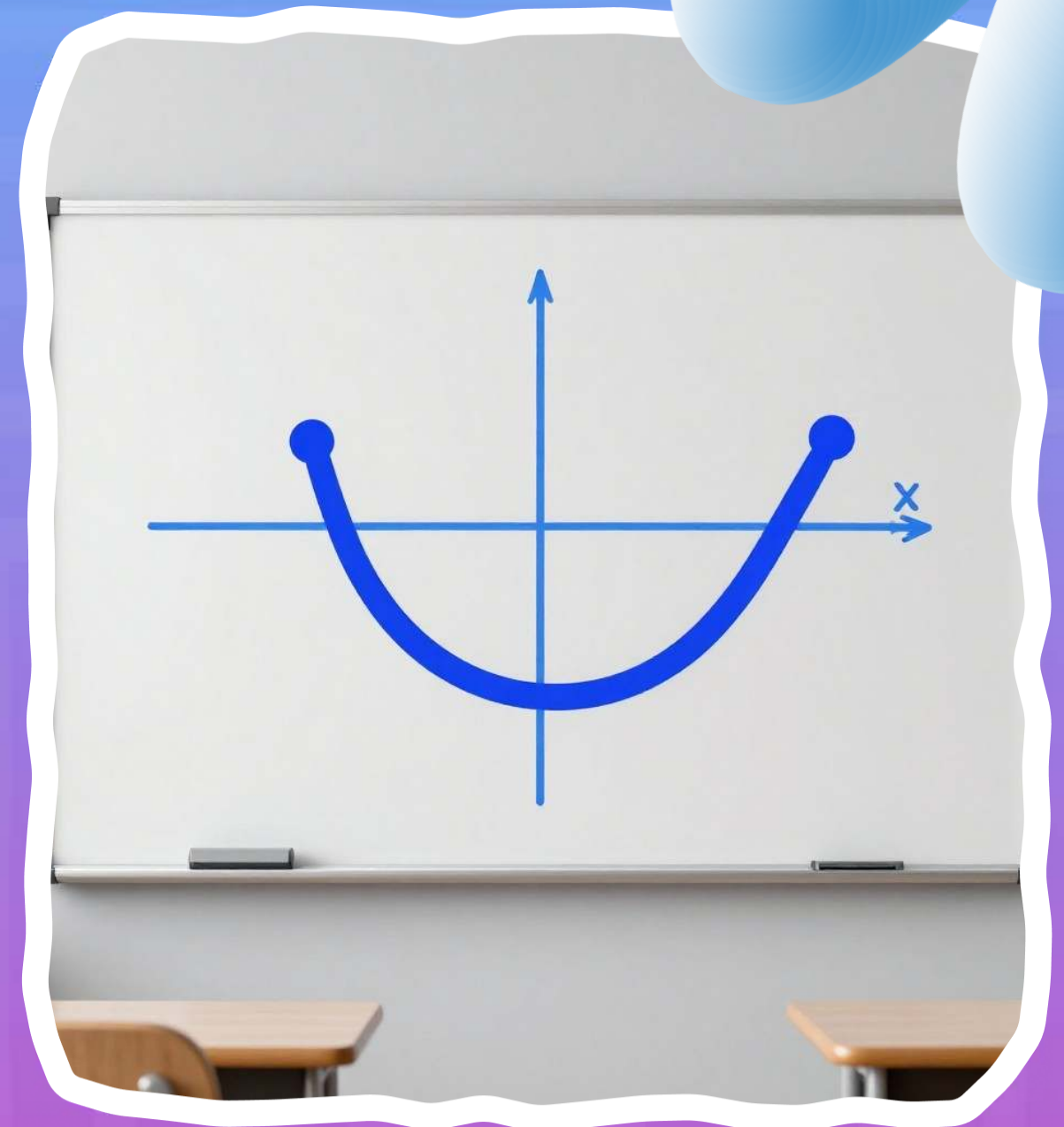
Ось симметрии

График делится на две одинаковые части прямой $x = 0$. Эта прямая совпадает с осью Oy и служит осью симметрии параболы.

04

Зеркальное расположение точек

Если точка с координатой x есть на графике, то рядом обязательно есть точка с координатой $-x$. Их значения y совпадают.



Как быстро растут значения функции



Вычисления по формуле $y = x^2$

При увеличении x на единицу значения растут всё заметнее: каждый следующий шаг добавляет больше, чем предыдущий.

Квадратичная зависимость ускоряется, поэтому её график растёт быстрее линейного.

0
достигается при $x = 0$
и задаёт вершину
графика

Это наименьшее значение функции $y = x^2$;
ниже график уже не опускается.

Область определения и область значений

01

Любое число для x

В качестве аргумента можно взять любое действительное число: положительное, отрицательное, целое или дробное. Возводить в квадрат можно любое из них без ограничений.

02

Только неотрицательные y

Результат вычисления всегда не меньше нуля. Поэтому область значений функции состоит из чисел y , для которых выполняется условие $y \geq 0$.

03

Ноль функции

Уравнение $x^2 = 0$ имеет единственное решение $x = 0$. Значит, ноль функции один, и он совпадает с началом координат.

04

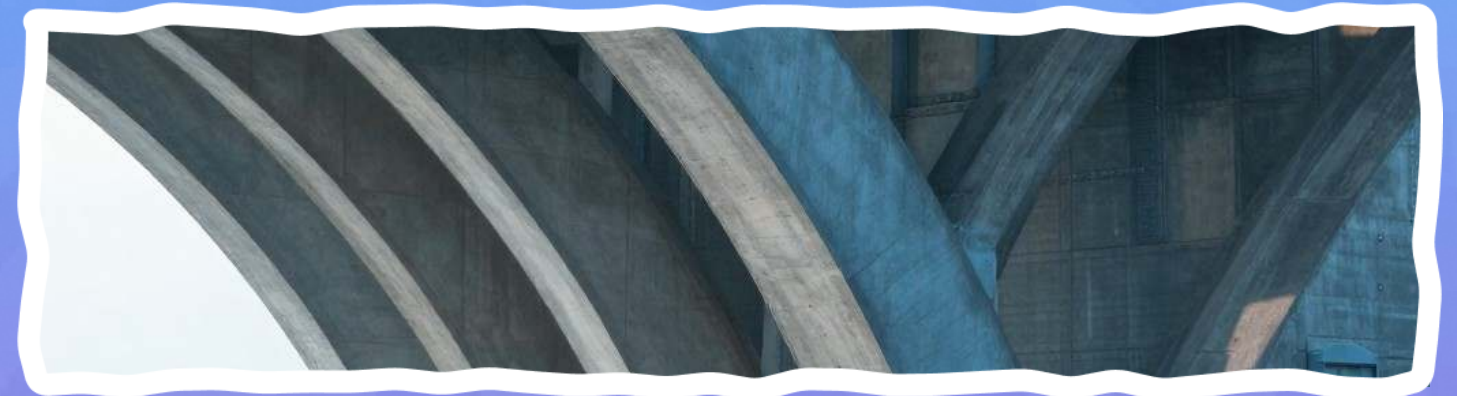
Отрицательных значений нет

Если на графике получено число ниже оси Ox , это ошибка. Для функции $y = x^2$ такие значения невозможны, потому что квадрат любого числа неотрицателен.

Форма параболы вокруг нас

Арки и опоры

Если внимательно посмотреть на мосты и некоторые архитектурные конструкции, можно заметить плавный изгиб, похожий на параболу. Такая форма помогает распределять нагрузку и делает сооружение более устойчивым и выразительным.



Свет и направление

В прожекторах и отражателях параболическая форма используется не случайно: она помогает собирать или направлять лучи света. Поэтому один и тот же математический образ можно встретить и в технике, и в обычной жизни.



Движение и траектории

Похожий изгиб можно увидеть и в траекториях некоторых движений. Маленький график $y = x^2$ рядом с реальным примером показывает, что математика описывает не только числа, но и привычные предметы вокруг нас.



Сравнение значений слева и справа от нуля



Вычисления по формуле $y = x^2$

На графике видно, что одинаковые по модулю числа дают одинаковые результаты. Это удобно для быстрого сравнения значений без дополнительных вычислений.

Знак числа не влияет на квадрат: решающим является модуль. Чем больше $|x|$, тем больше значение y .

Насколько быстро растёт парабола



Около нуля

Вблизи точки $x = 0$ график поднимается медленно и выглядит почти ровным. Это значит, что при малых значениях x функция меняется не очень резко.



Дальше от центра

Когда $|x|$ увеличивается, каждое новое значение даёт заметно больший прирост y . График становится круче, потому что квадрат растёт быстрее самого числа.



Самые большие значения

При больших значениях $|x|$ ветви параболы быстро уходят вверх. Поэтому на рисунке график кажется всё более вытянутым, а рост значений — всё более стремительным.

Свойства функции $y = x^2$

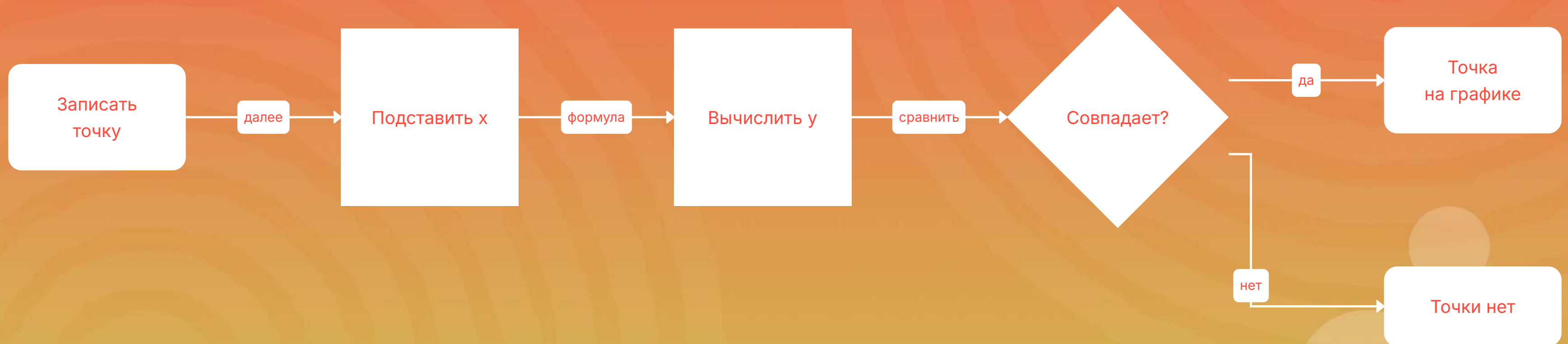
Свойство	Значение
Область определения	все числа
Область значений	$y \geq 0$
Вершина	$(0; 0)$
Ось симметрии	$x = 0$
Направление ветвей	вверх
Ноль функции	$x = 0$

В таблице собраны основные характеристики функции, которые помогают быстро описать её график и поведение.

Функция определена при любом x , не принимает отрицательных значений и имеет единственный ноль. Её график симметричен и направлен вверх.

Как проверить точку на графике

Алгоритм основан на подстановке координаты x в формулу $y = x^2$ и сравнении результата с координатой y .



Типичные ошибки при работе с формулой

Неверный квадрат

Частая ошибка — считать, что $(-2)^2$ равно -4 . На самом деле квадрат отрицательного числа положителен, поэтому правильный ответ — 4 .

Путаница в записи

Иногда путают x^2 и $2x$, хотя это разные выражения. Первое означает квадрат числа, а второе — удвоение значения x .

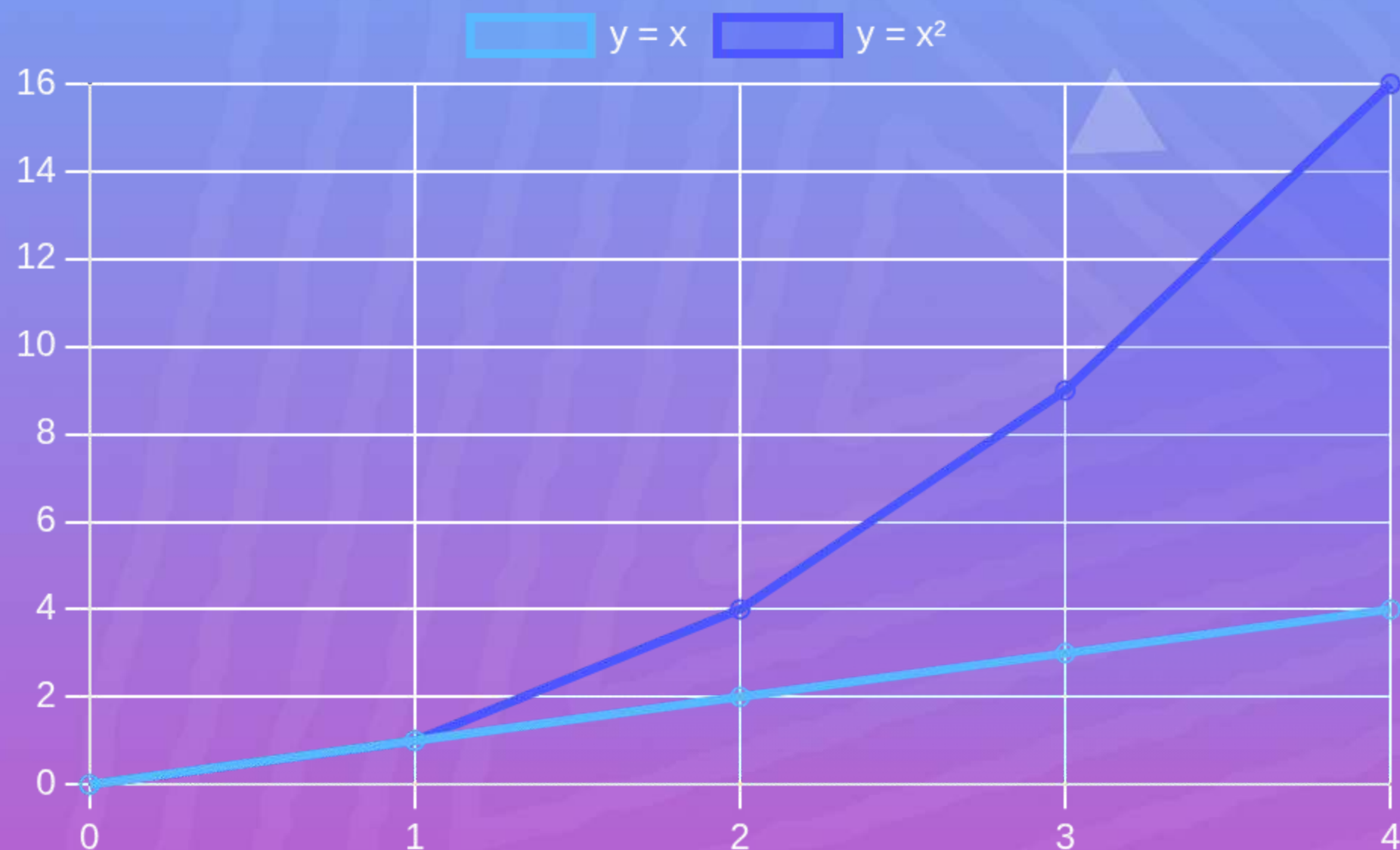
Забытый нуль

График обязательно проходит через точку $(0; 0)$. Если её не отметить, рисунок получится неполным и не покажет важнейшее свойство функции.

Отрицательные значения

Для этой функции y не бывает отрицательным. Если в ответе получается число меньше нуля, значит, в вычислениях допущена ошибка.

Сравнение квадратичной и линейной функции



Вычисления по формулам $y = x$ и $y = x^2$

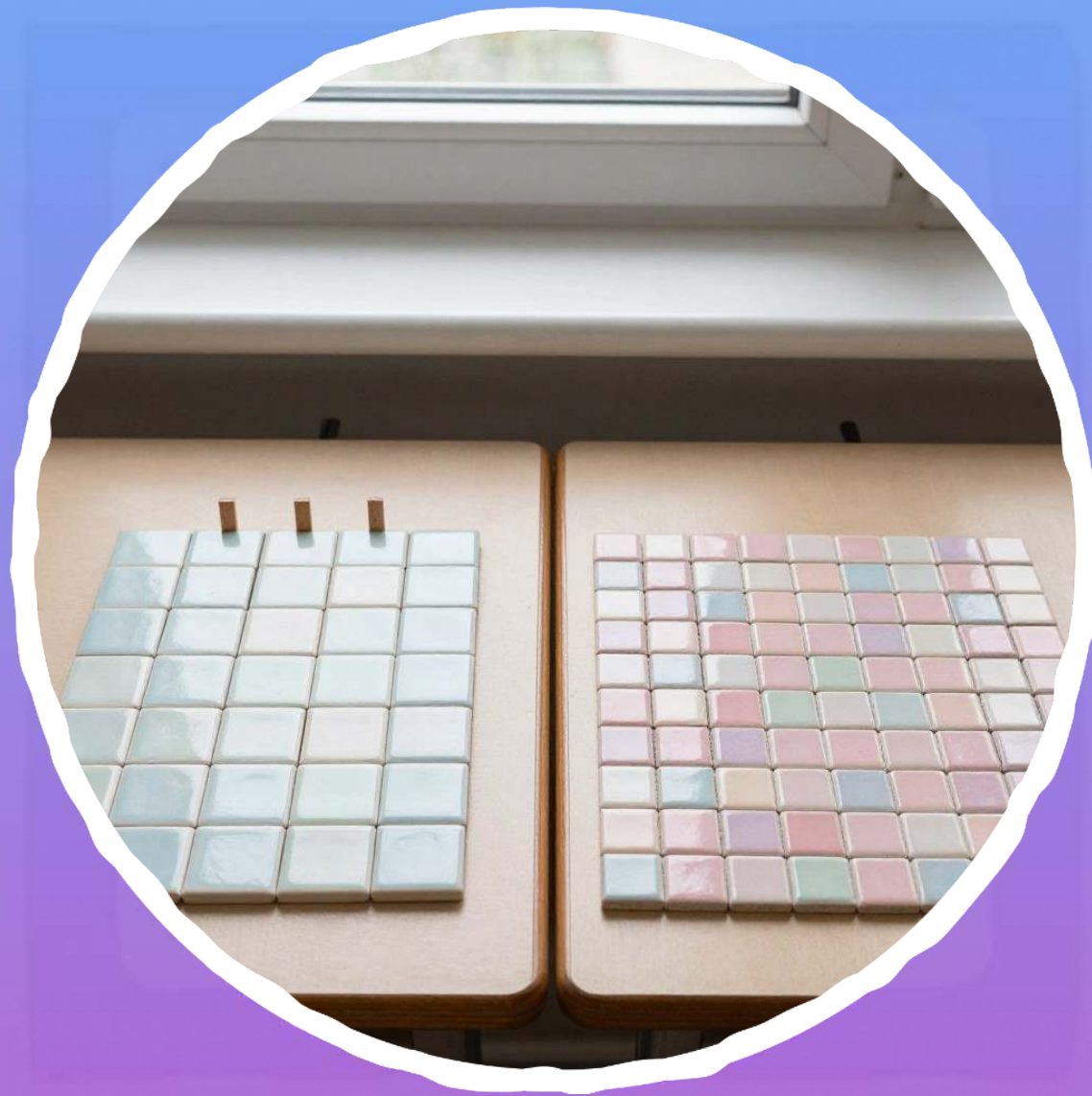
Обе зависимости начинаются в одной точке, но дальше квадратичная функция быстро отрывается от линейной. Это хорошо видно уже на трёх и четырёх.

Линейная функция растёт равномерно, а квадратичная — всё быстрее. Поэтому при увеличении x разница между графиками заметно возрастает.

Площадь квадрата и формула $y = x^2$

Геометрический СМЫСЛ

Если сторона квадрата равна x , то его площадь находится по формуле $S = x^2$. Это удобно: одна и та же запись показывает и длину стороны, и результат вычисления.



Примеры расчёта

При стороне 3 см площадь равна 9 см^2 , а при стороне 5 см — 25 см^2 . Такие примеры помогают увидеть, как алгебраическая формула работает в геометрии.

Что нужно запомнить о графике $y = x^2$

01

Парабола вверх

График функции $y = x^2$ имеет форму параболы и направлен вверх. Это первое, что нужно заметить при его изображении на координатной плоскости.

02

Вершина в начале

Самая нижняя точка графика находится в начале координат, то есть в точке $(0; 0)$. От неё начинается симметричный подъём обеих ветвей.

03

Симметрия графика

Левая и правая части параболы совпадают относительно оси Oy . Поэтому значения для x и $-x$ одинаковы, если числа равны по модулю.

04

Неотрицательные значения

Функция не принимает отрицательных значений, потому что квадрат любого числа неотрицателен. Значит, область значений начинается с нуля и идёт выше.

05

Ускоренный рост

Чем больше $|x|$, тем быстрее увеличивается y . Из-за этого парабола всё круче поднимается вверх, особенно вдали от начала координат.

Функция, которую легко узнать

Функция $y = x^2$ помогает увидеть, как число превращается в квадрат и как выглядит квадратичная зависимость на графике. Её свойства удобно использовать в алгебре, геометрии и при чтении диаграмм.