

Коллинеарные и компланарные векторы

Векторы помогают увидеть направление и расположение фигур.



Зачем изучать векторы в 7 классе

На первых уроках геометрии векторы учат сравнивать направления, замечать общую прямую или плоскость и увереннее читать чертежи, координаты и простые пространственные модели.



Что такое вектор

Стрелка на чертеже

Вектор изображают отрезком со стрелкой. Начало показывает, откуда он направлен, а конец — куда. По такой записи удобно читать направление на рисунке.

Длина и модуль

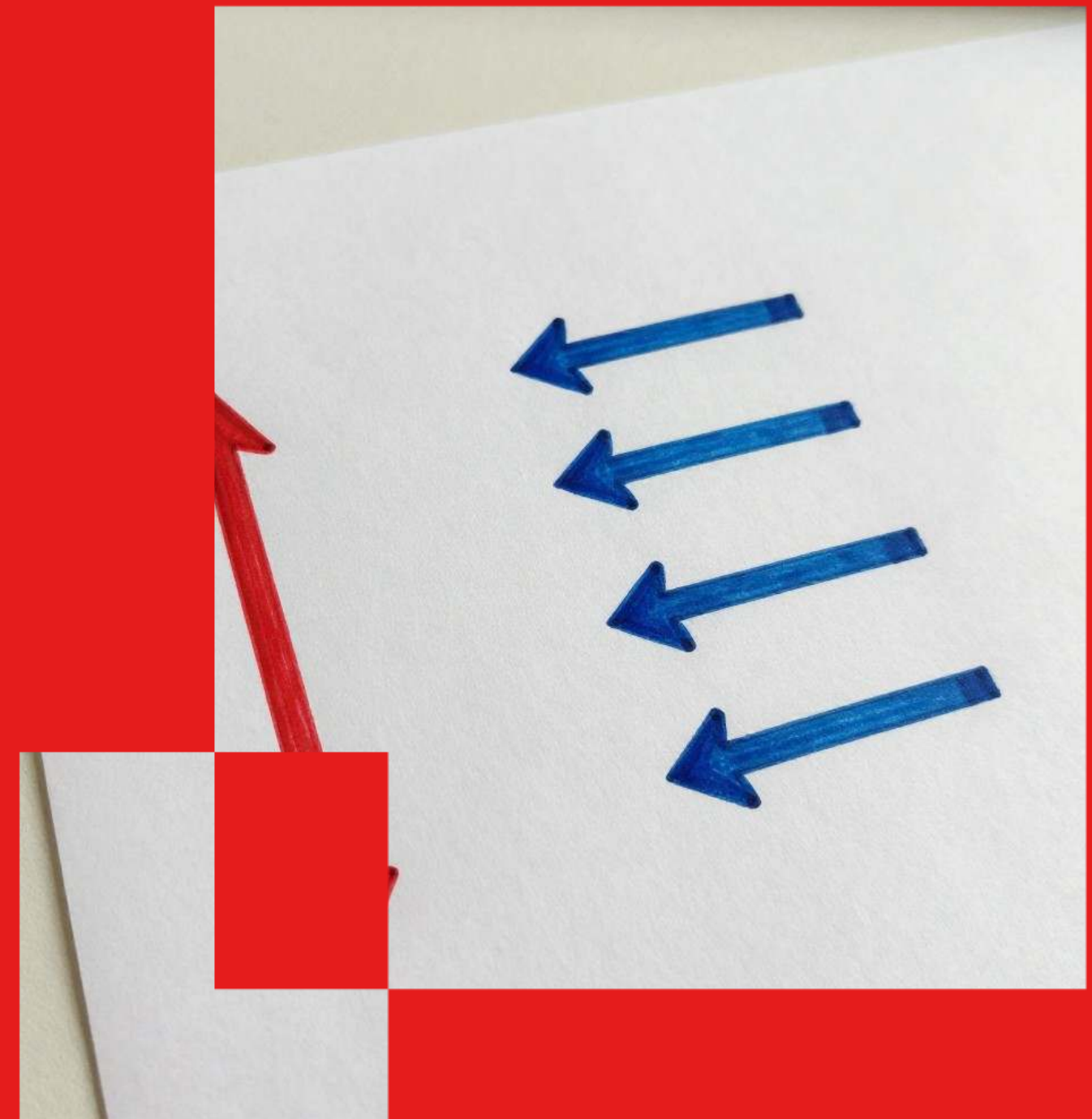
У каждого вектора есть длина, или модуль. Она показывает, насколько «длинной» является стрелка, и не зависит от того, где вектор расположен на листе.

Равные векторы

Векторы считают равными, если у них одинаковые длина и направление. При этом они могут находиться в разных местах чертежа и всё равно быть одинаковыми по смыслу.

Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину 0 и не указывает ни в какую сторону. Он нужен в геометрии как особый случай, когда направление отсутствует.



Коллинеарные векторы

1 Одна линия

Коллинеарные векторы лежат на одной прямой. Даже если они нарисованы в разных местах, их направления связаны одной линией, что удобно видеть на чертеже.

2 Параллельные прямые

Если векторы находятся на параллельных прямых, они тоже считаются коллинеарными. Такое расположение показывает, что направление у них совпадает по линии, хотя сами прямые не пересекаются.

3 Два случая направления

Коллинеарные векторы могут быть сонаправленными или противоположно направленными. Это помогает быстро понять, смотрят ли стрелки в одну сторону или в разные.



Как выглядят коллинеарные векторы на рисунке

На одной прямой

На рисунке удобно показать два вектора, лежащие на одной прямой. Тогда сразу видно, что их направления связаны одной линией, а не случайным положением на листе.

На параллельных прямых

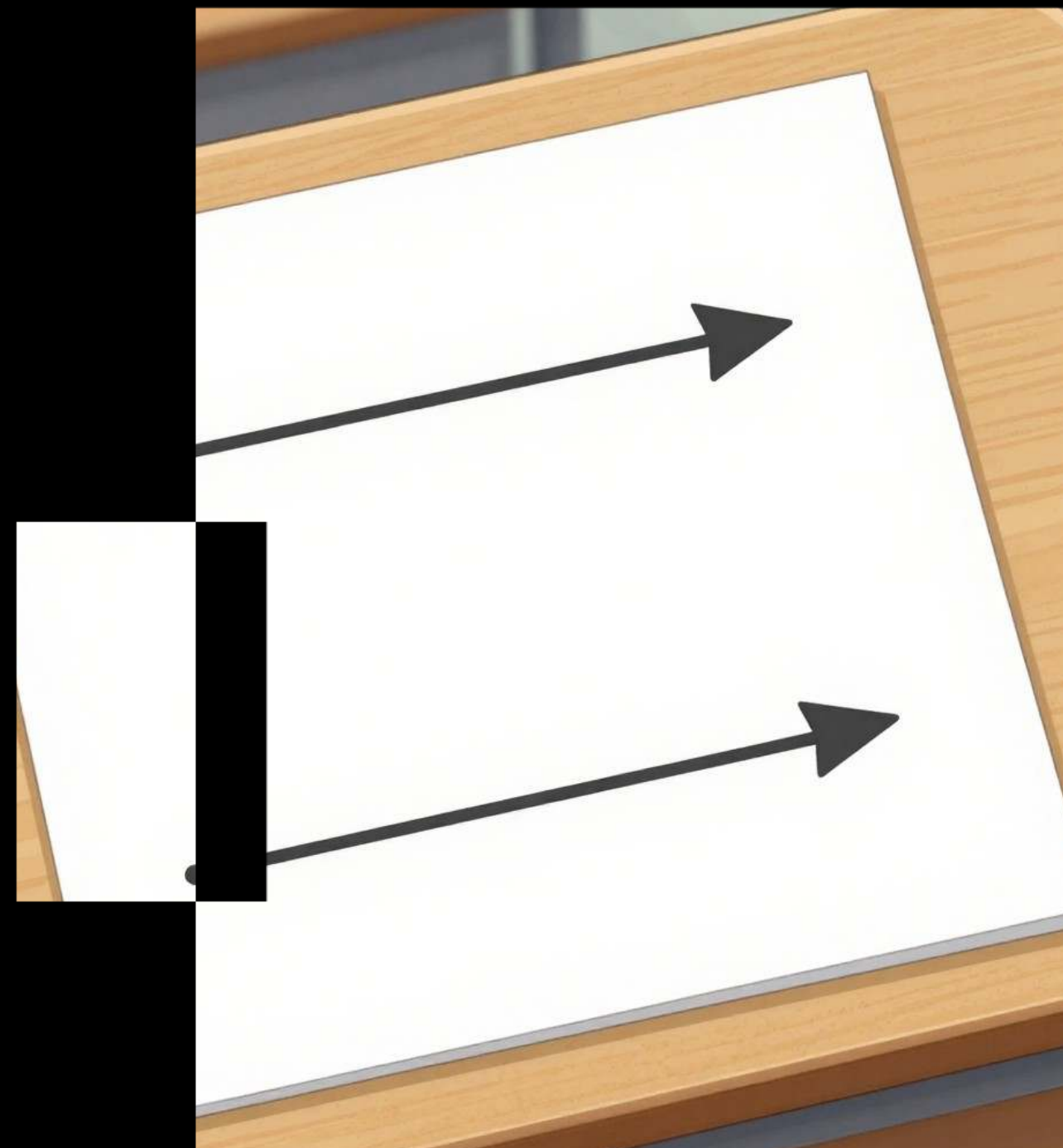
Ещё один наглядный пример — векторы на параллельных прямых. Они не совпадают по месту, но сохраняют одно направление, поэтому остаются коллинеарными.

Сонаправленные стрелки

Если обе стрелки смотрят в одну сторону, векторы сонаправлены. Такой рисунок помогает запомнить, что коллинеарность не означает противоположное направление.

Обозначения отрезков

Подписи АВ и CD связывают стрелки с буквенным обозначением отрезков. Это делает рисунок понятнее и помогает не путать сам вектор с его местом на чертеже.



Признаки коллинеарности

1 Умножение на число

Если один ненулевой вектор можно получить из другого умножением на число, векторы коллинеарны. Это самый удобный признак для понимания связи между ними.

2 Положительное число

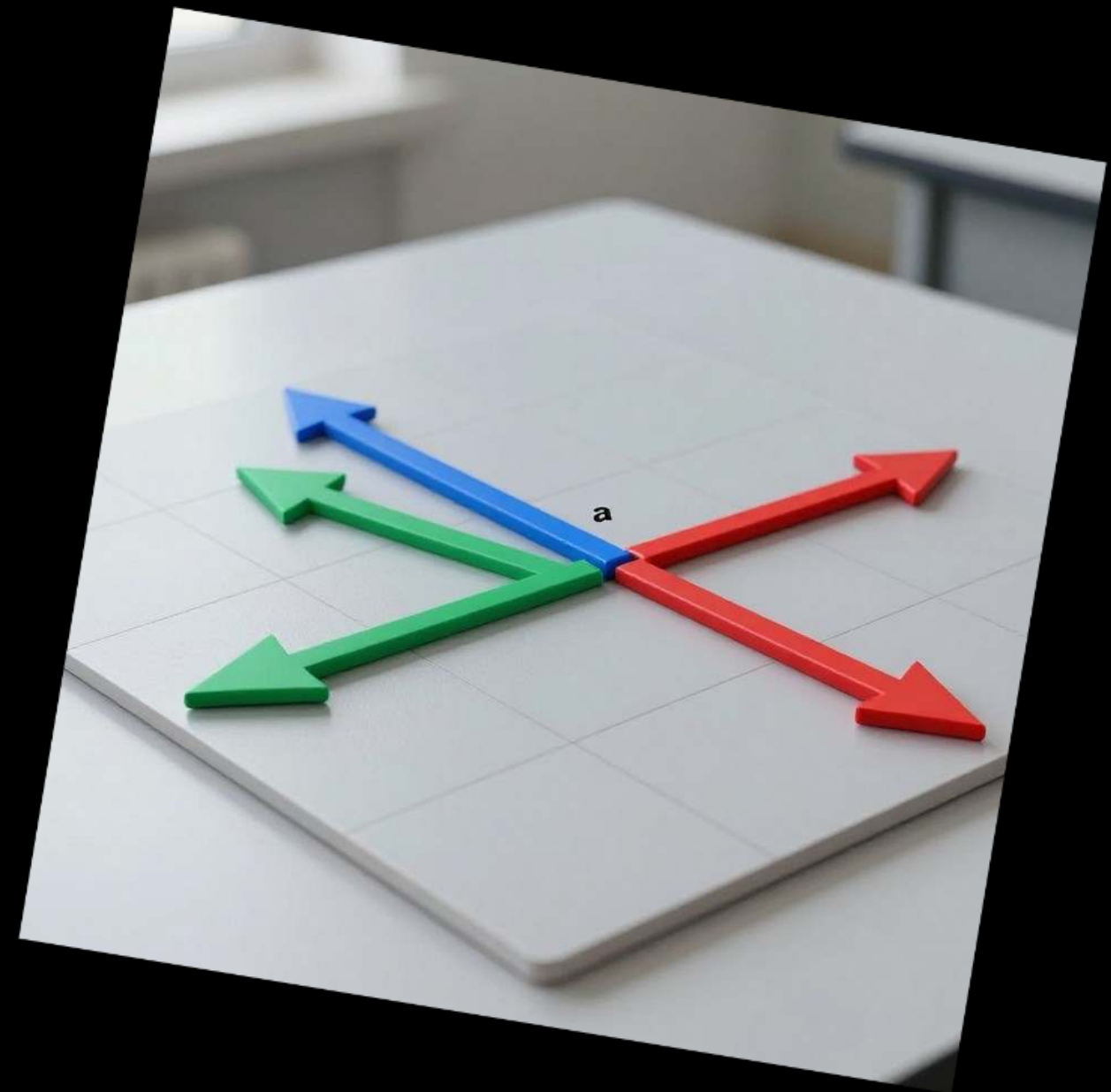
При умножении на положительное число вектор сохраняет направление. Например, a и $2a$ сонаправлены, поэтому они не только коллинеарны, но и смотрят одинаково.

3 Отрицательное число

Если множитель отрицательный, направление меняется на противоположное. Поэтому a и $-3a$ тоже коллинеарны, хотя их стрелки направлены в разные стороны.

4 Координатная проверка

В координатной плоскости коллинеарность часто проверяют по пропорциональности координат. Это помогает быстро определить, лежат ли векторы на одной линии направления.

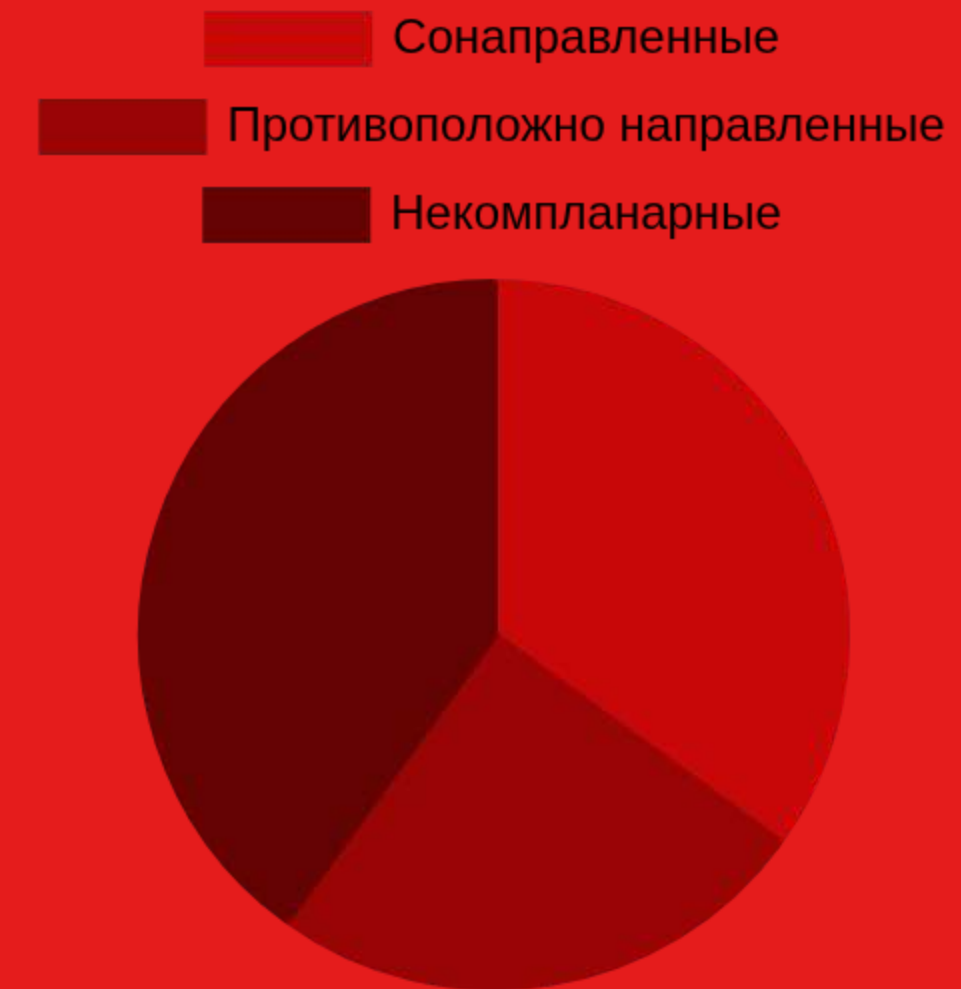


Виды расположения векторов по направлению

Диаграмма показывает, что коллинеарные векторы бывают двух типов: с одинаковым и с противоположным направлением.

Наибольшая доля у неколлинеарных векторов, но коллинеарность объединяет два разных случая направления.

Учебная классификация для школьного курса геометрии



Координатный признак коллинеарности

Пары координат

Для векторов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) проверяют, пропорциональны ли их координаты. Если пропорция сохраняется, векторы лежат на одном направлении.

Отношения координат

Когда $x_1 / x_2 = y_1 / y_2$ и знаменатели не равны нулю, векторы коллинеарны. Этот способ особенно удобен в задачах на координатной плоскости.

Проверка через произведения

В школьной практике часто используют равенство $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$. Оно помогает избежать дробей и быстро проверить коллинеарность.

Осторожность с нулём

При вычислениях важно учитывать нулевые координаты и не делить на ноль. В таких случаях удобнее выбирать другой способ проверки.



Примеры проверки коллинеарности

Сравним несколько пар векторов и увидим, когда пропорция координат сохраняется, а когда нет.

Коллинеарность определяется не длиной, а общей линией направления и пропорциональностью координат.

Векторы	Результат	Причина
(2,4) и (1,2)	коллинеарны	координаты пропорциональны
(3,6) и (-1, -2)	коллинеарны	направление противоположно
(2,5) и (1,2)	не коллинеарны	пропорция нарушена

Примеры по теме школьной геометрии

Что такое компланарные векторы

1 Одна плоскость

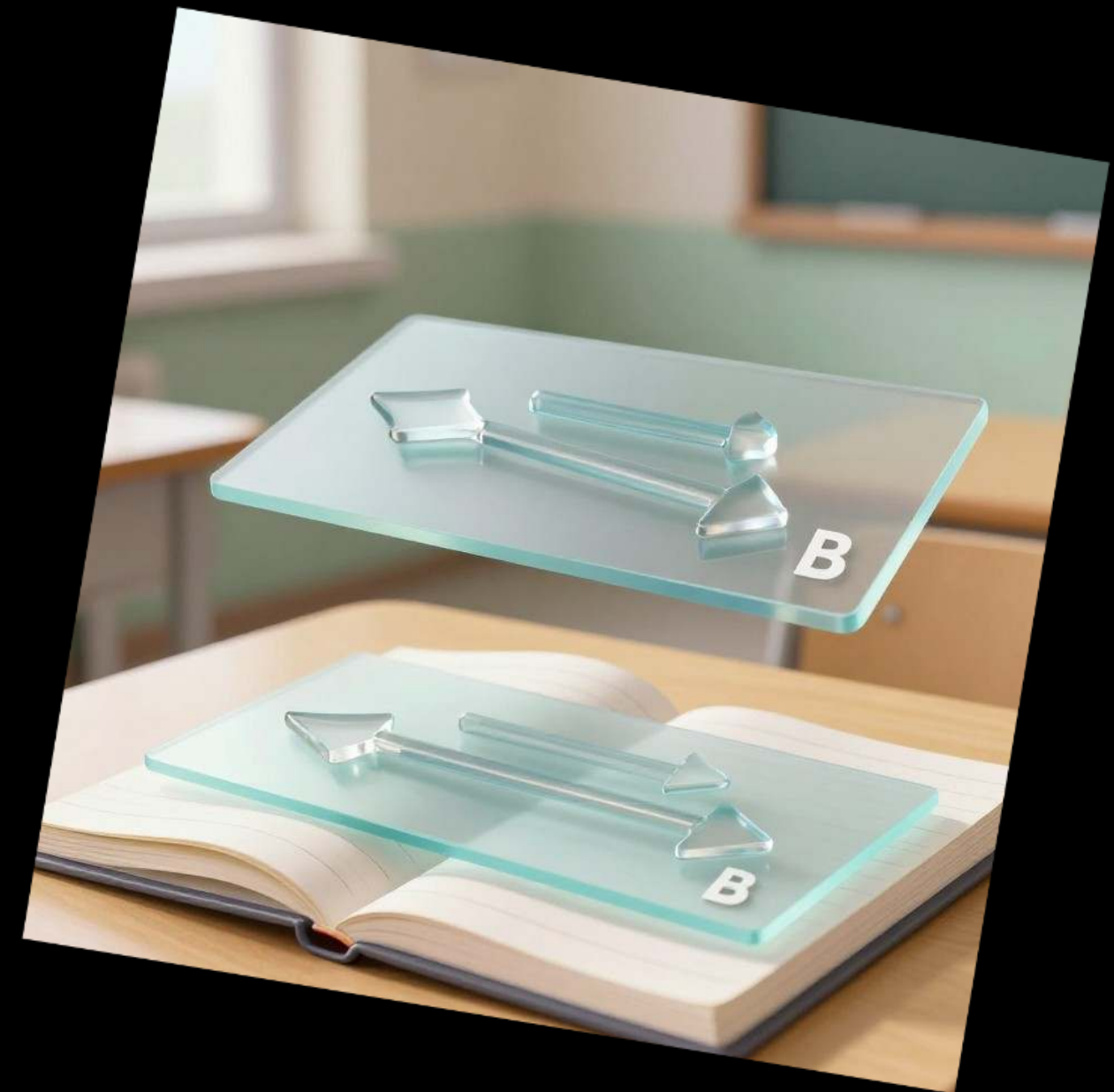
Компланарные векторы лежат в одной плоскости. Если их можно изобразить на одном листе без перехода в пространство, значит, они компланарны.

2 Параллельные плоскости

Иногда векторы находятся в параллельных плоскостях и всё равно считаются компланарными. Важно, что их можно совместить в одной общей плоскости.

3 Школьный смысл

В 7 классе чаще всего рассматривают векторы на плоских рисунках, чертежах и координатной плоскости. Это делает компланарность наглядной и понятной.



Компланарность в окружающих предметах

Поверхность стола

Стол, тетрадный лист и доска хорошо показывают одну плоскость. Если представить векторы на этих поверхностях, их направления можно сравнивать, не выходя за пределы плоскости.

Векторы на бумаге

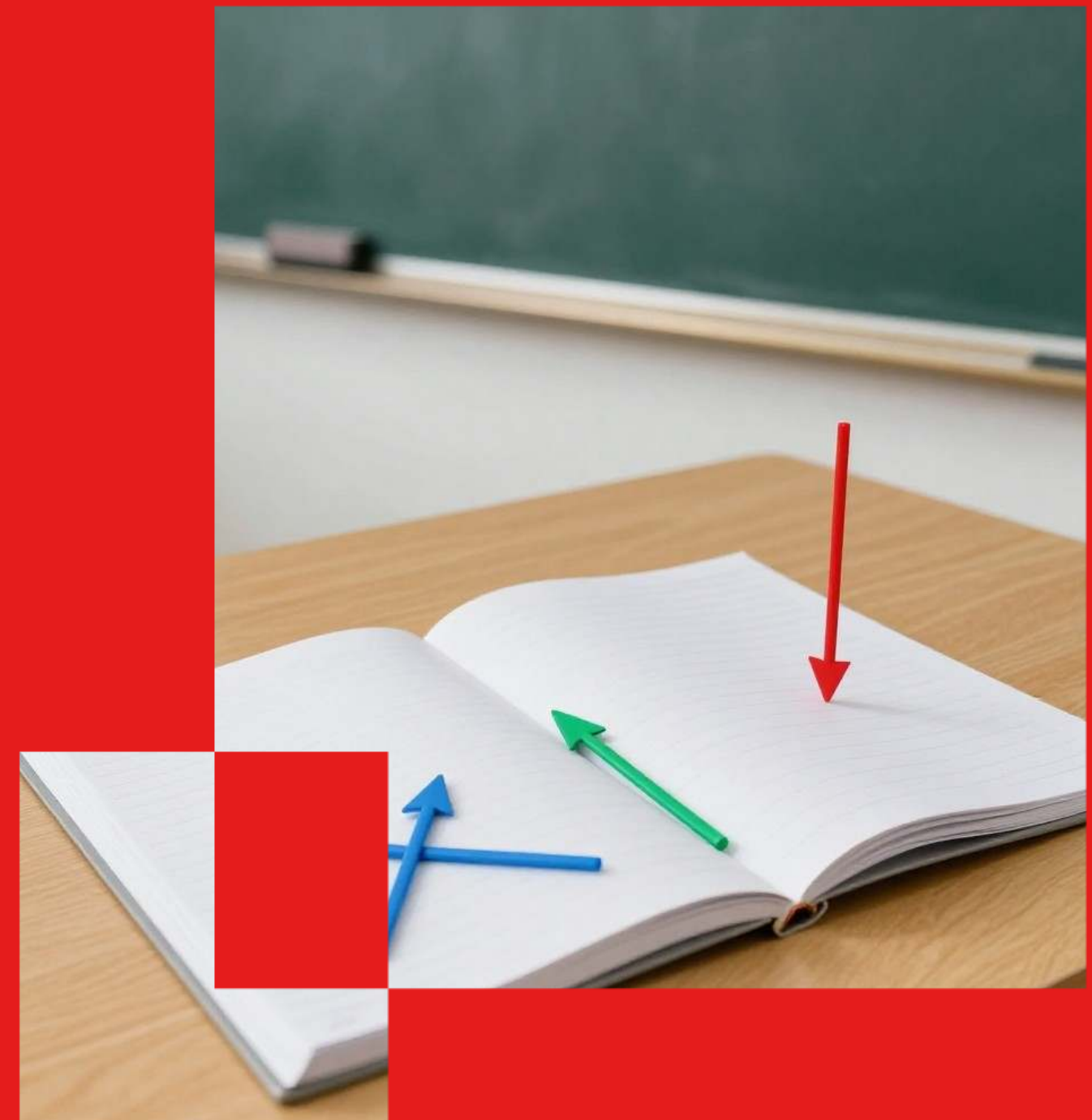
Векторы, нарисованные на листе, всегда лежат в одной плоскости. Поэтому на плоском чертеже удобно видеть их расположение, направление и взаимное положение без сложных построений.

Выход из плоскости

Если один вектор направлен вверх от поверхности стола, он уже не лежит в той же плоскости. Такой пример помогает увидеть разницу между плоским и пространственным расположением.

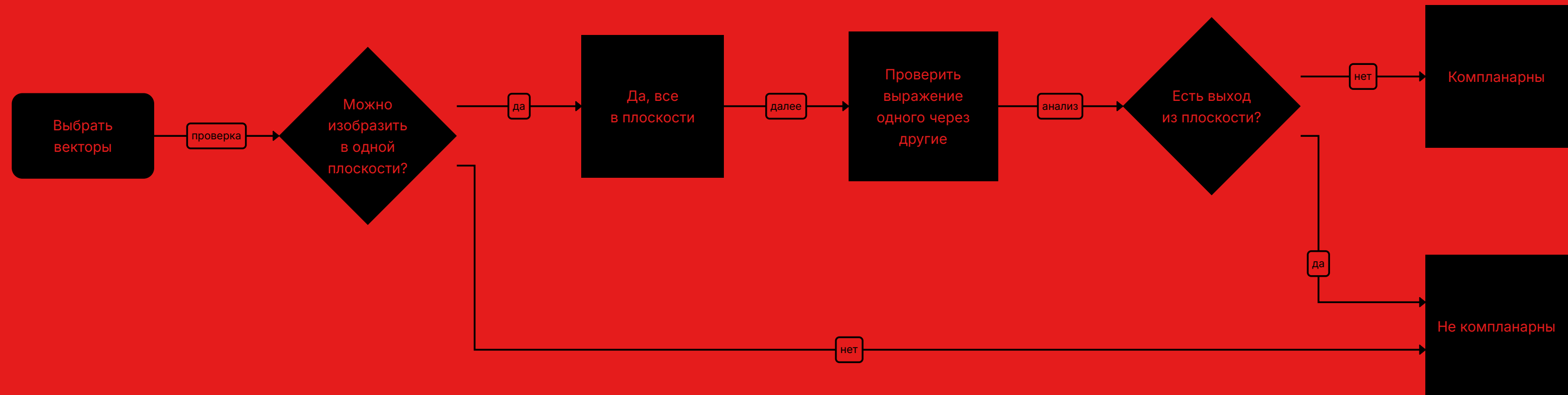
Зачем это нужно

Понимание компланарности помогает правильно читать чертежи, различать плоские и объёмные ситуации и быстрее решать задачи, где важно, можно ли изобразить все векторы на одной поверхности.



Проверка компланарности шаг за шагом

Схема показывает, как в школьной задаче определить, лежат ли векторы в одной плоскости.



Признак компланарности через сумму векторов

1 Два вектора как основа

Сначала берут два вектора, которые лежат в одной плоскости. Они задают направление, относительно которого проверяют, можно ли разместить третий вектор без выхода из этой плоскости.

2 Третий вектор через первые

Если третий вектор можно представить как сочетание двух других, он не задаёт новое пространственное направление. Значит, все три вектора можно расположить в одной плоскости.

3 Школьный смысл признака

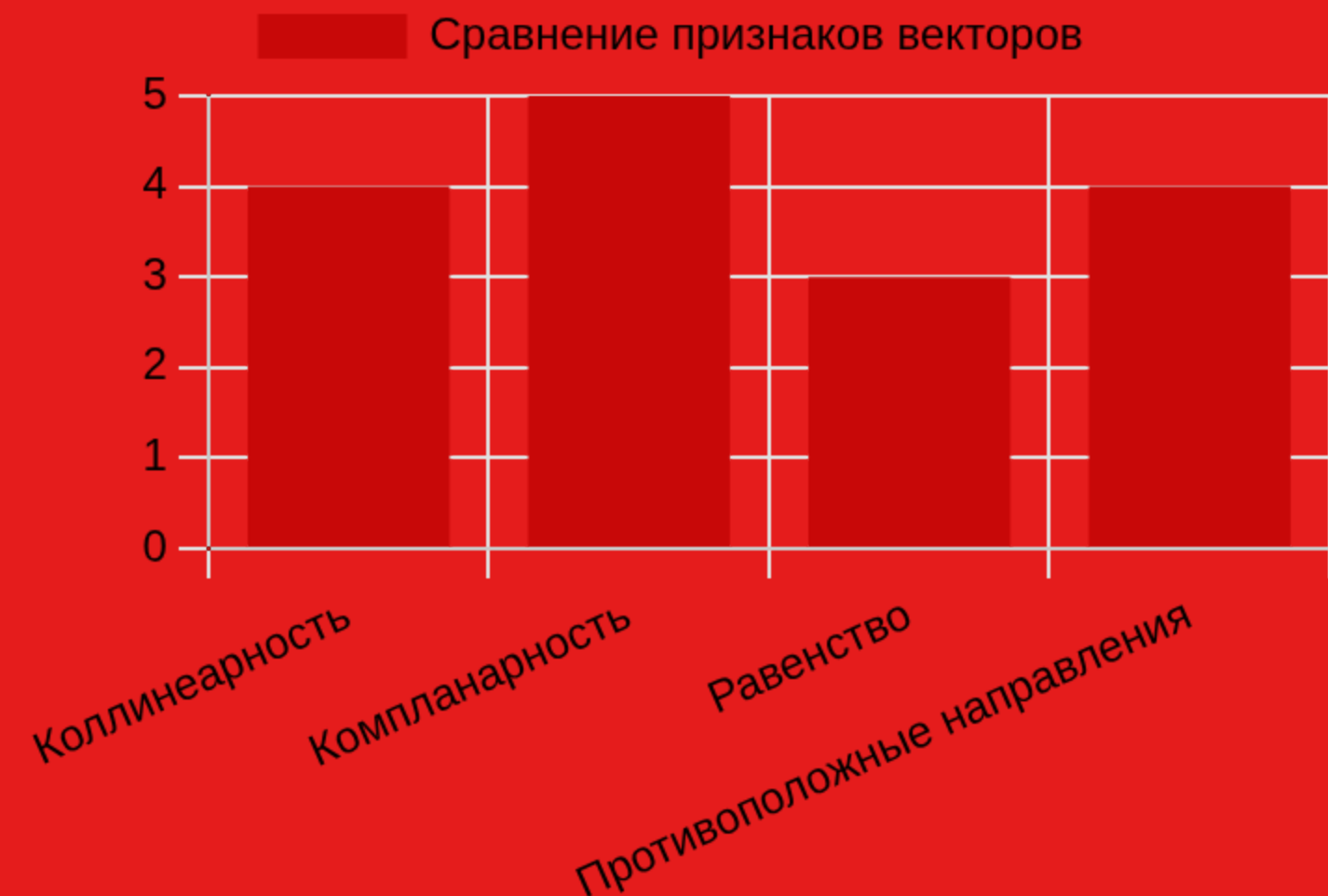
В 7 классе этот признак важно понимать как идею: один вектор «собирается» из двух других. Формула помогает увидеть связь между направлениями, а не превращается в сложный расчёт.

Сравнение признаков векторов

На диаграмме видно, что у коллинеарности и противоположных направлений общий смысл связан с прямой, а у компланарности — с плоскостью.

Компланарность охватывает более широкую ситуацию, чем коллинеарность: она описывает расположение нескольких векторов в одной плоскости, а не только вдоль одной линии.

Схематическое сравнение по материалу темы «Коллинеарные и компланарные векторы»



Типичные ошибки при изучении темы

Путают длину и направление

Коллинеарные векторы не обязаны быть одинаковой длины. Достаточно, чтобы они лежали на одной прямой или на параллельных прямых и имели связанное направление.

Считают плоскость редкостью

Иногда думают, что в пространстве почти ничего не является компланарным. На самом деле любые два вектора можно расположить в одной плоскости, поэтому важно смотреть на чертёж внимательно.

Не различают случаи

Ещё одна ошибка — смешивать сонаправленные и противоположно направленные векторы. Оба случая относятся к коллинеарным, но направление стрелок у них разное, и это меняет ответ в задаче.

Сравнение понятий

Краткая таблица помогает не смешивать похожие признаки и быстрее выбирать нужный термин в задаче.

Коллинеарность описывает линию, а компланарность — плоскость. Сонаправленность является частным случаем коллинеарности и помогает уточнить направление векторов.

Понятие	Где лежат	Смысл
Коллинеарные	Прямая	Одна линия
Компланарные	Плоскость	Одна плоскость
Сонаправленные	Одна прямая	Одинаковое направление

Обобщение по теме урока

Где встречаются эти понятия



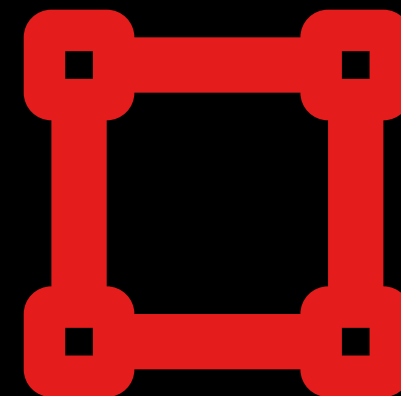
Движение по линии

Коллинеарность удобно использовать, когда предмет движется вдоль одной дороги, рельса или прямого участка пути. Тогда направления векторов легко сравнивать на одном чертеже.



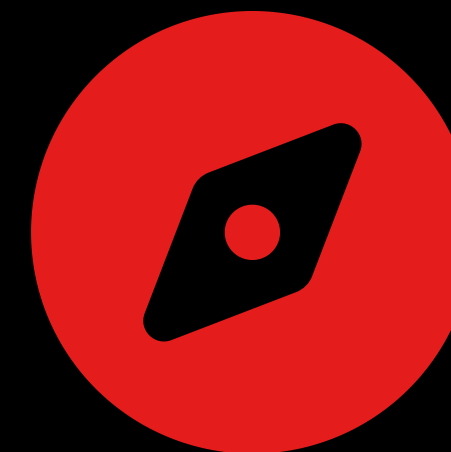
Чертежи и схемы

Компланарность особенно важна в плоских рисунках, схемах и построениях. Все элементы можно разместить на одной поверхности, поэтому векторные обозначения читаются проще и нагляднее.



Плоские фигуры

При изучении треугольников, четырёхугольников и других фигур векторы помогают описывать стороны и диагонали. Здесь особенно заметно, что все они лежат в одной плоскости.



Координаты и направление

Векторы помогают задавать силу, перемещение и направление на координатной плоскости. Благодаря этому можно точно показать, куда и как направлен объект, не перегружая запись.

Коллинеарность на координатной плоскости

На координатной плоскости удобно проверять не только направление, но и пропорциональность координат, что помогает быстро сравнивать векторы в школьных задачах.

Если точки на графике выстраиваются вдоль одной линии, векторы коллинеарны. Нарушение пропорциональности сразу показывает, что направления различны.

Схематическая диаграмма по признаку пропорциональности координат



Что нужно помнить при решении задач

1 Сначала чертёж

Прежде чем считать, полезно посмотреть на рисунок. Если векторы лежат на одной прямой, параллельных прямых или одной плоскости, это сразу подсказывает нужный признак.

2 Проверь координаты

В координатных задачах коллинеарность удобно устанавливать по пропорциональности чисел. Если отношения координат совпадают, а знаменатели не равны нулю, векторы направлены одинаково по линии.

3 Не забывай про плоскость

Для компланарности важно не только направление, но и то, можно ли расположить все векторы в одной плоскости. Если это возможно, условие выполнено.

4 Пиши ответ точно

В ответе лучше указывать, какие именно признаки использованы: прямая, параллельные прямые, плоскость или пропорциональность координат. Это делает решение понятным и аккуратным.

Главное о векторах: короткий итог

Коллинеарные векторы связаны с одной прямой,
а компланарные — с одной плоскостью. Эти признаки
помогают точнее читать чертежи, сравнивать направления
и уверенно решать задачи с векторами.