

Квадратные неравенства: как находить промежутки решений

Парабола, корни и числовая прямая  помогут найти ответ.



Зачем изучать квадратные неравенства в 8 классе



Эта тема продолжает изучение квадратных уравнений и учит определять, где выражение положительно, отрицательно или равно нулю. Она развивает умение работать с графиками и промежутками на числовой прямой.



Общий вид квадратного неравенства

01

Запись неравенства

Квадратное неравенство записывают в виде $ax^2+bx+c>0$, <0 , ≥ 0 или ≤ 0 . Именно знак сравнения показывает, какие значения x нужно искать в ответе.

02

Что нужно найти

Решением становятся те значения x , при которых трёхчлен принимает нужный знак. Поэтому важно определить не только корни, но и поведение выражения между ними.

03

Квадратный трёхчлен

Выражение ax^2+bx+c называют квадратным трёхчленом. Здесь a не равно нулю, иначе выражение перестанет быть квадратным и задача изменит вид.

04

Промежутки решения

Ответ обычно записывают не отдельными числами, а промежутками на числовой прямой. Это удобно, потому что знак выражения сохраняется на целых участках между корнями.

Связь неравенства с графиком параболы

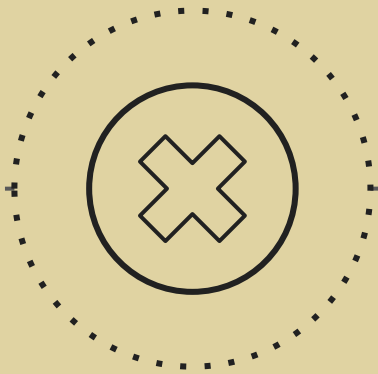
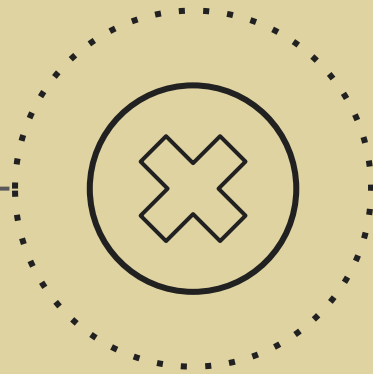


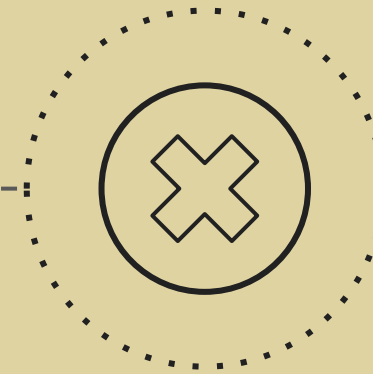
График функции

График $y=ax^2+bx+c$ имеет форму параболы. По его положению сразу видно, где значения функции выше оси Ox , а где ниже.



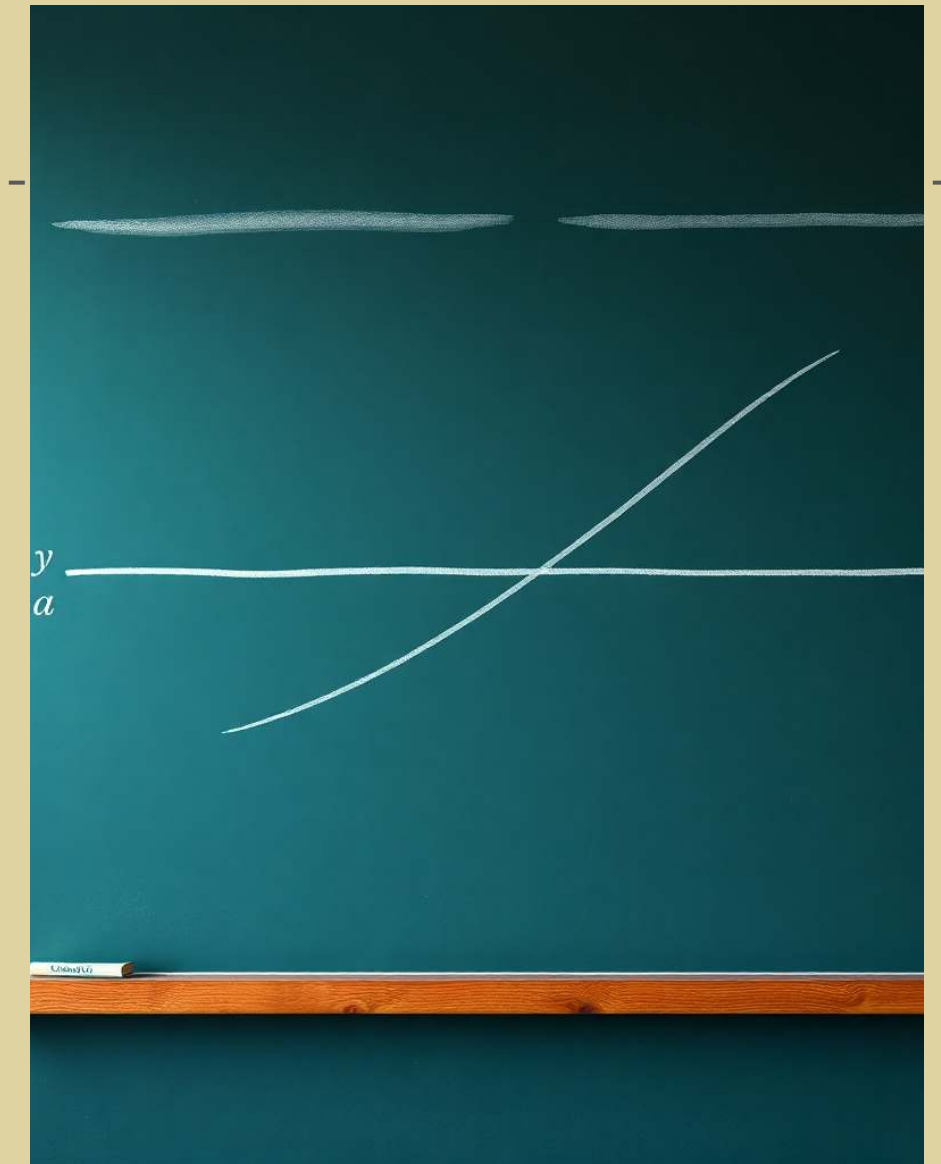
Направление ветвей

Если $a>0$, ветви параболы направлены вверх. Если $a<0$, они направлены вниз. Это помогает заранее понять, где выражение будет положительным или отрицательным.



Смысл решения

Решить неравенство значит выбрать все x , при которых график находится нужной стороной относительно оси Ox . Поэтому рисунок часто делает ответ очевидным.



Корни квадратного трёхчлена

Один корень

Парабола касается оси Ox в одной точке. Такой случай означает, что уравнение имеет один действительный корень, а знак не меняется по разные стороны от него.

Два корня

Парабола пересекает ось Ox в двух точках. Эти значения x делят числовую прямую на три промежутка, где знак выражения может меняться.

Нет корней

Если пересечений с осью Ox нет, график не имеет действительных корней. Тогда знак выражения на всей числовой прямой остаётся одинаковым.

Как меняется знак трёхчлена на промежутках

Знаки на промежутках определяют по положению корней и направлению ветвей параболы.

Для $a > 0$ крайние промежутки дают «плюс», а середина — «минус»; при $a < 0$ схема меняется на противоположную.

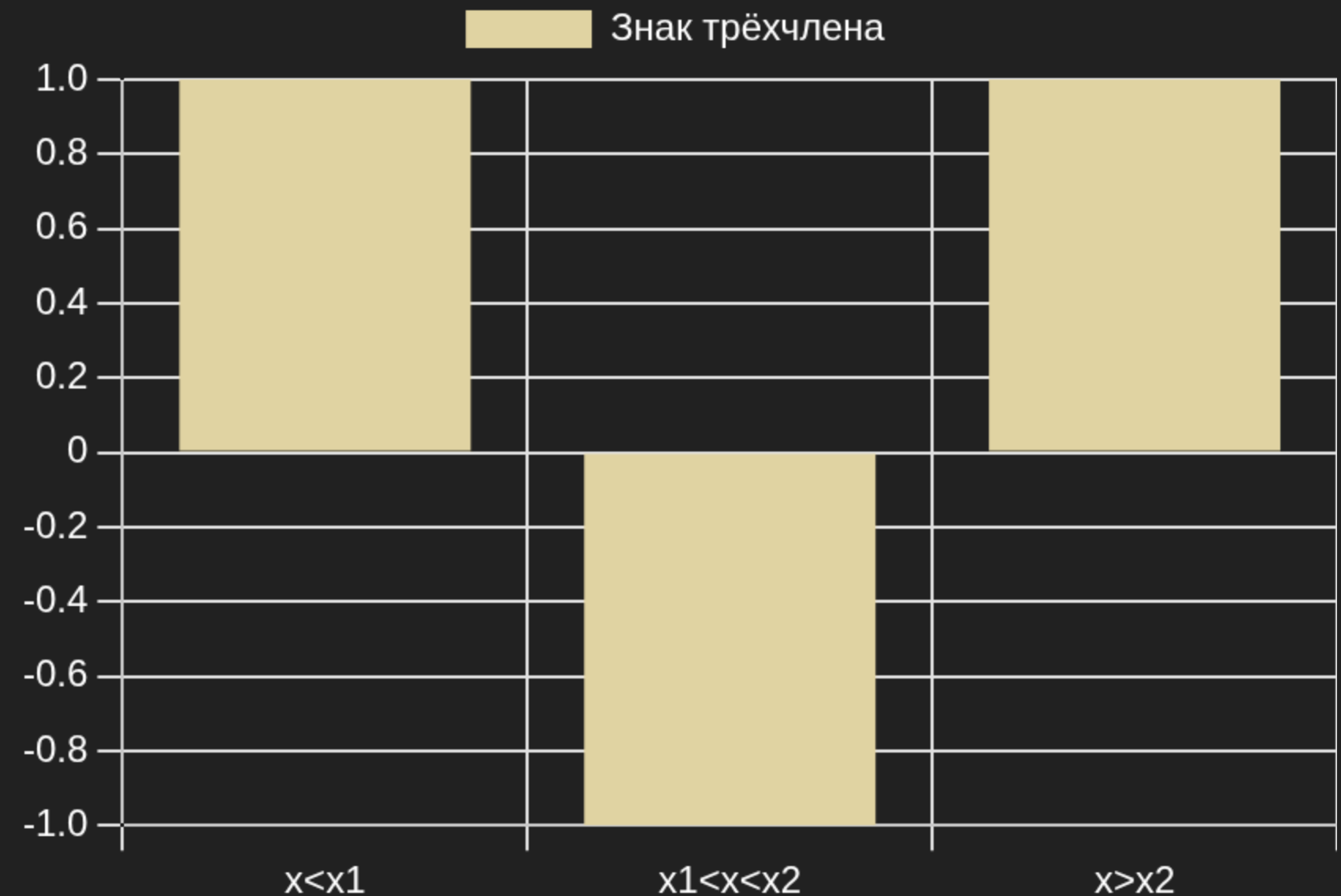


Схема знаков квадратного трёхчлена на числовой прямой

Какой промежуток подходит для каждого знака

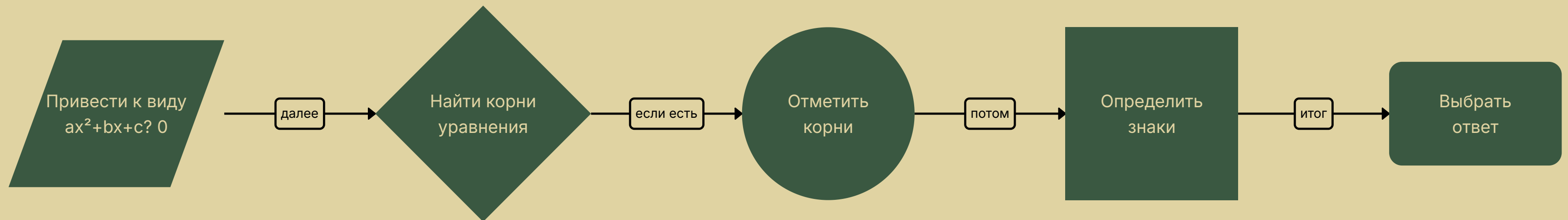
Таблица показывает, какие промежутки выбирают в зависимости от знака неравенства и коэффициента a .

Для положительных неравенств выбирают области с «плюсом», для отрицательных — области с «минусом»; знак a меняет расположение этих областей.

Вид	$a > 0$ между	$a > 0$ вне	$a < 0$ между	$a < 0$ вне
> 0	—	+		
≥ 0	—	+		
< 0	+	—		
≤ 0	+	—		

Как решать квадратное неравенство

✕ Последовательность действий при решении через корни и числовую прямую.



Решение через разложение на множители



Записать в виде произведения

Если трёхчлен раскладывается как $a(x-x_1)(x-x_2)$, решение становится нагляднее. Каждый множитель меняет знак в своей точке, и это легко отследить на прямой.



Сравнить знаки множителей

На каждом промежутке определяют, положителен или отрицателен каждый множитель. Затем перемножают знаки и сразу видят, где выражение подходит по условию неравенства.



Когда способ особенно удобен

Этот приём полезен, если корни находятся быстро или уже известны из уравнения. Тогда не нужно строить сложные вычисления и можно сразу перейти к анализу знаков.

показывает, сколько действительных корней имеет квадратное уравнение.

По значению дискриминанта заранее видно, пересекает ли парабола ось Ox и сколько раз это происходит.

D

■ Формула дискриминанта квадратного уравнения: $D=b^2-4ac$

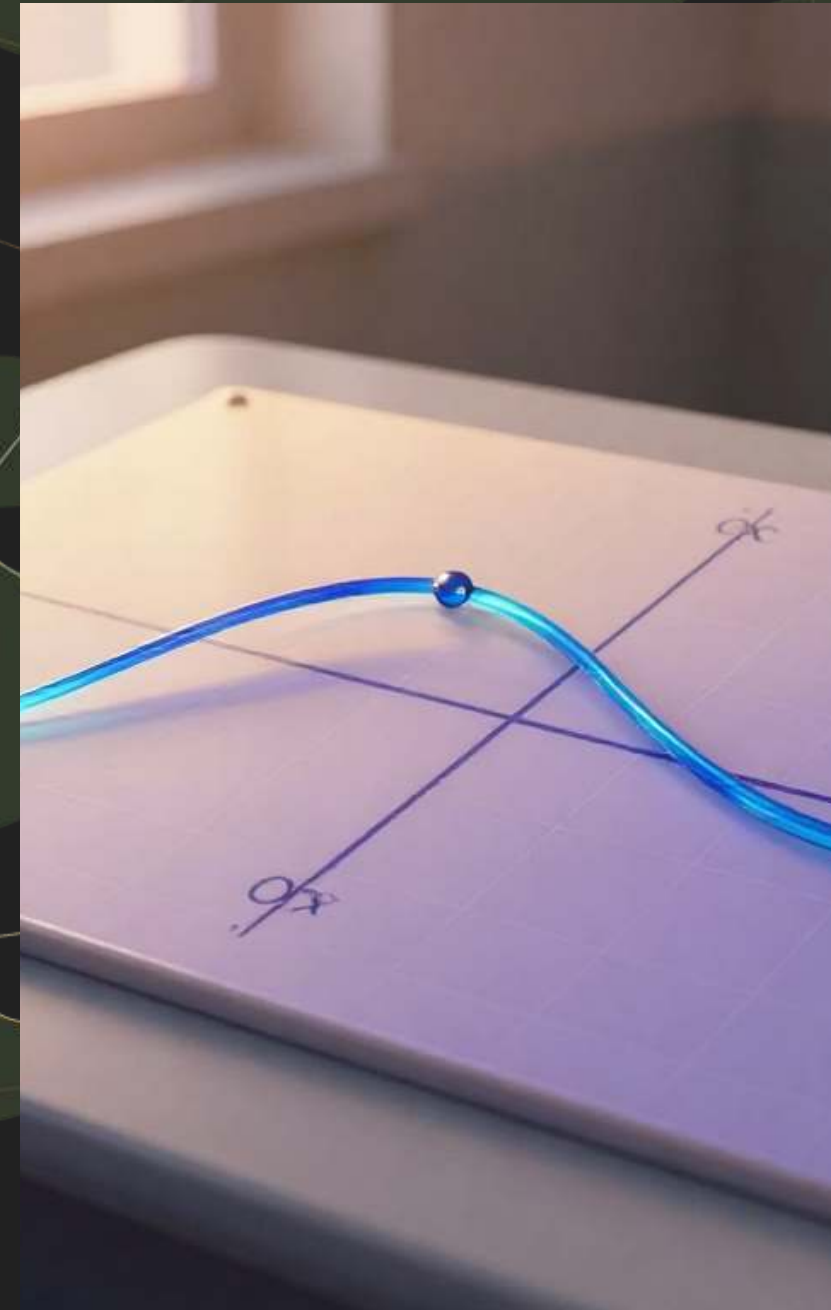
Парабола на координатной плоскости

График функции

График квадратного трёхчлена — это парабола. По её положению видно, где значения выражения положительны, а где отрицательны, если смотреть относительно оси Ox .

Роль оси Ox

Точки пересечения с осью Ox показывают, где функция равна нулю. Между этими точками или вне них и ищут промежутки, подходящие для неравенства.



Знак и ветви

Если ветви направлены вверх, то выше оси находятся внешние промежутки, а если вниз — внутренний. Поэтому знак коэффициента a сразу подсказывает, где будет нужный ответ.

Пример: $x^2 - 5x + 6 > 0$

Корни равны 2 и 3, поэтому числовая прямая делится на три части. Для строгого неравенства граничные точки в ответ не включаются.

Положительные значения получаются вне промежутка между корнями: слева от 2 и справа от 3.



Учебный пример по теме квадратных неравенств, составлено по условию задачи.

Примеры неравенств разных типов

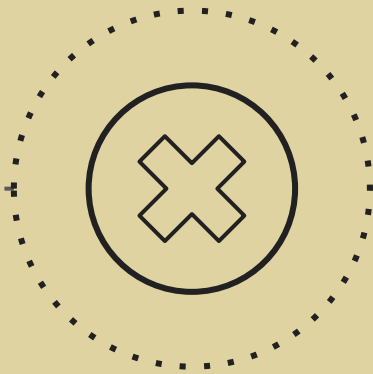
✕ В таблице показано, как знак неравенства и направление ветвей параболы меняют ответ даже при похожем алгоритме решения.

✕ Для нестрогих неравенств границы включаются, а при отрицательном коэффициенте а выбор промежутков меняется на противоположный.

Неравенство	Корни	Ответ
$x^2 - 4x + 3 < 0$	1 и 3	$(1; 3)$
$x^2 - 9 \geq 0$	-3 и 3	$(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$
$-x^2 + 2x + 3 \leq 0$	-1 и 3	$(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

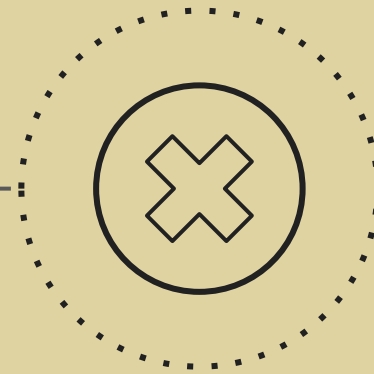
Учебные примеры по алгебре, составлено по условию задания.

Случай без корней



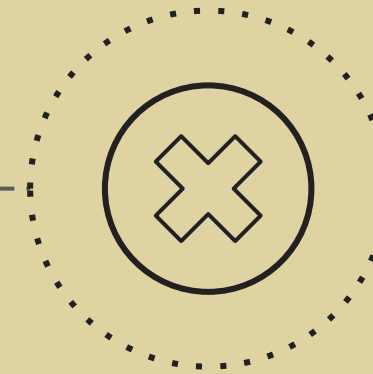
Нет пересечения

Если дискриминант меньше нуля, уравнение не имеет действительных корней, а парабола не пересекает ось Ox . Это значит, что знак выражения не меняется на всей числовой прямой.



Когда всё подходит

При $a > 0$ квадратный трёхчлен всюду положителен. Поэтому для неравенств > 0 и ≥ 0 ответом становятся все числа, а для < 0 и ≤ 0 решения нет.



Когда решений нет

Если $a < 0$, выражение всюду отрицательно. Тогда для неравенств < 0 и ≤ 0 подходят все x , а для > 0 и ≥ 0 получаем пустое множество.

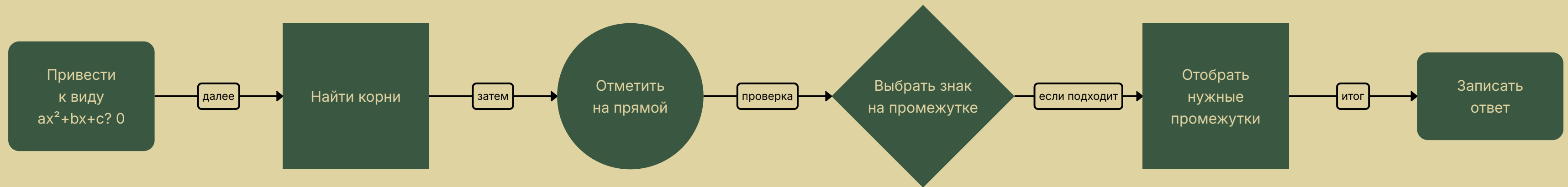
**точка остаётся
единственным
значением, где трёхчлен
равен нулю.**

При нулевом дискриминанте парабола касается оси Ox только в одной точке, поэтому ответ зависит от знака коэффициента a и вида неравенства.

1

Проверка промежутков на числовой прямой

✗ Последовательность действий при решении квадратного неравенства методом промежутков.



Типичные ошибки при решении

01

Неверный знак при $a < 0$

При отрицательном коэффициенте a знак на промежутках меняется на противоположный. Если это забыть, ответ получится верным только случайно, поэтому важно каждый раз проверять направление ветвей параболы.

02

Пропуск корня

Один из корней легко не заметить, особенно после разложения на множители. Тогда числовая прямая делится неверно, и выбранные промежутки уже не соответствуют реальному знаку выражения.

05

Нет проверки промежутков

После нахождения корней обязательно проверяют хотя бы один контрольный x на каждом промежутке. Без этой проверки легко перепутать знак выражения и записать лишний ответ.

03

Путаница со скобками

Строгие неравенства не включают корни, а нестрогие включают. Ошибка в записи круглых и квадратных скобок меняет ответ, хотя сам промежуток может быть найден правильно.

04

Ошибки в разложении

Если квадратный трёхчлен разложен неверно, дальше все рассуждения становятся неточными. Перед поиском знаков полезно быстро раскрыть скобки и убедиться, что выражение совпадает с исходным.



Где встречаются квадратные неравенства



Движение

Такие неравенства помогают определить, при каких значениях времени или скорости условие движения выполняется. Это удобно, когда нужно сравнить путь, скорость и ограничение в одной задаче.



Площадь

В геометрических задачах квадратные неравенства возникают при поиске размеров фигуры. Они показывают, при каких длинах или сторонах площадь становится больше или меньше заданного значения.



Стоимость

При вычислении цены, скидки или прибыли неравенства помогают найти допустимые значения величины. Так можно понять, когда итоговая сумма превышает установленный предел.



Сравнение величин

В учебных заданиях квадратные неравенства часто применяют для сравнения двух выражений. Они показывают, при каких x одно значение больше, меньше или равно другому.

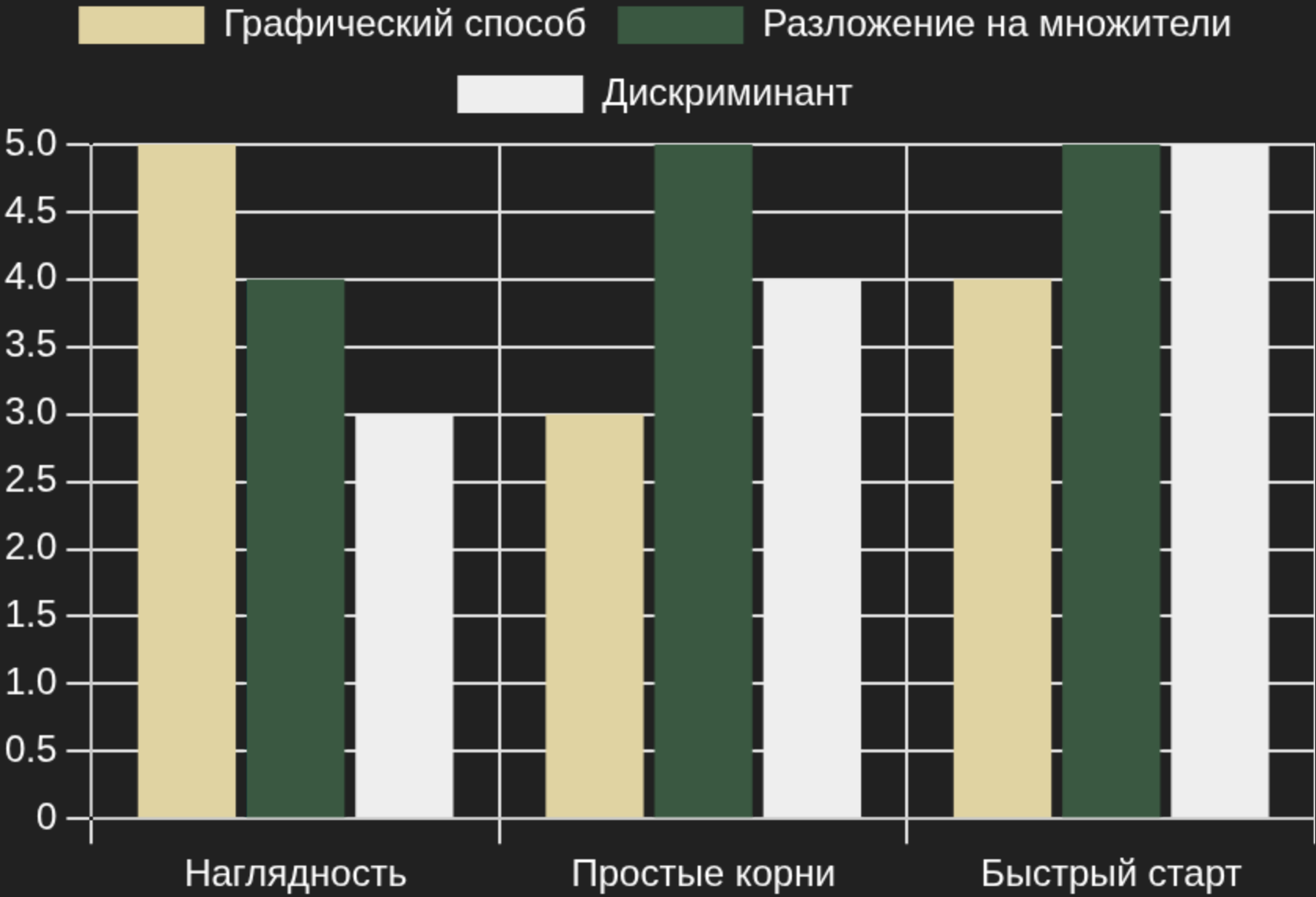
Сравнение способов решения



Каждый способ полезен в своей ситуации: один помогает увидеть картину, другой быстро находит корни, третий заранее показывает их количество.



Универсального метода нет: выбор зависит от вида трёхчлена, удобства вычислений и того, что нужно увидеть в задаче.



Сравнительная характеристика методов решения квадратных неравенств, составлено по учебному материалу.

Главное, что нужно запомнить

- Квадратные неравенства решают через корни, знак коэффициента a и положение параболы. Если уверенно работать с промежутками, ответ на числовой прямой находится без лишних ошибок.