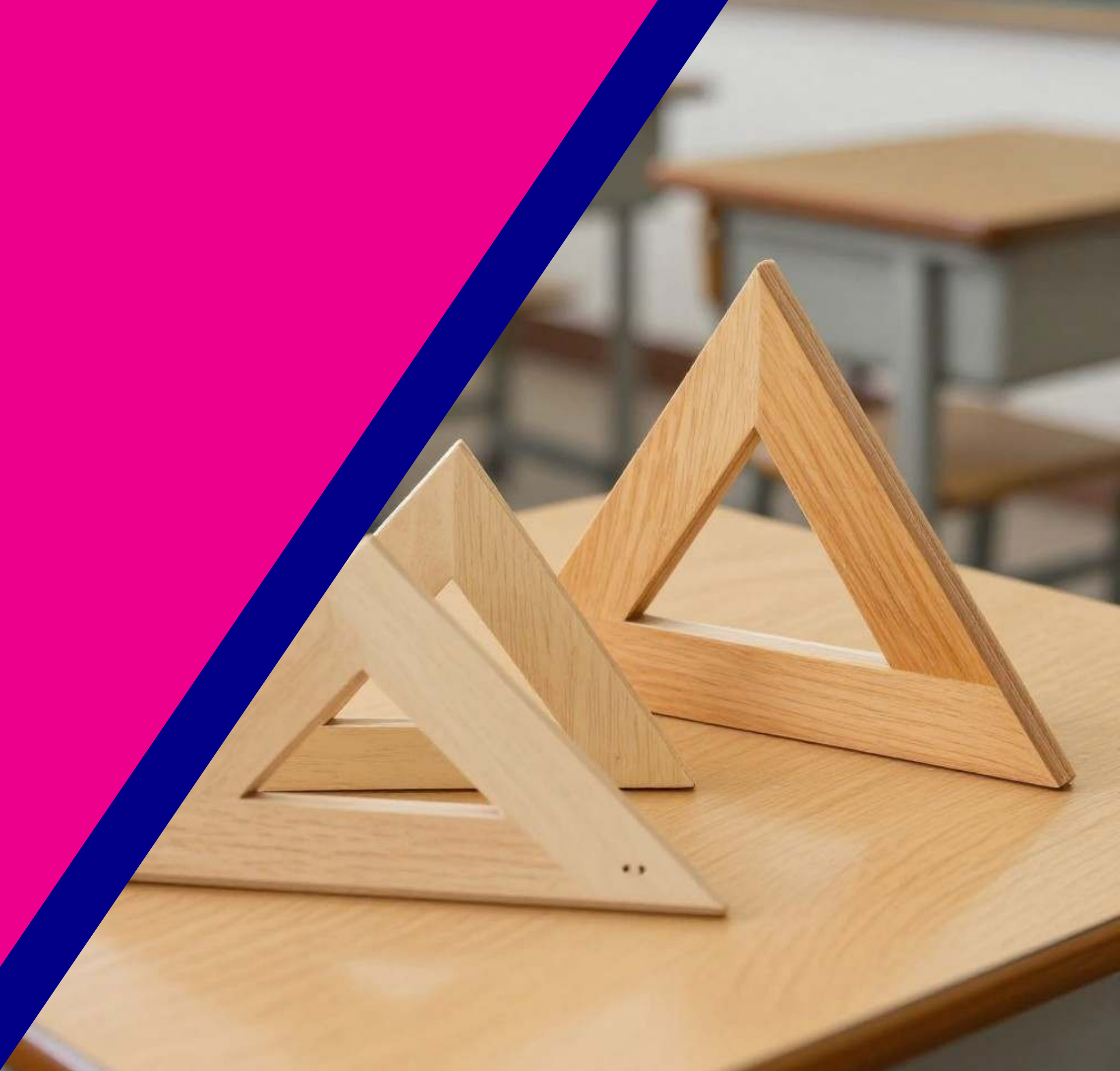
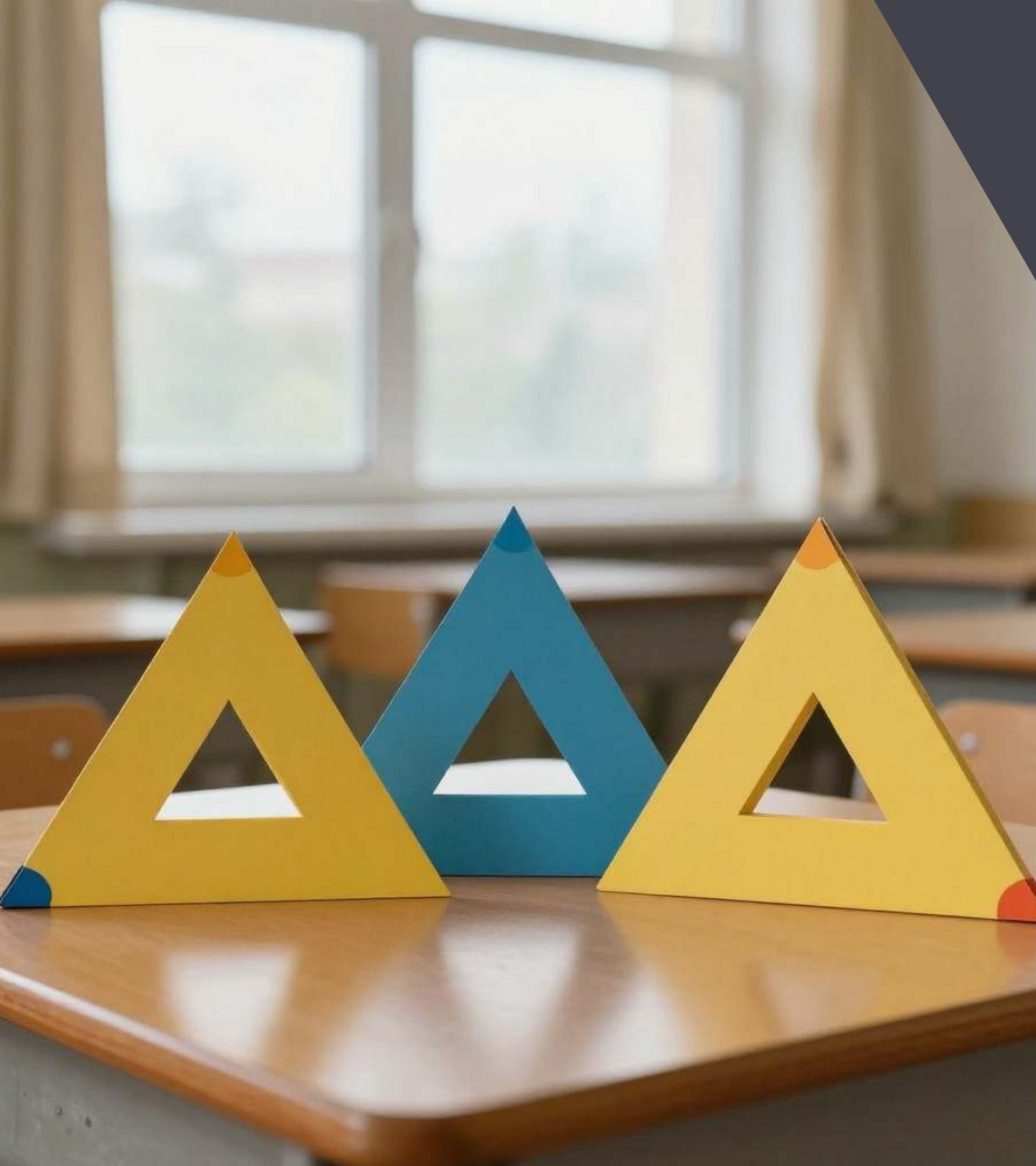


Тригонометрия для углов 30° , 45° и 60°

Точные $\sin$, $\cos$ и tg для трёх особых углов выводятся из двух треугольников.





Почему именно эти углы изучают в 8 классе

Углы 30° , 45° и 60° встречаются в школьных задачах чаще всего: они дают простые, устойчивые отношения сторон. Для них тригонометрия считается без округлений и без калькулятора. Эти углы помогают в задачах на высоту, диагонали, наклон, построения и координаты.

Что обозначают синус, косинус и тангенс

1

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе. Чем больше противолежащий катет, тем ближе $\sin$ к 1.

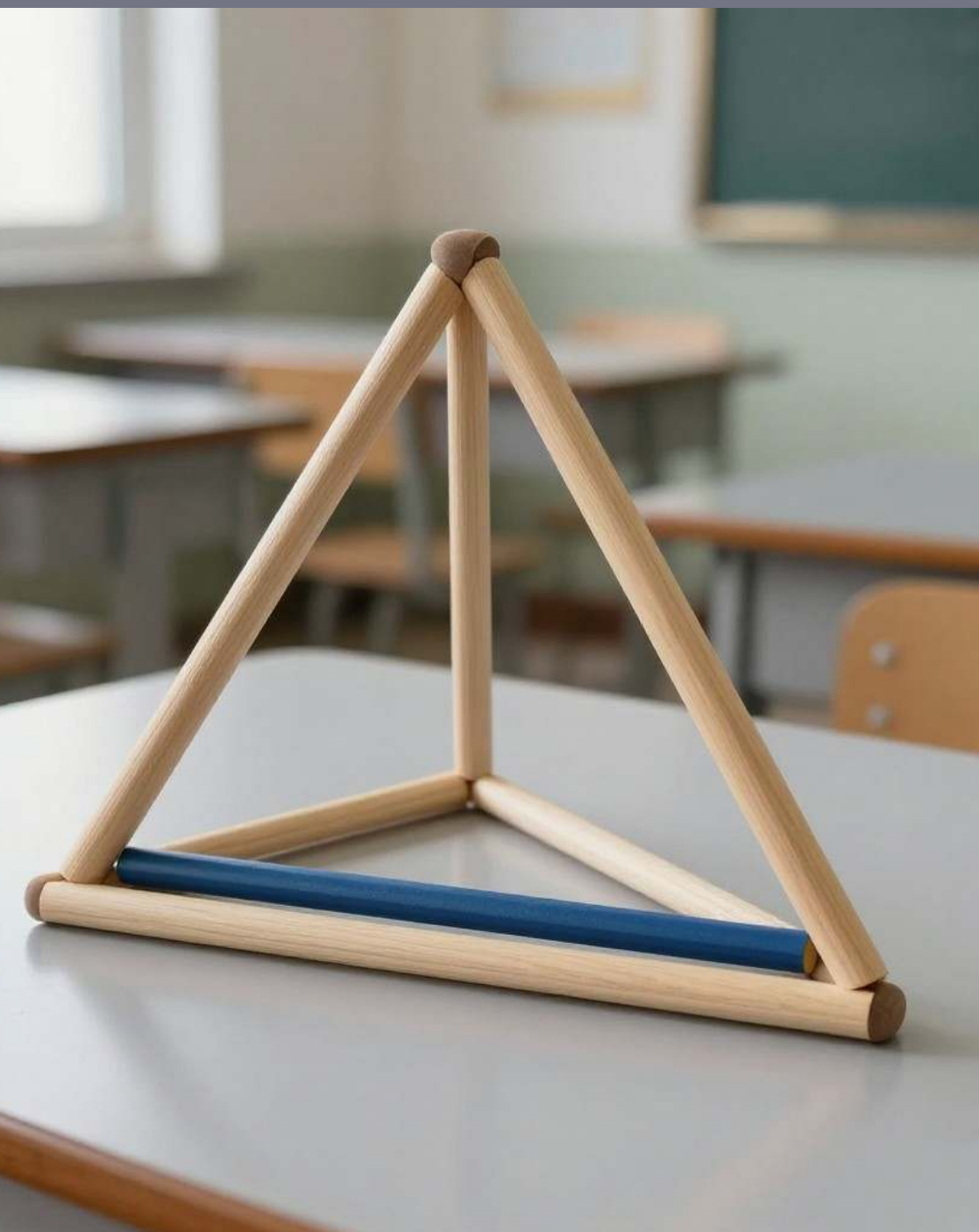
2

Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе. В подобных треугольниках все стороны меняются пропорционально, поэтому отношение остаётся тем же.

3

Тангенс — отношение противолежащего катета к прилежащему. Для одного и того же угла синус, косинус и тангенс одинаковы у всех подобных треугольников.

Треугольник $30^\circ-60^\circ-90^\circ$



1

Откуда берутся катеты

Равносторонний треугольник со стороной 2 делят высотой: получаются два одинаковых прямоугольных треугольника. У каждого гипотенуза равна 2. Меньший катет получается равным 1, а больший — $\sqrt{3}$.

2

Связь с углами 30° и 60°

В таких треугольниках угол 30° расположен напротив катета 1, поэтому этому углу соответствует противолежащий катет 1. Углу 60° противолежит катет $\sqrt{3}$, а оставшиеся стороны уже определяются гипотенузой 2 и выбранными катетами.

Точные значения для угла 30°

Угол	$\sin$	$\cos$	tg
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$

Для 30° получаем аккуратные дроби и корни. По смыслу это проверяется сравнением: $\sin$ меньше $\cos$, а tg получается меньше 1.

Точные значения позволяют считать без калькулятора: достаточно подставить нужный катет и гипотенузу из одного образца.

Школьный вывод из треугольника 30° - 60° - 90°

Как получаются значения для 30°

1

В треугольнике 30° - 60° - 90° стороны относятся как $1:\sqrt{3}:2$. Если гипотенуза равна 2, то противолежащий катет для 30° равен 1, а прилежащий — $\sqrt{3}$.

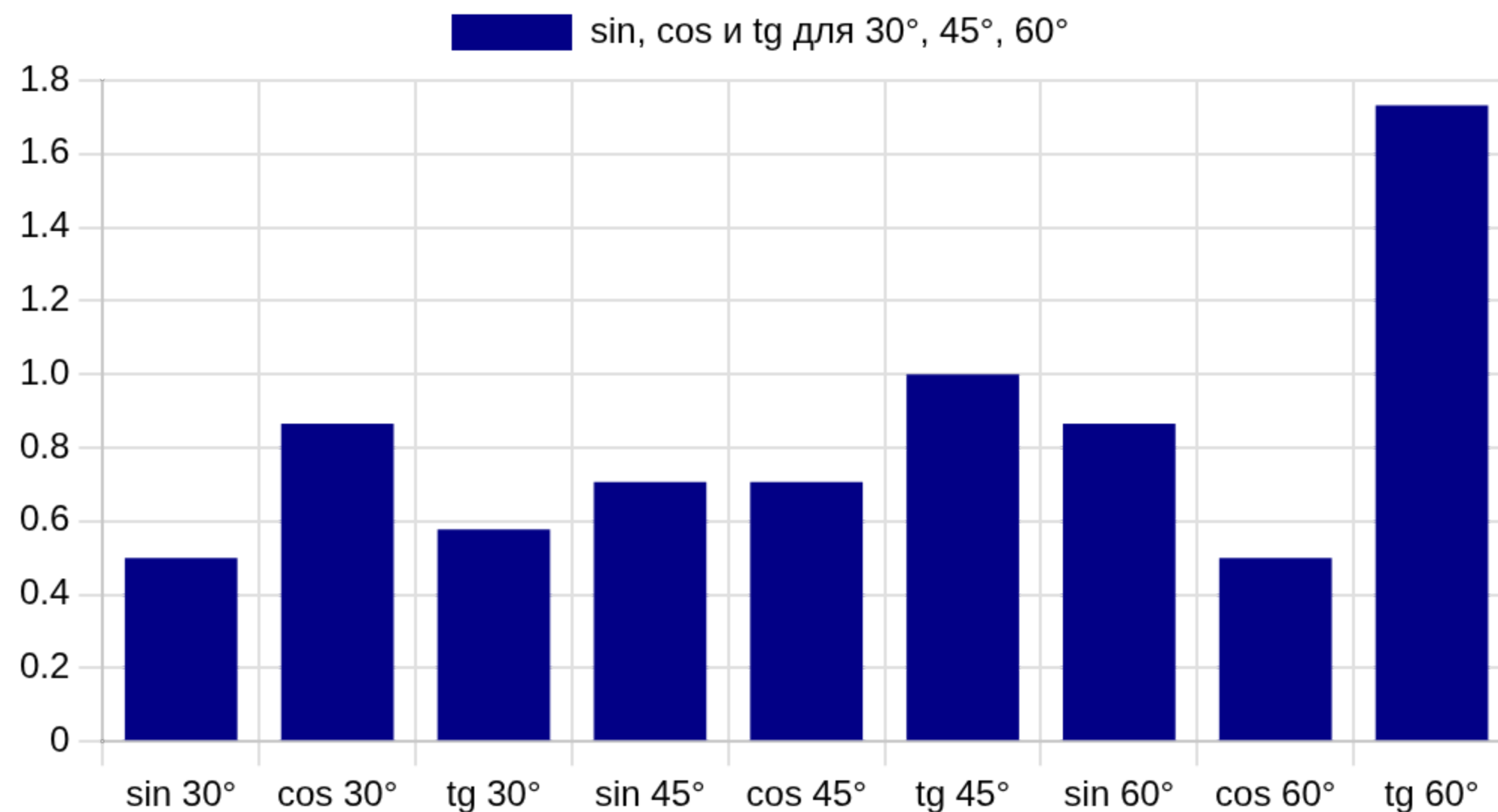
2

Теперь подставляем в определения: $\sin 30^\circ = 1/2$, потому что синус — противолежащий катет делить на гипотенузу. Аналогично $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ — прилежащий катет делить на гипотенузу.

3

Тангенс получаем как отношение противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$. Если рационализировать, получаем $\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$, то есть ровно то число из таблицы.

Сравнение значений для 30°, 45° и 60°



У 30° и 60° синус и косинус «меняются местами», а тангенс растёт заметнее всего. Это видно по высоте столбиков.

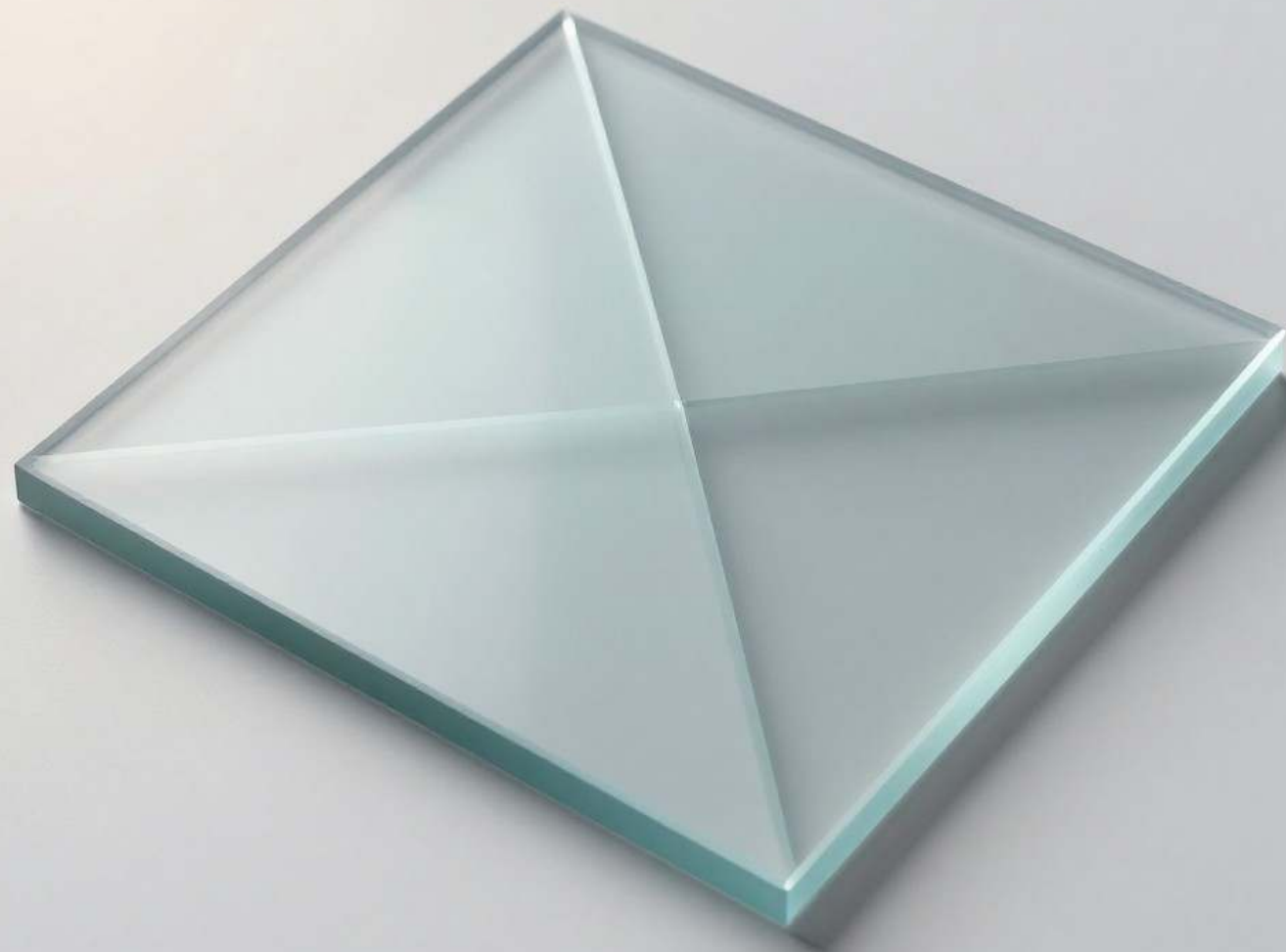
Табличные значения отражают закономерность: при увеличении угла от 30° к 60° sin растёт, cos убывает, а tg проходит через 1 на 45°.

Расчёт по точным формулам: $\sin 30^\circ = 1/2$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$; $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 60^\circ = 1/2$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Треугольник $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

Диагональ квадрата как «машина» для углов 45°

Представьте квадрат: его делят диагональю, и получается два равных прямоугольных треугольника. В каждом из них оба острых угла равны 45° . Поэтому катеты одинаковые, а гипотенуза становится длиннее каждого катета в $\sqrt{2}$ раза.



Почему синус и косинус совпадают

Когда в треугольнике $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ катеты равны, противолежащий и прилежащий катеты для одного и того же угла тоже одинаковы. Отношения к гипотенузе получаются равными, поэтому $\sin 45^\circ$ и $\cos 45^\circ$ оказываются одним и тем же числом.



Точные значения для угла 45°

Угол	sin	cos	tg
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1

Угол 45° — самый «симметричный» из трёх опорных: синус равен косинусу. Тангенс равен 1 из-за равных катетов.

При 45° оба отношения к гипотенузе совпадают, а тангенс превращается в отношение равных катетов, то есть 1.

Свойства равнобедренного прямоугольного треугольника 45° - 45° - 90°

$\sqrt{2}/2$

Это отношение получается одинаковым, потому что противолежащий и прилежащий катеты равны.

Определения $\sin$ и $\cos$ в треугольнике $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ и теорема Пифагора.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике катеты равны, поэтому $\sin 45^\circ$ и $\cos 45^\circ$ дают одно и то же значение.

Точные значения для угла 60°

$\sin 60^\circ$	$\cos 60^\circ$	$\operatorname{tg} 60^\circ$
$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Таблица фиксирует три опорных значения для 60° : синус, косинус и тангенс, выраженные точно через корни. Их удобно проверять через треугольник 30° - 60° - 90° .

Для 60° синус и косинус «меняются местами» относительно 30° : $\sin$ больше $\cos$, а тангенс превышает 1.

Опорный треугольник 30° - 60° - 90° (отношение сторон $1:\sqrt{3}:2$).

Как получаются значения для 60°

1

Рассмотри треугольник 30° - 60° - 90° . У угла 60° противолежит катет $\sqrt{3}$, а прилежит — катет 1. По этой паре легко восстановить гипотенузу.

2

Так как отношение сторон в этом треугольнике равно $1:\sqrt{3}:2$, гипотенуза равна 2. Теперь подставляем длины катетов и гипотенузы в определения функций.

3

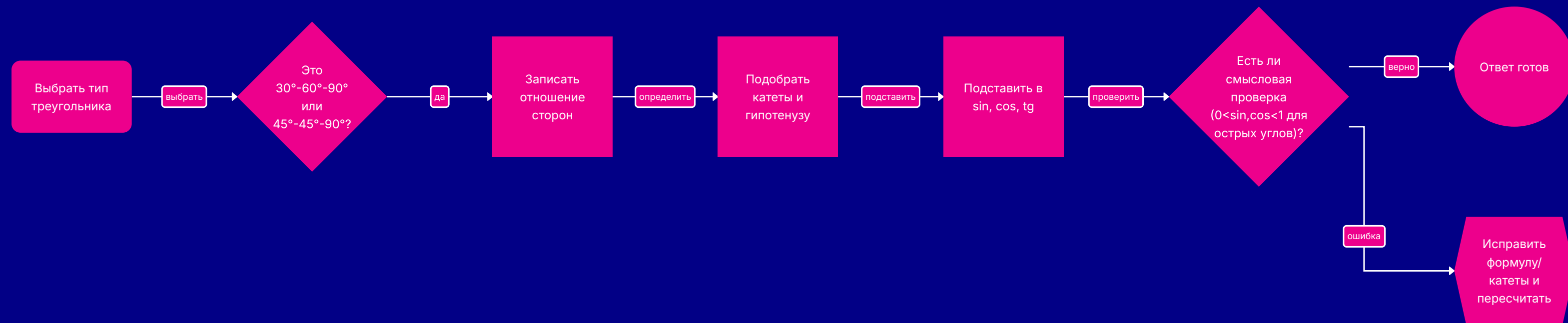
Получаем $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 60^\circ = 1/2$. Тангенс находим как $\operatorname{tg} 60^\circ = \text{противолежащий/прилежащий} = \sqrt{3}/1$.

4

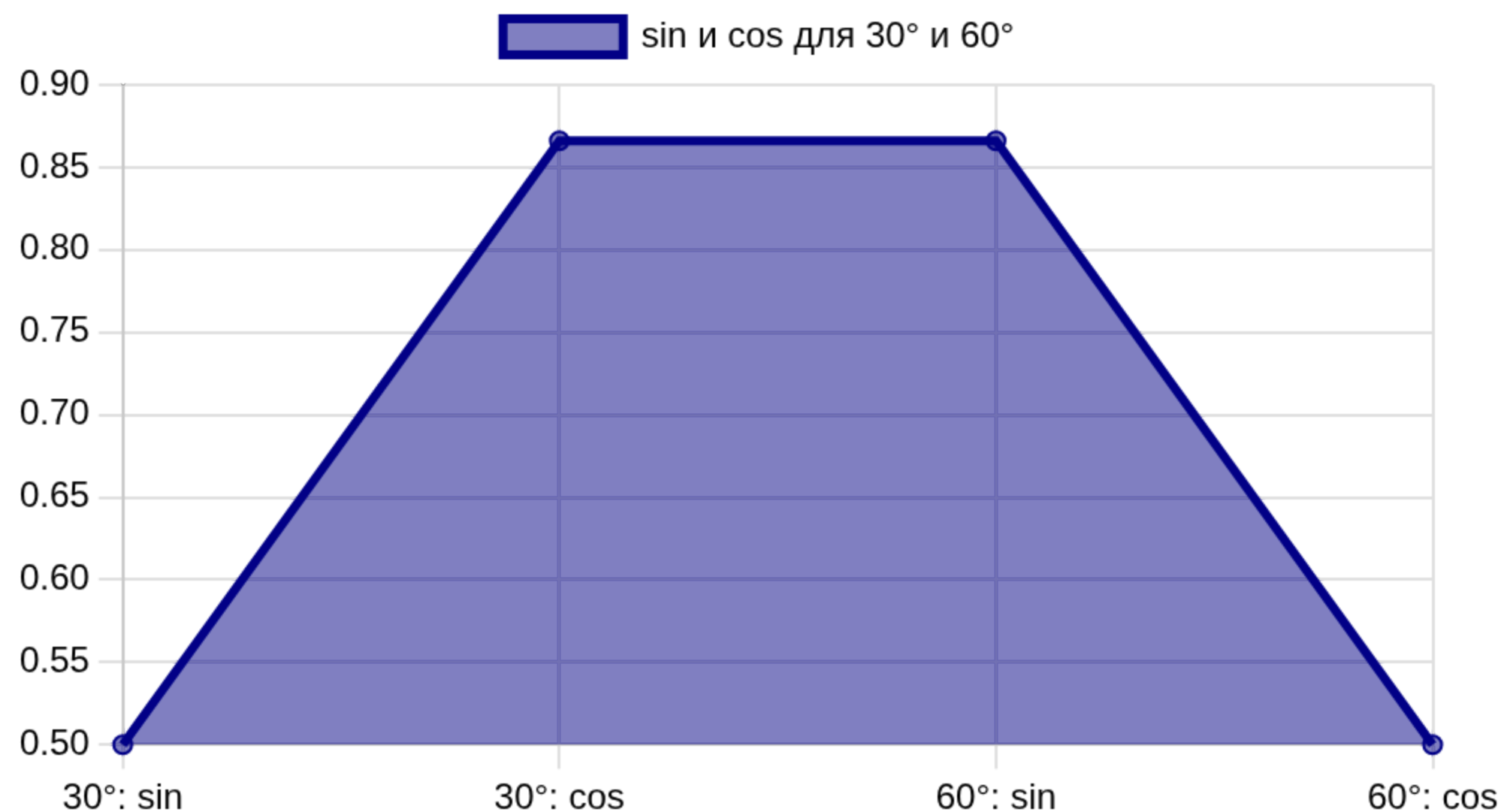
Важно: $\operatorname{tg} 60^\circ$ больше 1, потому что противолежащий катет длиннее прилежащего. Такой смысловой контроль сразу показывает, что результат записан верно.

Алгоритм нахождения точных значений без калькулятора

Опираемся на два «опорных» треугольника и формулы определений тригонометрических функций.



Симметрия между 30° и 60°



Линия помогает видеть равенство: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, а $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$. Это симметрия «относительно обмена катетов» в парных треугольниках.

Когда меняются местами роли противолежащего и прилежащего катетов, местами оказываются и sin с cos. При этом tg ведёт себя иначе — его контролирует разность длин катетов.

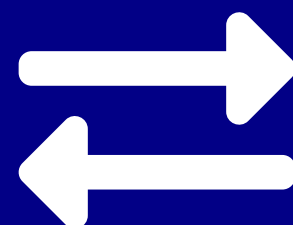
Построено по точным значениям из треугольника 30° - 60° - 90° (и соответствующего определения sin/cos).

Как проверить, что ответ записан верно



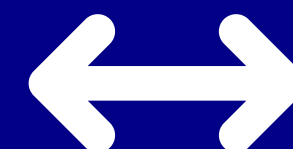
Проверь диапазон

Для острых углов синус и косинус всегда находятся между 0 и 1. Если получилось отрицательное число или больше единицы, значит перепутаны катеты или угол.



Сверь «порядок» $\sin$ и $\cos$

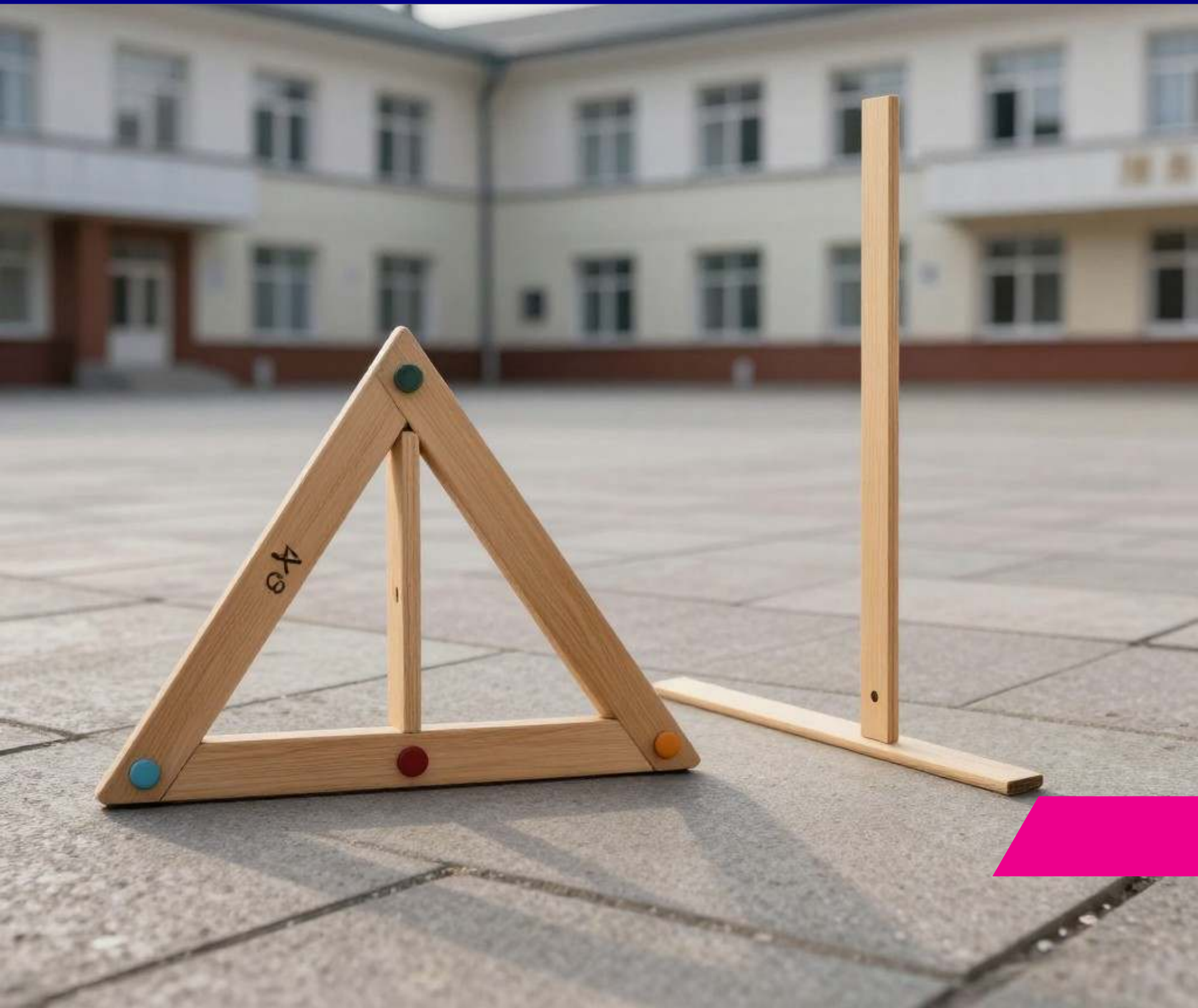
У 30° синус меньше косинуса, а у 60° — наоборот. Это различие появляется из-за того, что противолежащий и прилежащий катеты имеют разную длину.



Подтверди tg через $\sin/\cos$

Если указан tg , сравни с отношением $\sin/\cos$: $\operatorname{tg} = \sin / \cos$. Для 45° $\operatorname{tg} = 1$, а $\sqrt{3}/3$ и $1/\sqrt{3}$ обозначают одно и то же число.

Где используются эти значения в школьных задачах

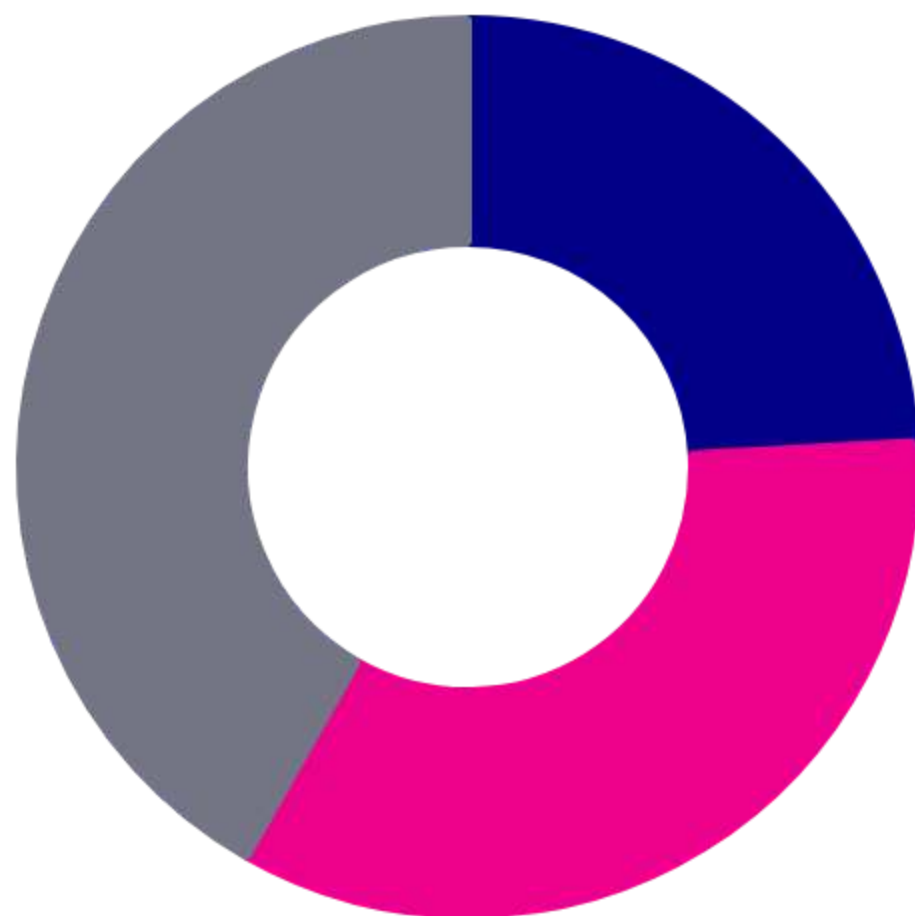


- Точные значения для 30° , 45° и 60° помогают находить высоту предмета и длину тени, когда известно наклонное направление луча. Это позволяет обойтись без долгих вычислений.
- Они также нужны в задачах про диагонали квадрата, наклон крыши и построение фигур на клетчатой или координатной плоскости. В 8 классе особенно полезны прямоугольные треугольники с указанными углами.

Точки углов 30°, 45° и 60° на единичной окружности

■ 30°: $(x,y)=(\cos,\sin) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ ■ 45°: $(x,y)=(\cos,\sin) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

■ 60°: $(x,y)=(\cos,\sin) = (1/2, \sqrt{3}/2)$



На единичной окружности эти точки наглядно показывают, что x -координата равна $\cos$, а y -координата — $\sin$. Поэтому тригонометрию связывают не только с треугольниками.

Одинаковые значения $\sin$ и $\cos$ для 45° становятся очевидны по симметрии точки относительно прямой $y = x$. Для 30° и 60° видно взаимное «переворачивание» координат.

Тригонометрические определения через единичную окружность; значения получены из опорных треугольников.

Типичные ошибки в задачах на особые углы

1

Частая ошибка — перепутать синус и косинус местами. Это происходит, когда противолежащий и прилежащий катеты случайно меняют ролями при подстановке в формулы.

2

Ещё одна типичная ошибка — путать значения для 30° и 60° . В этих углах синус и косинус действительно «зеркальны», поэтому их нельзя менять произвольно без понимания геометрии.

3

Нередко забывают, что tg равен отношению $\sin$ к $\cos$ (или противолежащего катета к прилежащему). Из-за этого вместо $\operatorname{tg} 30^\circ$ иногда записывают $\sqrt{3}$, а не $\sqrt{3}/3$.

4

Полезный приём — смысловая проверка: для острых углов синус и косинус должны быть между 0 и 1. А тангенс растёт вместе с тем, насколько противолежащий катет длиннее прилежащего.

Сводная таблица значений $\sin$, $\cos$ и tg

Угол	$\sin$	$\cos$	tg
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Таблица объединяет ключевые значения для углов 30° , 45° и 60° и ускоряет сравнение тригонометрических функций без округлений.

В таблице хорошо видно, что при 45° синус и косинус одинаковы, а тангенс равен 1. Для 30° и 60° синус и косинус взаимно переходят друг в друга.

Опорные треугольники 30° - 60° - 90° и 45° - 45° - 90° .

Главный вывод урока

Углы 30° , 45° и 60° лежат в основе школьной тригонометрии: их значения выводятся из двух специальных треугольников и остаются точными. Это помогает решать задачи быстрее, точнее проверять ответы и увереннее работать с прямоугольными треугольниками.