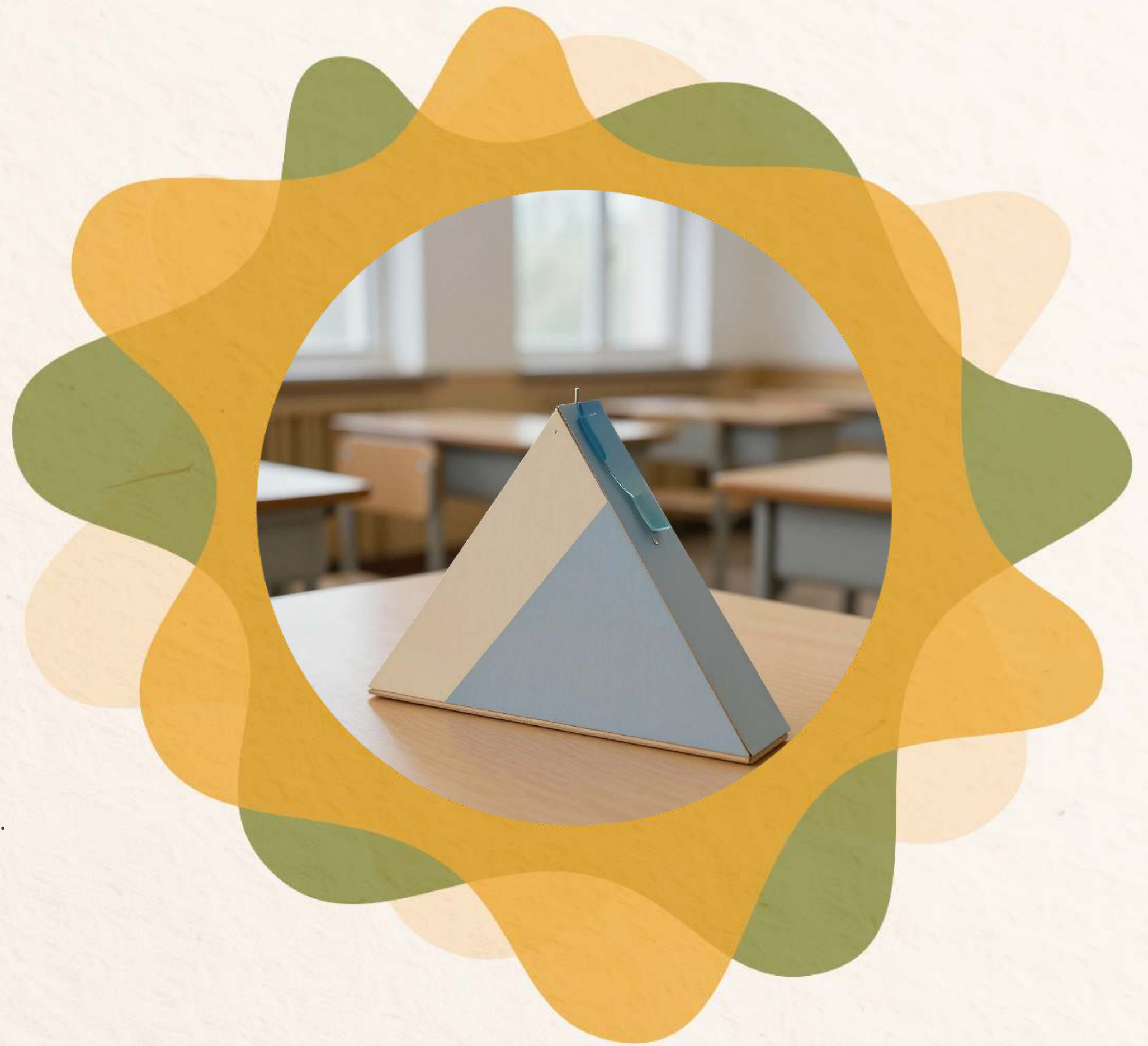


Теорема косинусов: СВЯЗЬ сторон и углов треугольника

Узнайте, как формула связывает стороны и углы
треугольника без прямого угла, и зачем она нужна.



Где появляется теорема косинусов и зачем она нужна

- Теорема косинусов помогает решать задачи с любыми треугольниками, когда прямого угла нет. Она особенно удобна, если известны две стороны и угол между ними или заданы все три стороны. Формула встречается в черчении, измерениях, навигации и инженерных расчётах, а в школе изучается в тригонометрии 9 класса.



c^2

Она показывает, как длина стороны выражается через две другие и угол между ними.

В записи $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ c^2 — ключевой результат, позволяющий вычислять сторону без прямого угла.

Школьный курс геометрии, тема «Теорема косинусов» (9 класс).

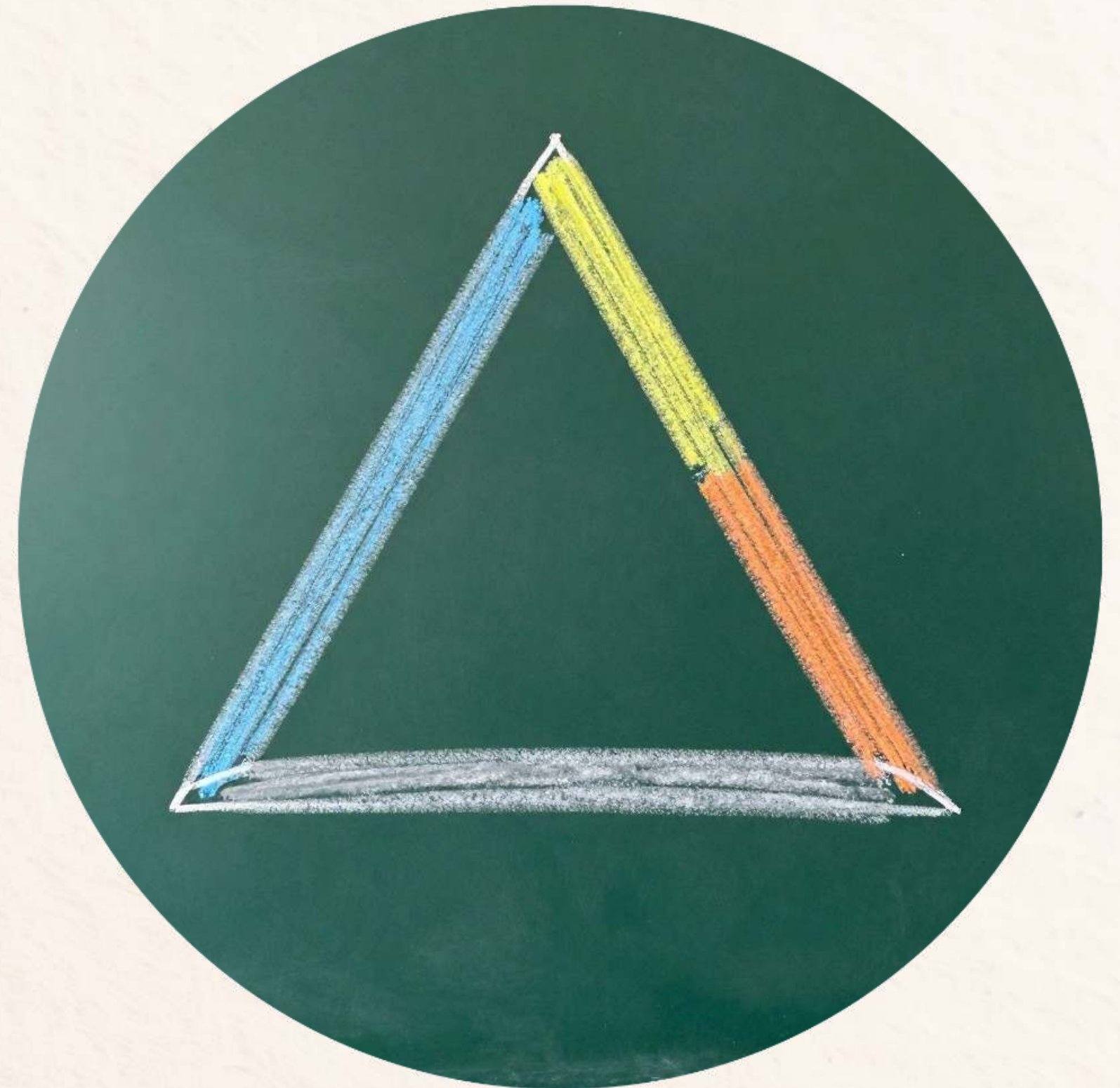
Обозначения на чертеже треугольника

Какие буквы что означают

На рисунке стороны обозначаются буквами a , b , c , а углы — A , B , C . Сторона c лежит напротив угла C , сторона a — напротив угла A , сторона b — напротив угла B . Это задаёт «карту» треугольника.

Почему важно сопоставление углов и сторон

Угол C расположен между сторонами a и b , поэтому именно эти две стороны участвуют в формуле при вычислении c . Если перепутать, какая сторона лежит напротив какого угла, всё дальнейшее решение станет неверным.



90°

При таком угле теорема косинусов превращается в известное равенство Пифагора.

Когда угол C равен 90° , $\cos 90^\circ = 0$, и формула даёт $c^2 = a^2 + b^2$ для прямоугольного треугольника.

Школьный курс геометрии (связь теорем косинусов и Пифагора).

Когда применять формулу и что находить

Ситуация	Что дано	Что находят
1	a , b и угол между ними	третью сторону
2	a , b и c	один из углов
3	прямоугольный треугольник	формула совпадает с Пифагором

— Три типовые ситуации подсказывают, какой вариант теоремы косинусов выбрать и что получится в ответе.

Теорема косинусов особенно полезна, когда нельзя обойтись только свойствами прямоугольного треугольника.

— Школьный курс геометрии, 9 класс.

Как найти третью сторону треугольника



Если известны две стороны и угол между ними, берут формулу $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Подставляют числа в нужные места, не забывая о знаках и степени у сторон.



Далее находят значение косинуса угла, выполняют вычисления и получают c^2 . После этого извлекают квадратный корень, чтобы перейти от c^2 к самой длине c .



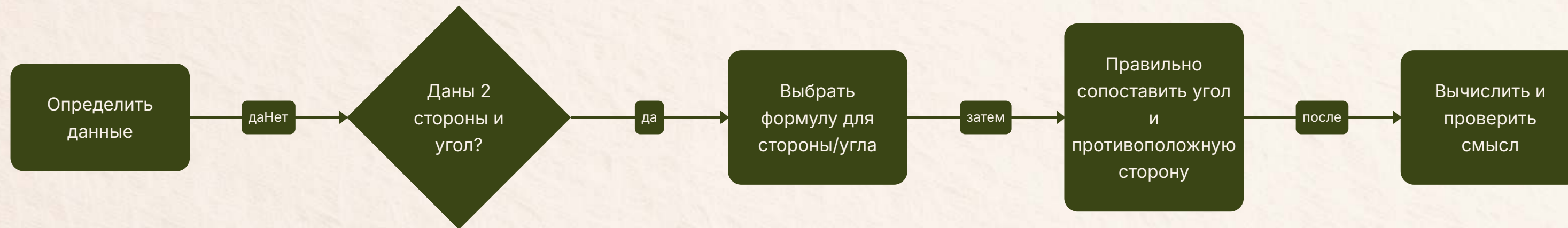
Полученная сторона выражается в тех же единицах, что и исходные данные: сантиметрах, метрах или миллиметрах. Этот алгоритм работает для любого треугольника, даже если он не прямоугольный.

Как найти угол по трём сторонам

- Когда известны все три стороны, формулу преобразуют: $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ab$. Так угловая величина появляется внутри косинуса и становится доступной для вычисления.
- После этого находят $\cos C$ с помощью таблицы или калькулятора. Затем по найденному значению определяют сам угол C , потому что косинус однозначно связан с величиной угла на школьном диапазоне.
- По знаку косинуса можно понять характер треугольника: при $\cos C = 0$ получаем прямой угол, при $\cos C > 0$ угол острый, а при $\cos C < 0$ — тупой.
- Такой способ помогает и при проверке: если угол по расчёту не подходит к условию (например, треугольник должен быть остроугольным), значит, где-то допущена ошибка.

Алгоритм решения задач по теореме косинусов

Стандартная последовательность действий, когда известны стороны и угол или только стороны.

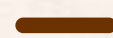


Типичные ошибки при решении



Путают стороны и углы

Часто ошибаются, когда перепутывают сторону, лежащую напротив угла, с соседними сторонами. В теореме косинусов это особенно критично, потому что от соответствия зависят все вычисления.



Забывают минус перед $2ab \cdot \cos C$

В формуле стоит вычитание $2ab \cos C$. Если потерять минус, получится совсем другое значение и ответ перестанет совпадать с условием задачи.



Проверяют угол в неверных единицах

Калькуляторы и таблицы по-разному работают с градусами и радианами. Если ввести угол не в тех единицах, косинус будет рассчитан неверно, и итоговый ответ окажется ошибочным.



Неправильно подставляют обозначения

Даже при правильной идее решения ошибка возникает из-за неверной подстановки букв a , b , c и угла A , B , C . Внимательно сверяйте, где какой угол расположен в треугольнике.

Как меняется сторона при изменении угла

При фиксированных a и b значение c определяется косинусом угла C : чем меньше $\cos C$, тем сильнее «увеличивается» противоположная сторона.

График показывает закономерность: при переходе от острых к тупым углам противоположная сторона чаще растёт, а при 90° совпадает с Пифагоровым случаем.

Расчёт по формуле $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ при $a=7$, $b=6$ (значения для иллюстрации).



Как теорема косинусов помогает в реальных измерениях



Поворот на местности и «лишние» сантиметры

Во дворе удобно измерить не прямую, а два отрезка: например, пройти по линии и сделать поворот. Если известны длины этих отрезков и угол поворота, расстояние между точками находится через теорему косинусов. Так получают



Геодезисты строят треугольники вместо прямых линий

На стройке или при разметке участка прямые измерения иногда мешают рельеф, заборы и техника. Геодезическая схема заменяет это серией треугольников: две стороны и угол между ними измеряются проще. Затем по



Карта «сшивается» по треугольникам

При составлении планов местности измеряют точки и углы в определённых узлах, а затем вычисляют расстояния между ними. Теорема косинусов связывает длины сторон треугольника и углы, поэтому формула работает при любом расположении точек. В итоге карта получается более точной, чем при одних прямых измерениях.

6,2 см

Значит, длина третьей стороны примерно
равна 6,2 см.

После подстановки $a=7$ см, $b=5$ см и $C=60^\circ$ получается $c \approx 6,2$ см.

Пример расчёта по формуле теоремы косинусов.

0

Следовательно, угол C равен 90° .

В примере $\cos C$ вычисляется как 0, поэтому треугольник прямоугольный.

Пример расчёта по преобразованной формуле теоремы косинусов.

Три главных случая применения формулы

Дано	Ищем	Как связать
Две стороны и угол между ними	Третью сторону	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$
Три стороны	Один из углов	$\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)$
Треугольник прямоугольный	Проверка и вывод длины	$\cos 90^\circ = 0 \quad c^2 = a^2 + b^2$

Сводка того, какие данные дают задачу и что именно можно найти.

Одна формула покрывает разные типы заданий: на стороны, на углы и на проверку прямоугольности.

Курс геометрии 9 класса (обобщение типовых задач).

Почему формула работает

Теорема косинусов учитывает угол между сторонами: даже при одинаковых a и b меняется взаимное расположение сторон, а значит меняется противоположная сторона.

Если угол C увеличивается, «разворот» треугольника становится шире: вклад $-2ab \cdot \cos C$ меняется так, что c стремится к большим значениям.

Когда угол уменьшается, треугольник «сжимается» к одной стороне: противоположная сторона становится короче, потому что $\cos C$ возрастает.

Поэтому в формуле стоит именно $\cos C$: он измеряет, насколько угол отклоняет треугольник от прямоугольного случая.

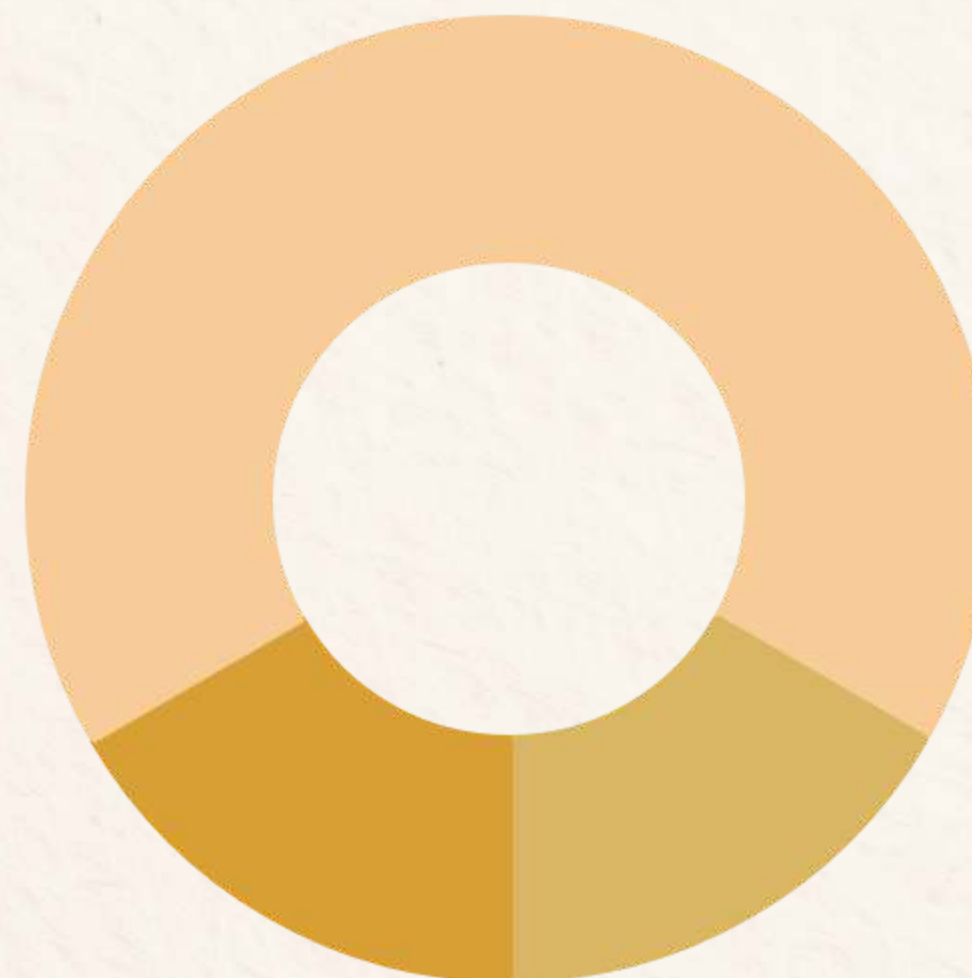
Значения косинуса и их смысл в формуле

0° 60° 90° 120° 180°

Знак косинуса влияет на то, как именно вычитание работает в выражении $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

При тупых углах $\cos C$ отрицателен, поэтому вычитание превращается в прибавление и c получается больше.

Классические значения $\cos$ для основных углов (из школьной тригонометрии).



Связь с другими темами геометрии



Если знать тригонометрические функции, теорема косинусов становится мостом от геометрии к формулам для углов и расстояний. Так легче выбирать стратегию решения задачи.



Рядом с теоремой синусов она помогает, когда треугольник не «подходит» под удобный прямоугольный случай. Тогда используют именно связь сторон и углов через косинус.



В школьной программе формула помогает не только находить неизвестные элементы треугольника, но и проверять ответы: вычисления дают числовой сигнал о правильности результата.

Что важно запомнить

Главная формула:
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Она
работает для любых
треугольников, где сторона
с лежит напротив угла C.

Если нужно найти угол,
формулу преобразуют: $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)$. По знаку
 $\cos C$ можно сразу понять
характер угла.

Самая частая причина
ошибок — перепутать
сторону и «свой» угол. От
правильного соответствия
между ними зависит весь
результат.

Теорема косинусов – универсальный инструмент

Теорема косинусов связывает стороны и углы треугольника в одной формуле, расширяя возможности теоремы Пифагора. Она помогает в задачах на вычисления и на практике измерений.