

Векторы: направление, длина и применение

Изучаем вектор: длина, направление и действия с ним.



Почему векторы важны в 9 классе

Векторы помогают точно описывать направление и величину, переводя рисунок на плоскости в числа и формулы. Они нужны в геометрии, физике, навигации и компьютерной графике, а ещё готовят к задачам с координатами и более сложной геометрии.

Что такое вектор

■ Направленный отрезок

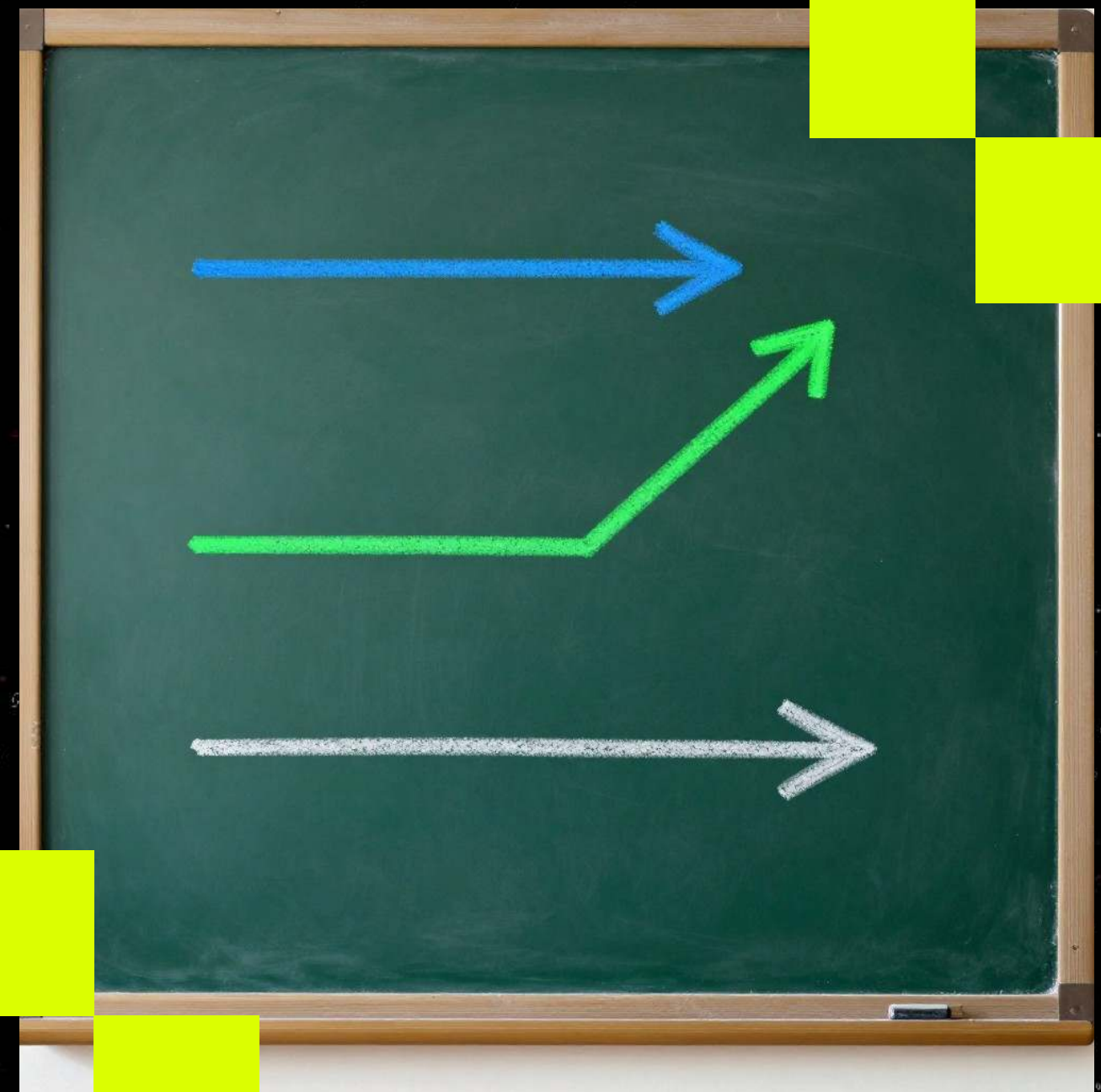
Вектор изображают отрезком со стрелкой: она показывает, куда направлен объект, а сама линия — его путь на чертеже.

■ Длина и величина

Длина стрелки отражает модуль вектора. Он показывает, насколько велик вектор, но не говорит, куда он направлен.

■ Равные векторы

Два вектора считают равными, если у них одинаковые длина и направление. При этом их положение на рисунке может быть разным.



Обозначение и запись векторов

Как обозначают

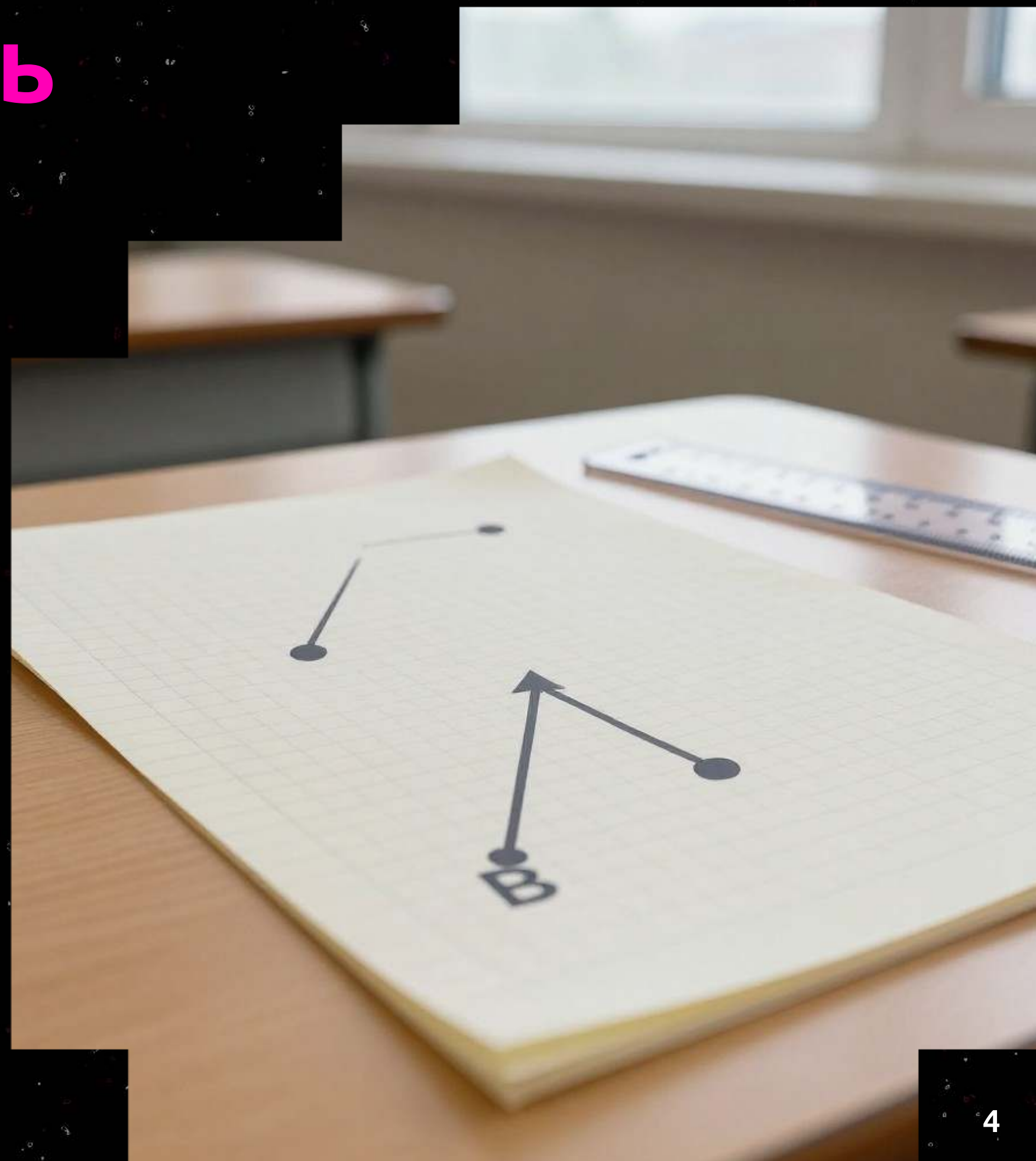
Вектор записывают строчной буквой со стрелкой, например $\vec{a}$, или двумя буквами, например $\overrightarrow{AB}$. Так удобно отличать его от обычного числа.

Как показывают на рисунке

На чертеже вектор изображают направленным отрезком между двумя точками. Для наглядности полезно сравнивать несколько векторов разной длины и направления.

Что важно не путать

Сам вектор и его длина — это не одно и то же. В записи длину обычно обозначают отдельно, чтобы не смешивать объект и его величину.



Скалярные и векторные величины

Сравним величины, которые задаются только числом, и величины, для которых важно ещё и направление.

У скалярных величин важна только величина, а у векторных направление меняет смысл ответа.

Величина	Что показывает	Пример из жизни
Скалярная	Только число	Масса 3 кг
Скалярная	Только число	Время 15 мин
Векторная	Число и направление	Скорость 5 м/с на север

Модуль показывает только величину, поэтому помогает сравнивать векторы по длине, не учитывая направление.

0

— это наименьшее возможное значение длины вектора.

Где векторы встречаются в жизни

■ Физика ■ Навигация ■ Транспорт ■ Спорт
■ Компьютерные игры



Векторы удобно описывают не только расстояние, но и сторону движения. Поэтому они помогают в задачах, где важно точно задать направление.

Все области связаны с движением, а физика и навигация особенно часто требуют векторной записи.

Иллюстративное распределение по материалам темы «Векторы»

Сложение векторов по шагам

Геометрическое сложение векторов на плоскости



Два способа сложения

Правило треугольника

Векторы откладывают последовательно один за другим: конец первого совмещают с началом второго, а сумма идёт от начала первого к концу второго.

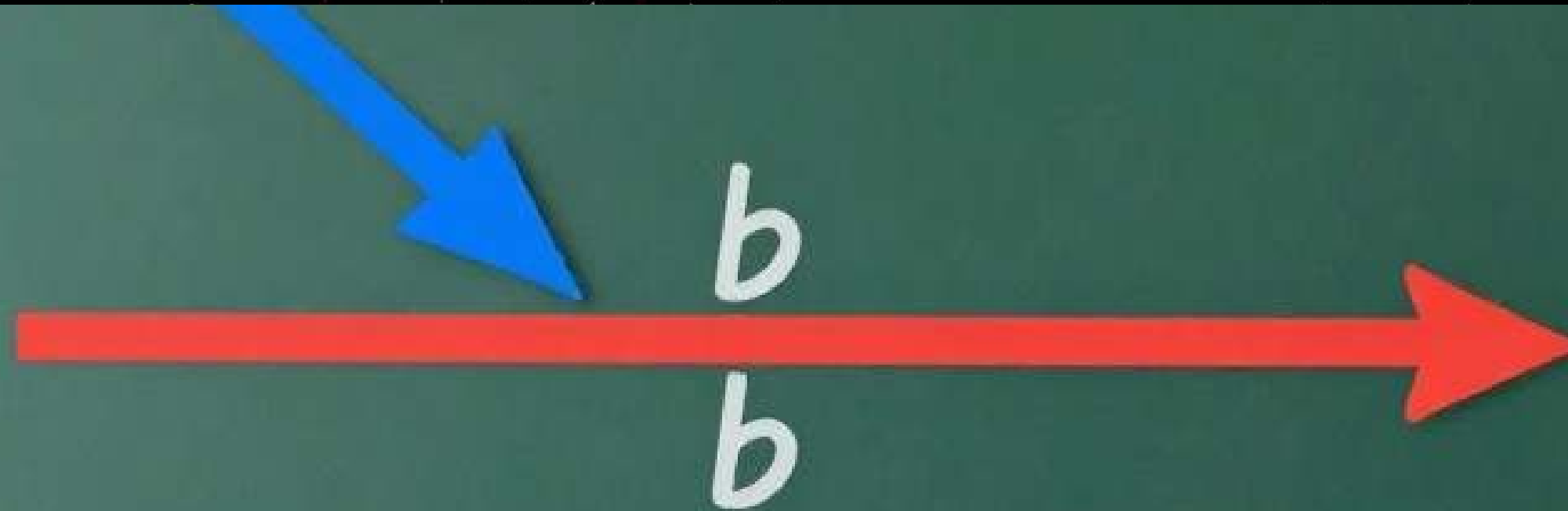
Правило параллелограмма

Если два вектора выходят из одной точки, их изображают как стороны параллелограмма. Диагональ из общего начала показывает сумму.

Один результат

Оба способа дают один и тот же ответ. Разница только в способе построения, а не в самом сложении.

Вычитание векторов



Записываем разность

Разность векторов понимают как сложение с противоположным вектором: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Это делает правило вычитания наглядным и удобным.

Находим противоположный

Противоположные векторы имеют одинаковую длину, но направлены в разные стороны. Поэтому при вычитании важно сначала изменить направление второго вектора.

Сравниваем изменения

Вычитание помогает сравнивать перемещения, изменения силы и координат. Оно показывает, насколько одна величина отличается от другой и в какую сторону.

Строим на чертеже

Если у векторов общее начало, разность удобно изображать как вектор от конца второго к концу первого. Так легче увидеть результат без вычислений.

Координаты вектора на плоскости

■ Проекции на оси

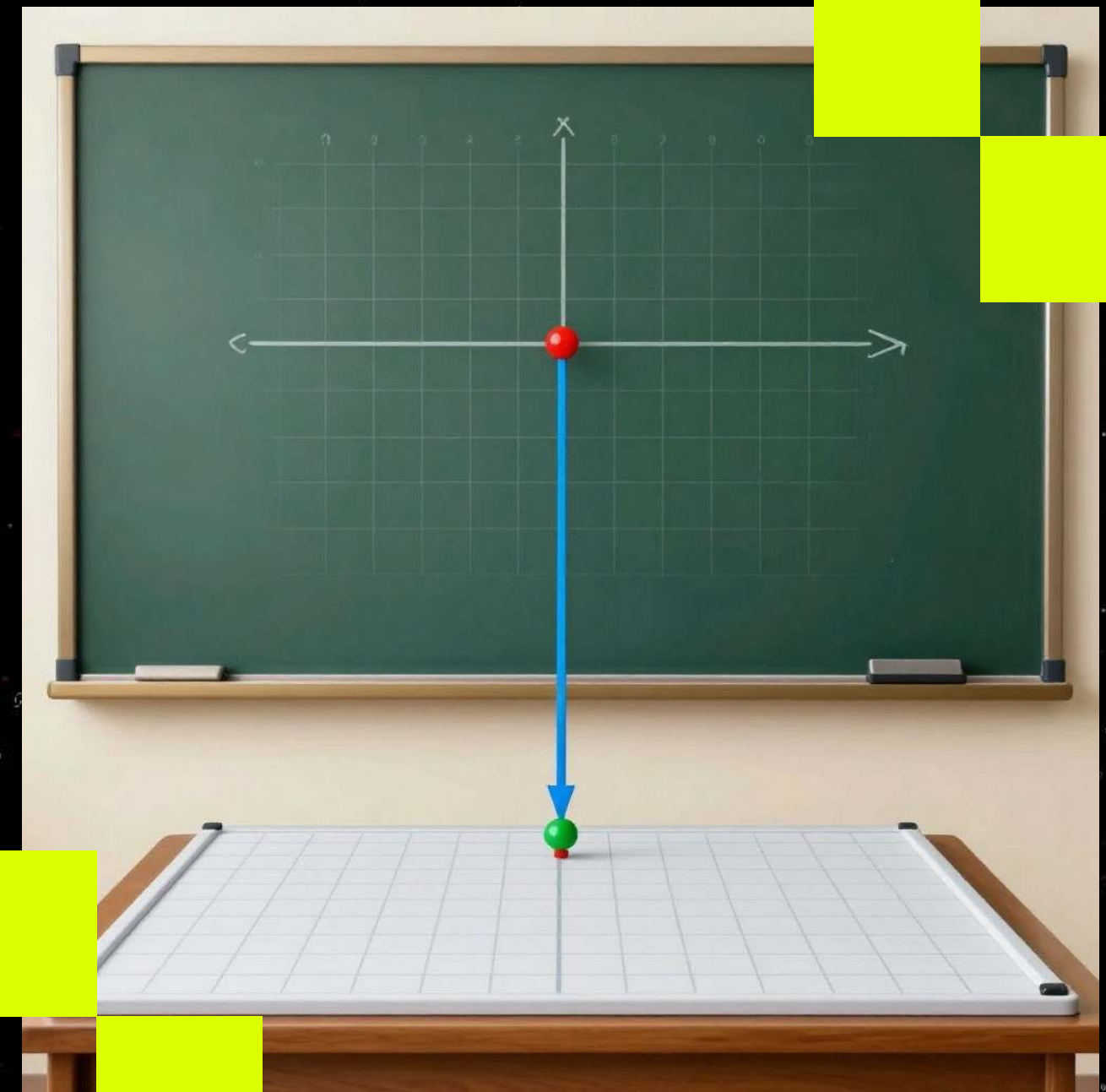
Чтобы задать вектор на координатной плоскости, рассматривают его горизонтальную и вертикальную составляющие. Эти проекции показывают, насколько вектор смещается вправо-влево и вверх-вниз относительно начала координат.

■ Координаты по точкам

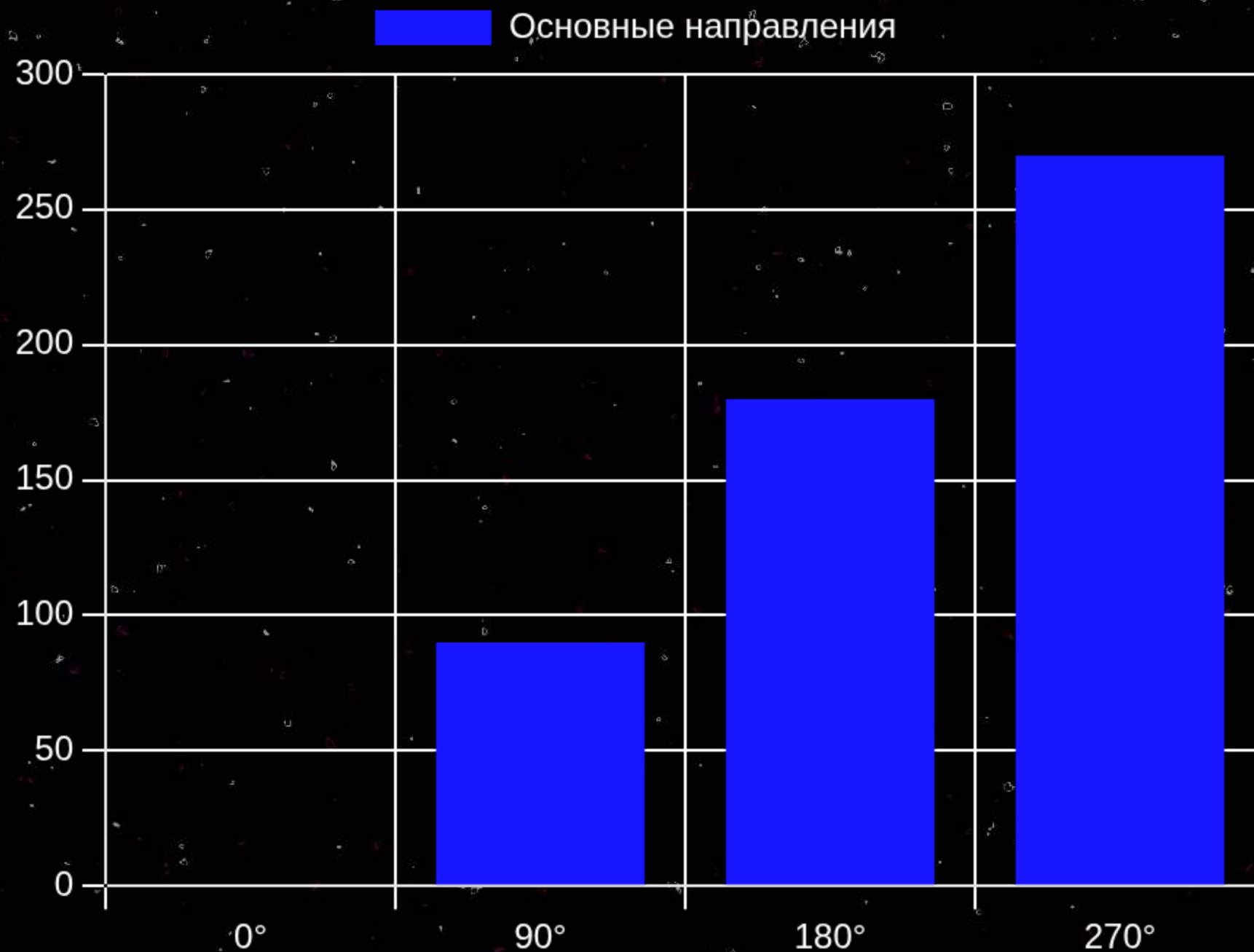
Если известны начало и конец вектора, его координаты находят как разность соответствующих координат конечной и начальной точек. Такой способ позволяет описать вектор численно и без дополнительного рисунка.

■ Точная запись

Координаты вектора удобны тем, что сразу показывают его направление и величину смещения. Это помогает решать задачи, где нужно сравнивать векторы, вычислять их сумму или проверять ответ.



Направления вектора в координатной системе

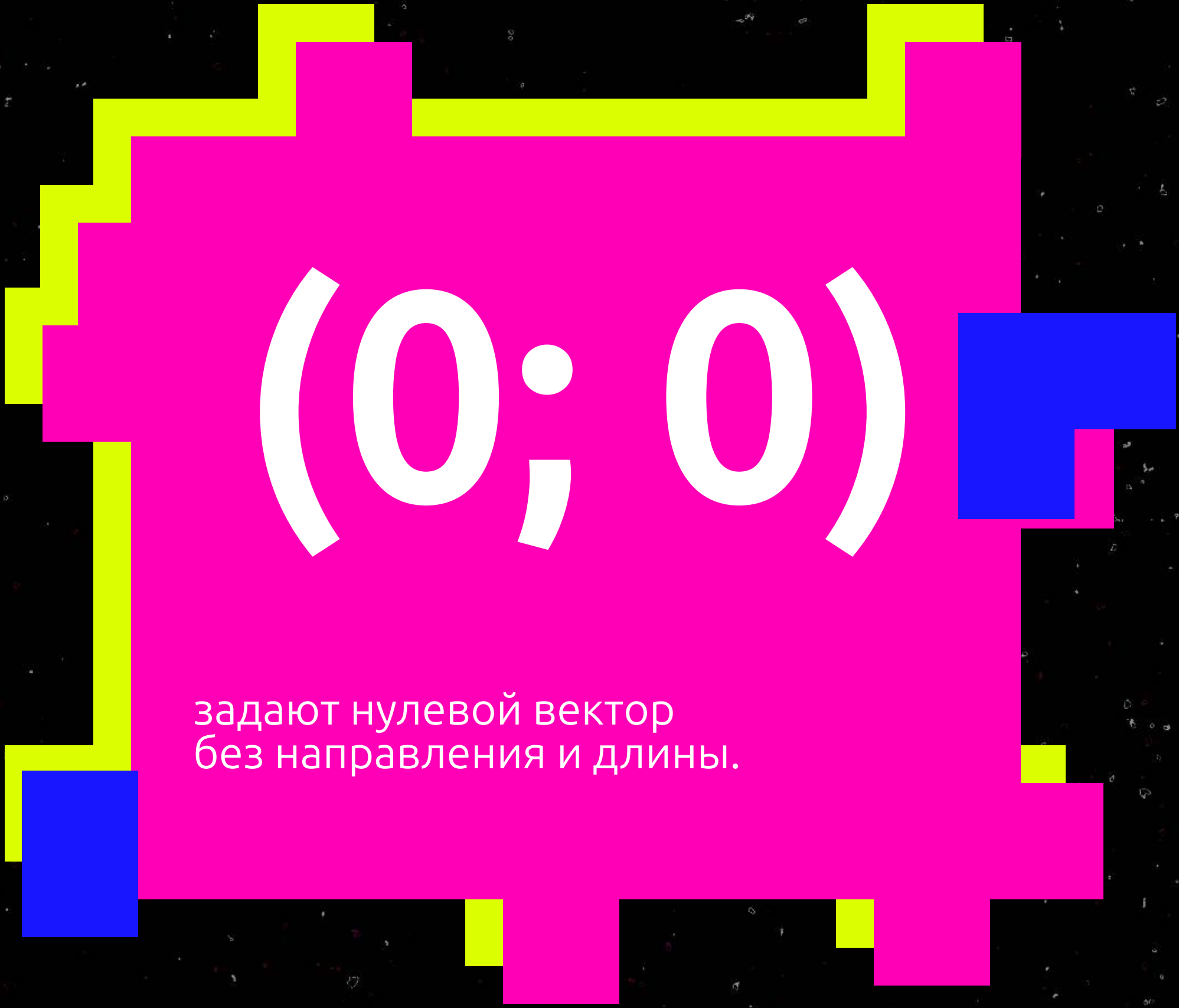


Угол помогает понять, как вектор расположен относительно осей. В координатной плоскости особенно важно различать направление вправо, вверх, влево и вниз.

Чем точнее указан угол, тем проще определить направление вектора и его знак при записи координат.

Школьный курс геометрии

Такой вектор не показывает
смещение, поэтому его
используют как отправную точку
в вычислениях и при сравнении
других векторов.



$(0; 0)$

задают нулевой вектор
без направления и длины.

Основные операции с векторами

Операция	Запись	Смысл
Сложение	$a+b$	Объединение
Вычитание	$a-b$	Прибавить противоположный
Умножение	$2a$	Изменить длину

Таблица показывает три главные операции и их смысл в геометрии.

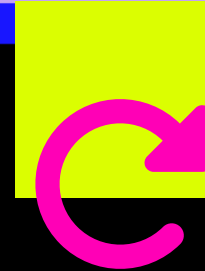
Все операции сохраняют связь между рисунком и числовой записью, а знак особенно важен при вычитании и умножении на отрицательное число.

Векторы в физике



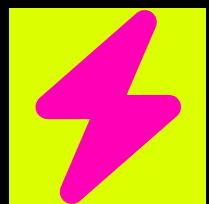
Скорость

Скорость показывает, как быстро и в каком направлении движется тело. Поэтому автомобиль может ехать с одинаковой числовой скоростью, но в разные стороны, и это будет различное движение.



Ускорение

Ускорение описывает, как меняется скорость тела со временем. Оно помогает понять, разгоняется ли объект, тормозит или меняет направление движения, например на повороте.



Сила

Сила показывает действие одного тела на другое и всегда связана с направлением. Именно поэтому толчок, натяжение и тяжесть нельзя описать одной только числовой величиной.



Перемещение

Перемещение указывает, как из начальной точки попасть в конечную кратчайшим способом. Оно отличается от пути тем, что учитывает не только расстояние, но и сторону движения.

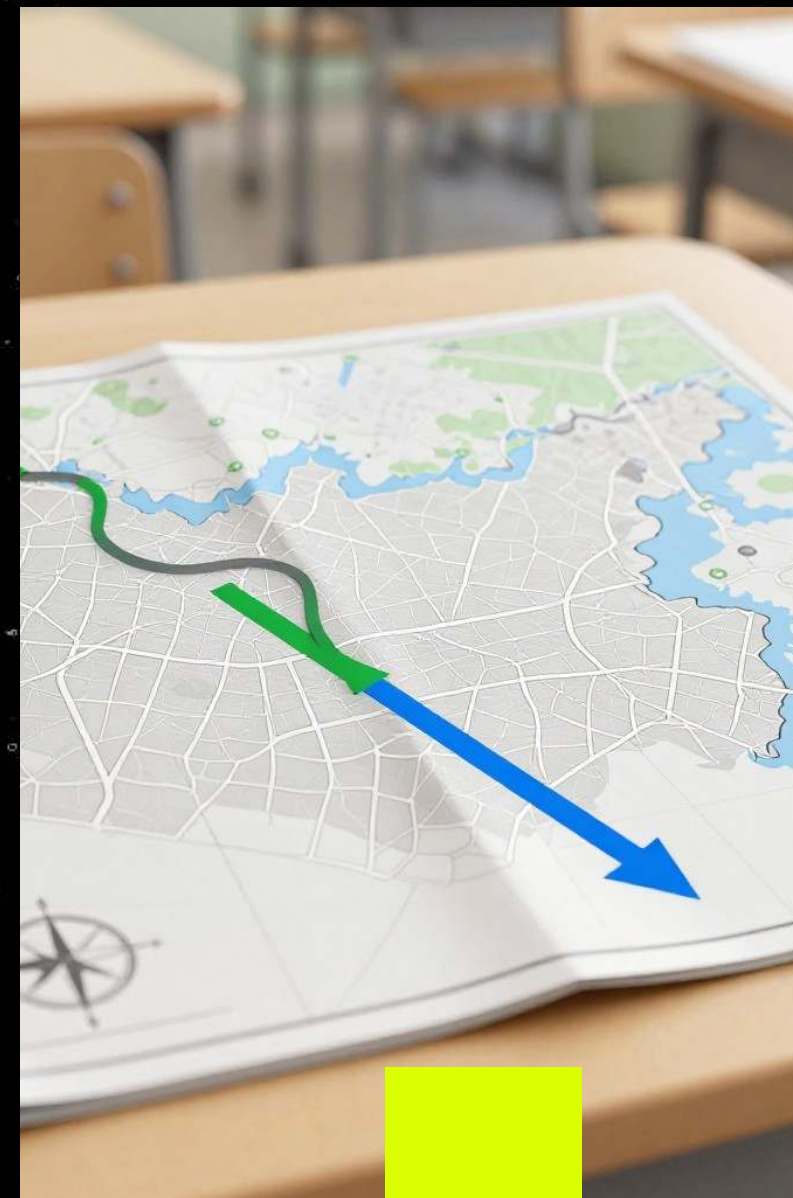
Векторы на карте и в навигации

Маршрут и перемещение

На карте вектор удобно показывает не весь путь, а итоговое смещение от старта к финишу. Если маршрут был извилистым, направление и длина перемещения помогают сравнить его с прямым отрезком.

Стороны света

Для навигации важно связать вектор с ориентацией на местности: вправо, влево, вверх, вниз или по сторонам света. Так проще читать маршрут и понимать, куда именно нужно двигаться.

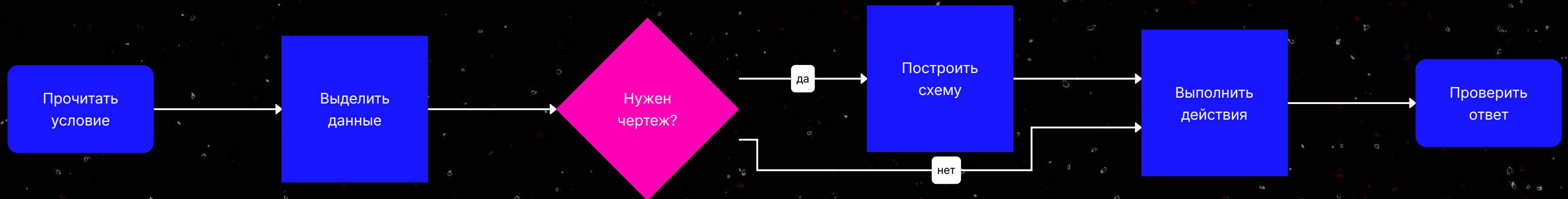


Точка назначения

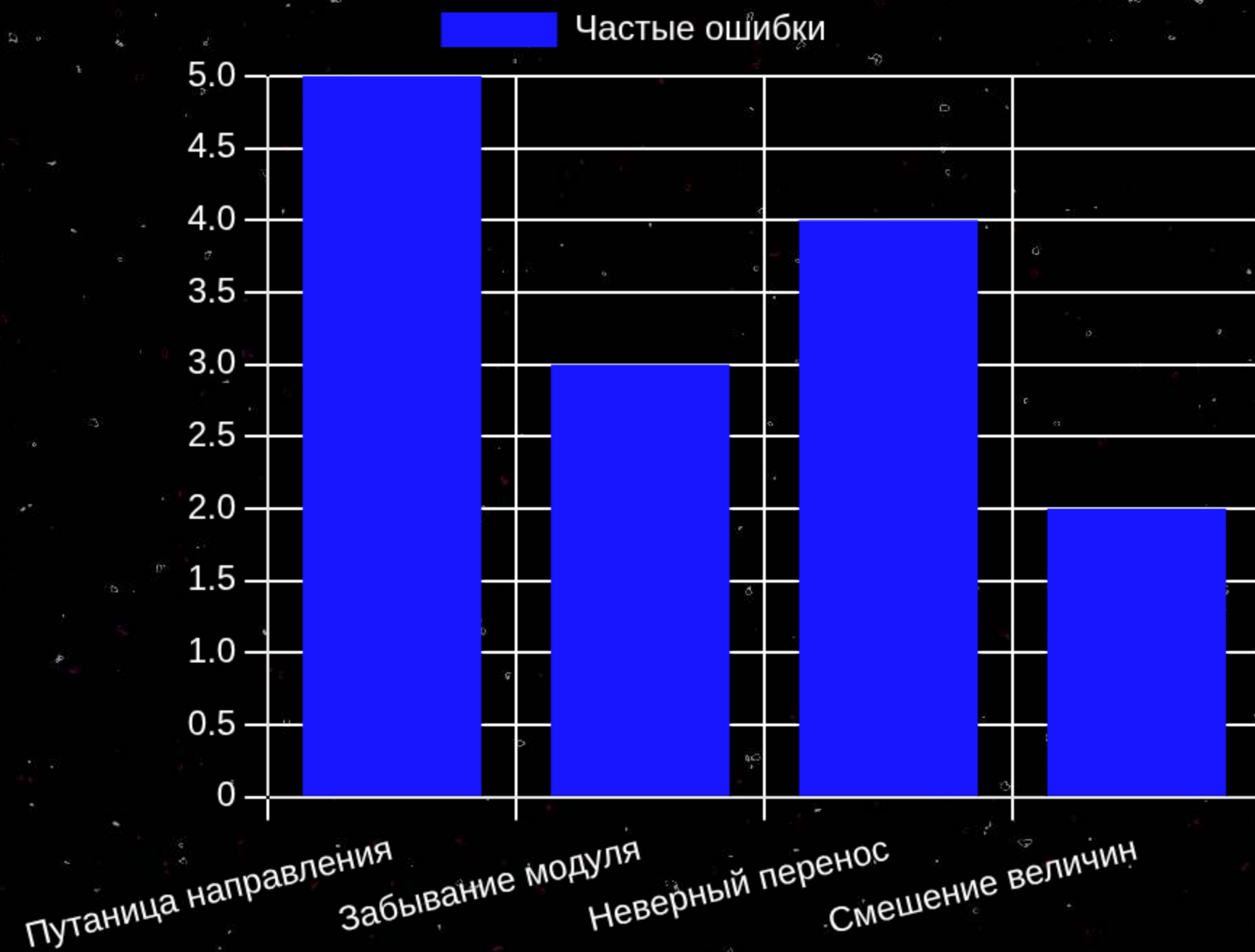
Координаты конечной точки позволяют точно указать, где находится объект после движения. Это особенно полезно в заданиях, где нужно совместить карту, масштаб и направление движения.

Алгоритм решения задач на векторы

Последовательность шагов помогает не потерять направление, модуль и знаки координат.



Частые ошибки при работе с векторами



Ошибки чаще появляются там, где нужно внимательно следить за знаком и направлением. Особенно это заметно при переходе от рисунка к координатам.

Наибольший риск связан с направлением: если его потерять, изменится смысл всего решения.

Методические материалы по теме «Векторы»

Что важно запомнить

1

Два признака

У каждого вектора есть длина и направление. Если совпадают оба признака, векторы считаются равными, даже когда они расположены в разных местах чертежа.

2

Геометрические действия

Сложение и вычитание выполняются по правилам переноса стрелок. Эти действия удобно изображать на рисунке, чтобы сразу видеть, какой вектор получается в результате.

3

Координатная запись

Координаты делают векторы удобными для вычислений и проверки ответа. По ним можно быстро сравнить направления, определить длину и перейти к алгебраическим формулам.

4

Связь с реальностью

Векторная запись помогает описывать движение, силу и перемещение в понятном виде. Поэтому векторы соединяют геометрию с физикой и практическими задачами.



Векторы: когда число и направление работают вместе

Векторы помогают точно описывать движение, силу и перемещение, соединяя рисунок, координаты и реальные ситуации. Если помнить про длину и направление, задачи становятся понятнее и решаются увереннее.