

Существование и единственность в геометрии

Два главных вопроса: можно ли
построить и определяют ли условия
ровно один объект?

Зачем это нужно именно в школе

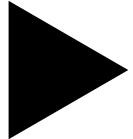


В геометрии 10 класса часто требуется найти объект по условиям: построить треугольник, определить точку пересечения, найти расстояние, угол или радиус. Важно не только «получить ответ», но и обосновать, что он возможен и единственен. Поэтому существование и единственность — часть строгого доказательства.



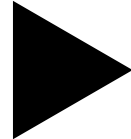
Что означает существование геометрического объекта

Проверяем согласованность условий



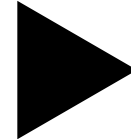
Существование означает, что фигура или точка с заданными свойствами реально достижимы. В треугольнике это значит, что заданные элементы не противоречат друг другу и образуют допустимую форму.

Говорим о точках пересечения



Для точки пересечения важно наличие хотя бы одной общей точки у двух линий: прямых, либо кривой и прямой. Если общей точки нет, объект «не находится».

Выражаем существование доказательством



В доказательствах существование подтверждают построением, ссылкой на теорему или анализом условий. Так ответ становится полным, а не предположением.

Что означает единственность в геометрической задаче

- ▶ Единственность означает, что объект с заданными свойствами существует только в одном виде, с точностью до совмещения. Для построений это особенно важно: могут быть и зеркальные варианты.
- ▶ Если условия полностью фиксируют искомую фигуру или точку, то любые допустимые построения приводят к одному результату. Тогда «получить ответ» означает получить именно единственный ответ.
- ▶ Когда единственность нарушена, задача имеет несколько допустимых ответов, и каждый из них удовлетворяет исходным условиям. Это требует учитывать все варианты, а не выбирать первый попавшийся.
- ▶ Именно поэтому единственность дополняет существование: она объясняет, определяют ли условия один объект или оставляют свободу выбора. Без неё ответ может быть формально правильным, но неполным.

Существование и единственность: различие на геометрических примерах

Понятие	Смысл вопроса	Геометрический результат	Пример из курса
Существование	Можно ли построить?	Фигура или точка найдены	Треугольник по трём сторонам 3, 4 и 5 существует
Единственность	Единственна ли построенная фигура?	Один ответ или несколько равноправных	Треугольник по трём сторонам определяется однозначно с точностью до равенства
Отсутствие существования	Есть ли совместимые условия?	Объект построить нельзя	Стороны 2, 3 и 6 не образуют треугольник
Множественность	Сколько решений допускают условия?	Несколько допустимых вариантов	Точка на равном расстоянии от двух точек лежит на серединном перпендикуляре

Таблица помогает отличить «есть ли решение» от «сколько решений допускают условия».

Обобщение школьных формулировок тем «существование/единственность».

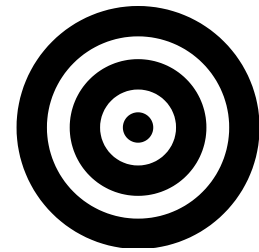
Условия могут быть: (1) несовместимыми (решений нет), (2) совместимыми, но не фиксирующими ответ (решений несколько), либо (3) совместимыми и полностью определяющими объект (решение единственно).

Почему важна проверка полноты ответа



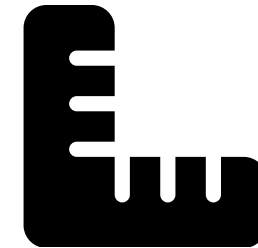
Не только «найти», но и «убедиться»

Геометрическая задача считается содержательной, когда выяснены возможность построения и число решений. Одна и та же формулировка может привести к одному ответу, двум симметричным или вообще не дать решений.



Точность в задачах на построение

В построениях особенно заметно, что ответ зависит от взаимного расположения фигур. Например, окружность может пересекать прямую, касаться или не иметь общих точек. Без проверки вывод будет неточным.



Снимаем риск случайных решений

Если не проверить условия на совместимость и определённую, можно получить ответ, который не удовлетворяет всем требованиям или не отражает реальную геометрию. Проверка делает рассуждение строгим.

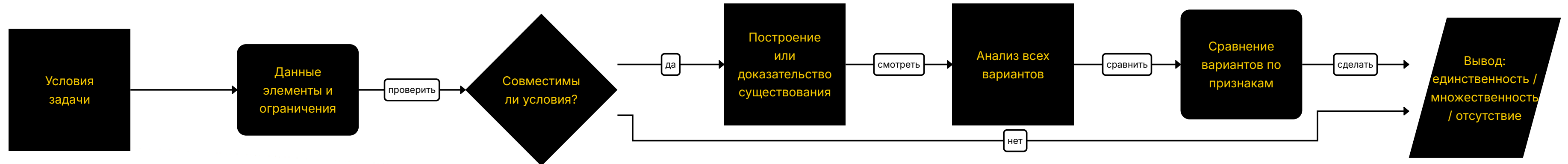


Единственность превращает гипотезу в доказательство

Когда условия гарантируют ровно один результат, это нужно обосновать. Тогда решение перестаёт быть догадкой: оно становится доказанным и соответствует заданной формулировке задачи.

Алгоритм анализа геометрической задачи

Условия → существование → перебор вариантов → вывод о
количестве решений



Существование треугольника по данным сторонам

Нужны «правильные» длины

Для существования треугольника с тремя сторонами требуется неравенство треугольника: сумма любых двух сторон больше третьей. Это условие обеспечивает допустимую геометрическую форму.

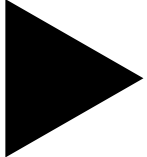
Проверяем все три неравенства

Если хотя бы одно из неравенств нарушено, построить треугольник нельзя: отрезки не могут сложиться в замкнутую фигуру. Тогда существование отсутствует.

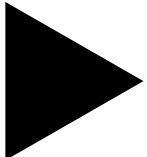
Пример, где всё совпадает

Стороны 3, 4 и 5 удовлетворяют неравенствам треугольника, значит треугольник существует. По ним можно выполнить построение и получить реальную фигуру.

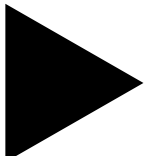
Единственность треугольника по трём сторонам



Если треугольник существует, то по трём сторонам он определяется единственным образом с точностью до равенства. Это содержание признака равенства треугольников по трём сторонам.

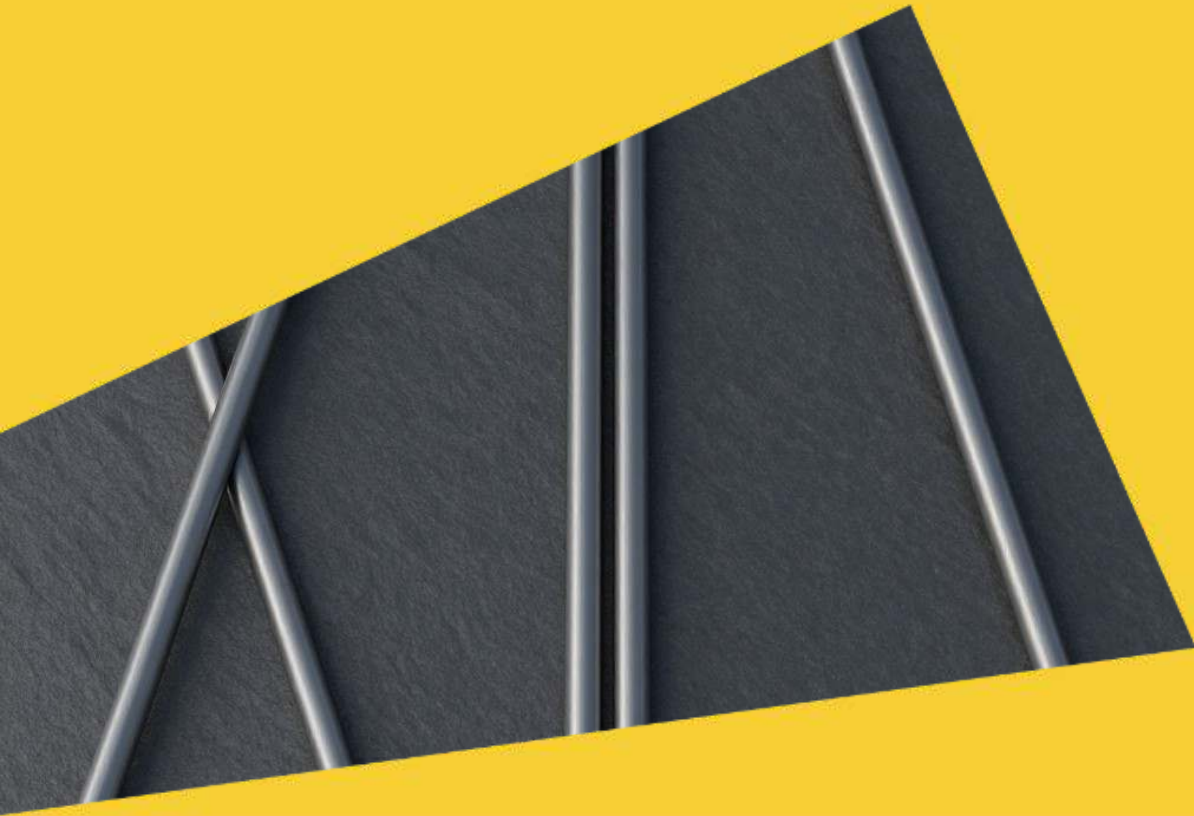


Любые два треугольника с одинаковыми длинами соответствующих сторон равны: совпадают по форме и размерам. Поэтому различия остаются только в выборе положения на плоскости.



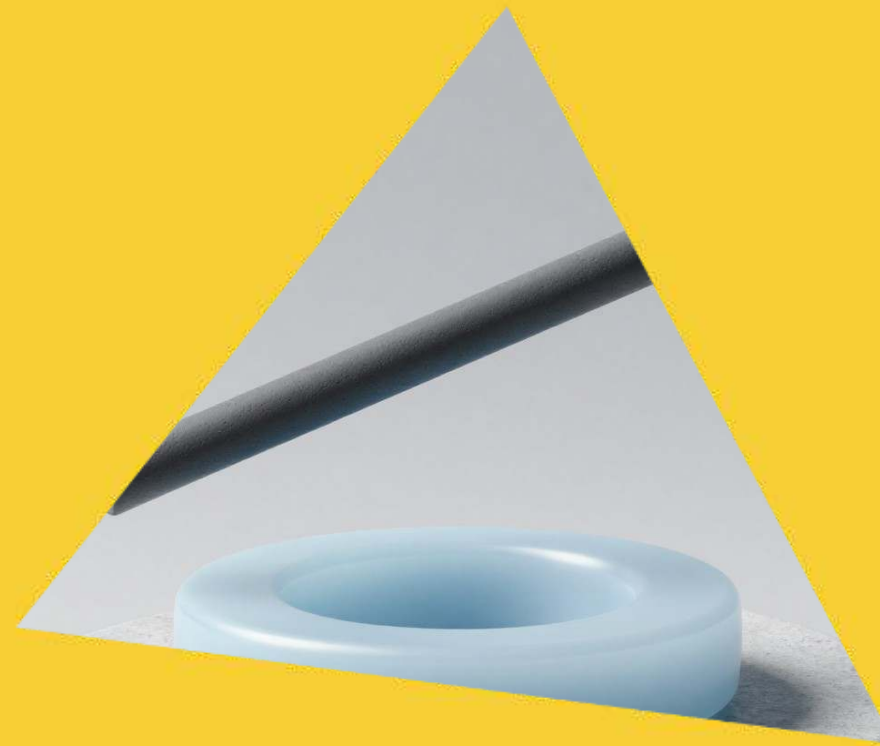
На практике это означает, что возможна зеркальная перестановка, но геометрически это один и тот же треугольник «по смыслу равенства». Условия полностью фиксируют результат.

Геометрическая интуиция: пересечения, касания и отсутствие общих точек



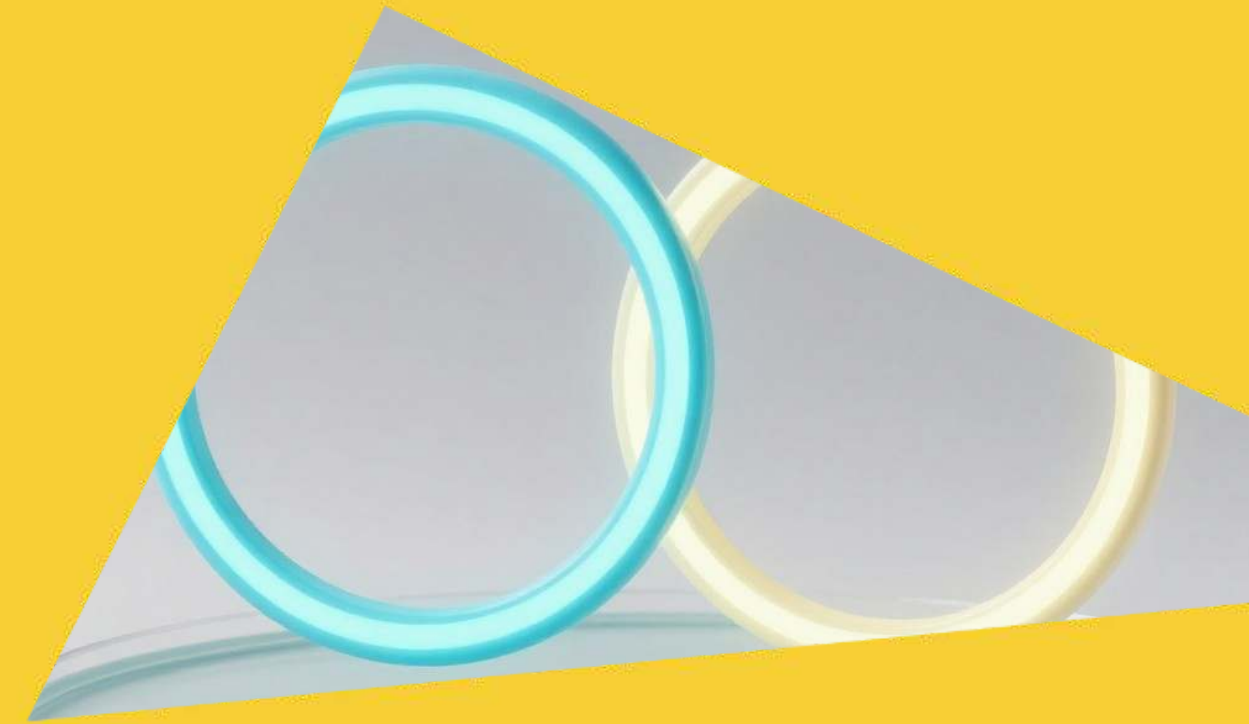
Когда две линии «встречаются»

Две прямые могут пересекаться ровно в одной точке, быть параллельными (общих точек нет) или совпадать (общих точек бесконечно много). На рисунке это легко отличить по положению в плоскости и направлению прямых.



Окружность и прямая: три характера общего

Прямая и окружность могут иметь две общие точки — если прямая пересекает окружность, — или одну общую точку при касании. Есть и третий случай: прямая расположена так, что общих точек не возникает. Эти ситуации напрямую отражают число решений.



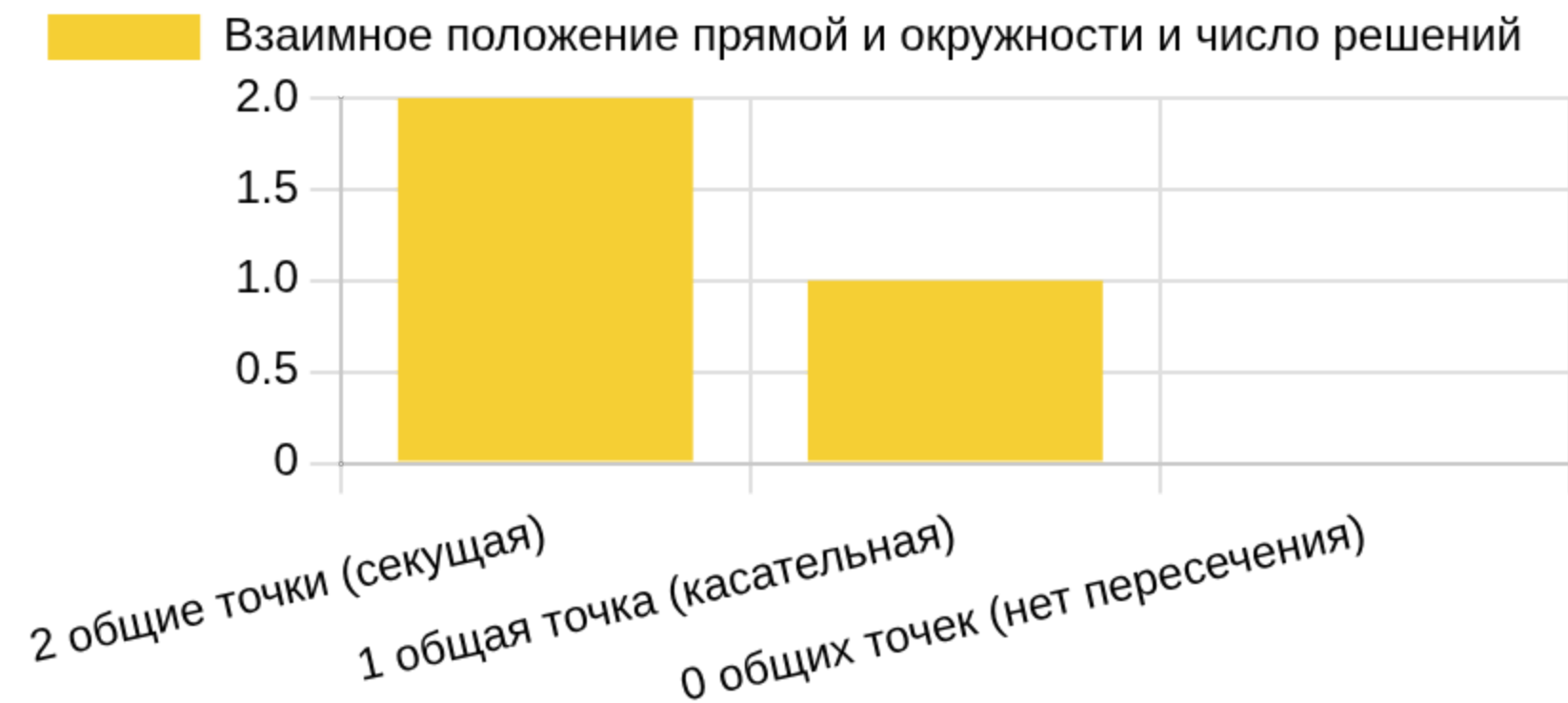
Две окружности: пересечение, касание и совпадение

Две окружности могут пересекаться в двух точках, касаться (имеется одна общая точка) или вообще не иметь общих точек. Если же окружности совпадают, общих точек бесконечно много. Такой «классификационный взгляд» помогает предсказывать ответы до вычислений.

Число решений в зависимости от положения прямой и окружности

Если в задаче требуется найти точки пересечения прямой с окружностью, то число решений напрямую совпадает с числом общих точек.

Диаграмма помогает быстро классифицировать ситуацию: секущая даёт два решения, касательная — одно, внешнее положение — ни одного.



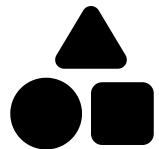
Обобщение школьного курса геометрии (свойства взаимного положения прямой и окружности), без внешних источников.

Построения циркулем и линейкой как проверка существования



Окружность по центру и радиусу

Построение окружности возможно всегда при заданном центре и положительном радиусе: окружность существует как множество точек, равноудалённых от центра на данное расстояние.



Серединный перпендикуляр к отрезку

Для любого ненулевого отрезка серединный перпендикуляр существует. Через середину отрезка проходит ровно одна прямая, перпендикулярная отрезку, и она задаёт множество точек.



Прямая и отрезок: базовые операции

Линейкой проводят прямую по двум заданным точкам и откладывают отрезок нужной длины. Эти операции задают опорные геометрические объекты и проверяют непротиворечивость условий.



Биссектриса угла

Биссектриса существует для любого ненулевого угла: она делит угол на две равные части. По построению можно затем проверить, требуется ли одно решение или допускаются варианты.

Условия единственности в геометрических построениях

▶ Единственность возникает, когда данные фиксируют объект без «свободы выбора». Тогда допустимый элемент определяется однозначно, и полученная конструкция не допускает зеркально-симметричных вариантов как разных решений.

▶ Серединный перпендикуляр к отрезку единственен: через середину проходит только одна прямая, перпендикулярная данному отрезку. Значит, множество точек на равных расстояниях от концов определяется однозначно.

▶ Биссектриса угла также однозначна, а прямая через заданную точку, перпендикулярная заданной прямой, определяется точно. Если же задаётся лишь «место точек», единственность может нарушаться.

Признаки равенства треугольников как источник единственности

- ▶ Признаки равенства по трём сторонам, по стороне и двум прилежащим углам, а также по двум сторонам и углу между ними задают строгую «жёсткость» формы треугольника.
- ▶ На практике это позволяет доказывать единственность неизвестных элементов: высоты, медианы, биссектрисы, сторон и углов. Достаточно показать, что два кандидата равны соответствующими признаками.
- ▶ Если в задаче даны наборы величин, попадающие под эти признаки, то любой построенный треугольник с такими данными совпадает с другим. Тем самым число геометрических вариантов сокращается до одного.
- ▶ В результате равенство треугольников работает как универсальный инструмент строгого вывода: любые два решения, удовлетворяющие исходным данным, оказываются одним и тем же треугольником по всем элементам.

Существование и единственность на координатной плоскости

Задание фигур уравнениями

На координатной плоскости точки, прямые и окружности часто задаются уравнениями. Проверка существования сводится к вопросу: имеет ли система уравнений хотя бы одно решение.

Анализ пересечений прямых

Две прямые могут иметь одну общую точку (если угловые коэффициенты различны), либо не иметь общих точек (если прямые параллельны), либо иметь бесконечно много общих точек (если прямые совпадают).

Пересечение прямой и окружности

Для прямой и окружности возможны 0, 1 или 2 общие точки. Соответственно, задача на нахождение точек пересечения может иметь отсутствие решений, одно решение или два решения.

Графическая интерпретация

Координатный метод делает классификацию наглядной: по графику видно взаимное расположение и легче контролировать единственность. Итог подтверждается решением соответствующих уравнений.

Когда единственности нет



Единственность может исчезать из-за симметрии условий: часто одинаковые ограничения допускают зеркально отражённые варианты. Тогда решения различны, хотя оба удовлетворяют заданным величинам.



Недостаток данных тоже приводит к множеству ответов. Например, если известны только расстояния до двух точек, искомое место точек образует серединный перпендикуляр, а не одну точку.



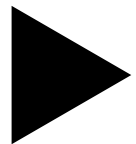
Иногда при наличии окружности задача даёт несколько точек на ней: точек пересечения может быть две, одна или ни одной — в зависимости от дополнительных ограничений. В этом случае отсутствие единственности согласуется с условием.

Корректность геометрической задачи

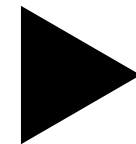
- ▶ Корректная задача в школьной формулировке имеет либо существующее и единственное решение, либо явно описанный набор всех решений. Если условия противоречат друг другу, решение не существует вовсе.
- ▶ Когда данных недостаточно, ответ становится неоднозначным: одному набору ограничений могут соответствовать несколько геометрических объектов. Тогда цель задачи — перечислить возможные варианты или их характеристики.
- ▶ В геометрии 10 класса корректность проверяют через неравенства (например, согласованность длин), признаки равенства фигур и свойства параллельности и перпендикулярности.
- ▶ Дополнительно анализируют взаимное расположение линий и окружностей: число пересечений напрямую влияет на количество допустимых решений и помогает выявить скрытую множественность.

Как доказывают существование и единственность в геометрии

Проверка условий возможности

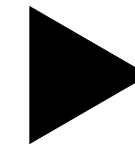


Сначала обосновывают существование: через явное построение, ссылку на теорему или проверку того, что условия не противоречат друг другу. Часто опираются на неравенства и допустимость параметров.



Установление всех вариантов

Далее рассматривают возможные случаи взаимного расположения. Цель — отделить ситуацию с одним пересечением от случаев с двумя, а также выявить параметры, при которых решения исчезают.



Доказательство единственности

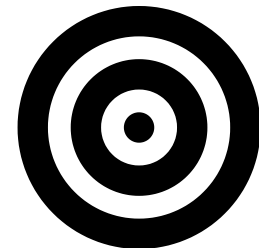
Чтобы доказать единственность, сравнивают любые два предполагаемых решения и показывают их совпадение. Если находятся два различных допустимых объекта, единственность опровергается.

Главные идеи для запоминания в теме



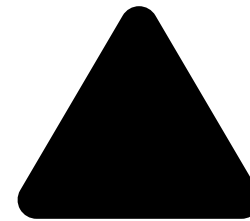
Существование — есть ли объект

Существование отвечает на вопрос «можно ли построить или найти?»: у условий есть как минимум один геометрический смысл. Проверка опирается на совместимость ограничений и число общих точек.



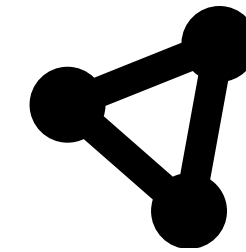
Единственность — задают ли условия ровно один ответ

Единственность означает, что допустимым оказывается только один объект (с учётом равенства). Её доказывают через признаки равенства и анализ, исключающий симметричные варианты как разные решения.



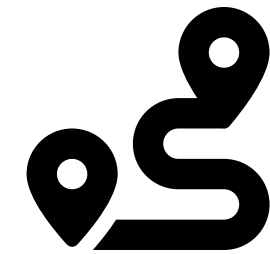
Треугольники как основной полигон

Во многих задачах критерии существования и единственности проявляются в треугольниках. Здесь особенно полезны неравенство треугольника и признаки равенства треугольников для строгого вывода.



Окружности и касание

При работе с окружностями число решений связывают с взаимным расположением: две точки пересечения, касание или отсутствие общих точек. Это помогает сразу классифицировать ответ.



Построения и координаты

Циркуль и линейка дают конструктивные способы проверки существования, а координаты переводят вопросы в поиск решений уравнений. Вместе эти подходы формируют полный, не поверхностный ответ.

Итог: строгий геометрический ответ

Проверка существования и единственности превращает решение из «найдено» в «обосновано»: мы знаем, сколько допустимых вариантов существует и почему именно этот ответ является правильным для условия.

