

Вписанные и описанные треугольники

Треугольник и окружность: две связи, которые важно различать.

Зачем изучать эту тему в 7 классе

Тема опирается на уже знакомые фигуры и построения, а также учит находить центры окружностей, длины радиусов и неизвестные элементы в геометрических задачах.



Что означает вписанный треугольник

— Вершины на окружности

У вписанного треугольника все три вершины лежат на одной окружности, поэтому фигура как бы «встроена» в неё и сохраняет строгую симметрию расположения вершин.

— Описанная окружность

Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется описанной. Она связана не со сторонами, а именно с вершинами и их взаимным расположением.

— Центр окружности

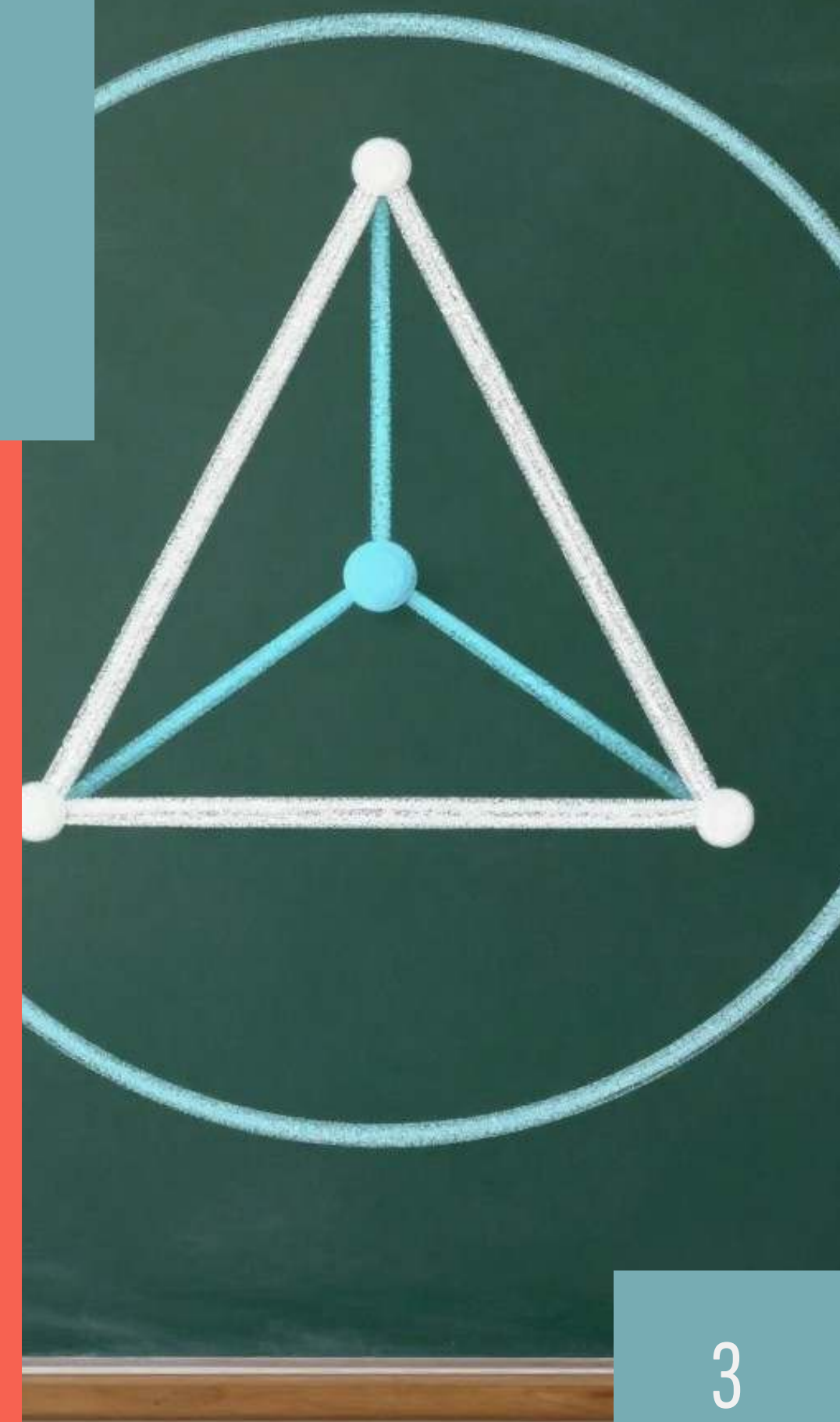
Центр описанной окружности одинаково удалён от всех трёх вершин. Это свойство позволяет найти его построением и использовать как основу для решения задач.

— Радиус R

Радиус описанной окружности обозначают буквой R . Он соединяет центр окружности с любой вершиной треугольника и имеет одну и ту же длину для всех трёх вершин.

— Что важно запомнить

Если треугольник вписан в окружность, то окружность проходит через его вершины, а не касается сторон. Именно это отличает данный случай от вписанной окружности.



Что означает вписанная окружность

Касание трёх сторон

Вписанная окружность находится внутри треугольника и касается каждой его стороны ровно в одной точке, поэтому для неё особенно важны точки касания и равенство расстояний.

Центр на биссектрисах

Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис углов треугольника. Именно поэтому биссектрисы помогают построить окружность без лишних измерений.

Радиус r

Расстояние от центра до любой стороны одинаково и называется радиусом вписанной окружности. Его обозначают r , а перпендикуляр к стороне показывает это расстояние на чертеже.



Два случая: что лежит на окружности и что касается окружности

Сравнение помогает не перепутать два разных вида связи между треугольником и окружностью.

В одном случае окружность проходит через вершины, в другом — касается сторон; центры и радиусы определяются по разным линиям построения.

Определения из школьного курса геометрии

Признак	Вписанный треугольник	Вписанная окружность
Что связано	Вершины	Стороны
Центр	Равноудалён от вершин	Равноудалён от сторон
Радиус	R	r

Где находятся центры окружностей в треугольнике

— Центр описанной окружности

Он находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Эта точка одинаково удалена от всех вершин, поэтому подходит как центр описанной окружности.

— Центр вписанной окружности

Он получается как точка пересечения биссектрис углов треугольника. Из этой точки до каждой стороны можно опустить равные перпендикуляры, задающие радиус r .

— Равнобедренный случай

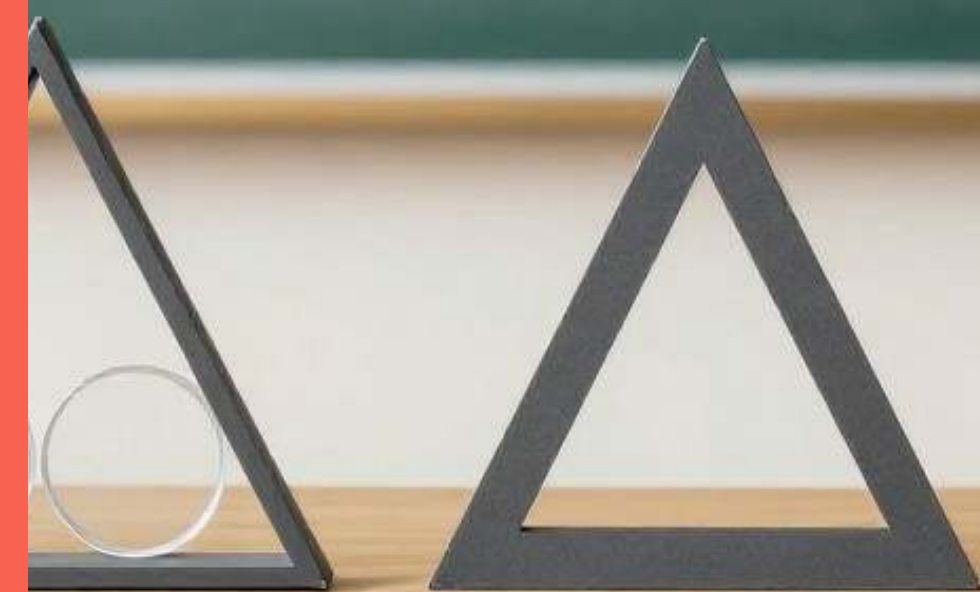
В равнобедренном треугольнике оба центра лежат на оси симметрии. Это удобно для чертежа: симметрия помогает быстрее проверить правильность построения.

— Равносторонний случай

В равностороннем треугольнике все углы и стороны равны, поэтому биссектрисы и серединные перпендикуляры совпадают по направлению, а оба центра оказываются в одной точке.

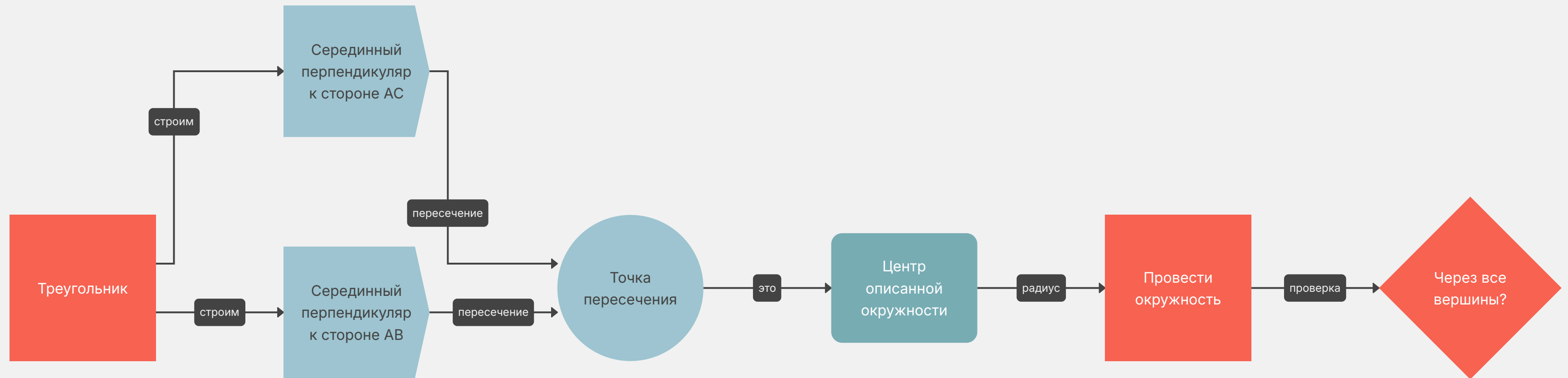
— Как это использовать

Зная, какие линии нужно проводить, можно без угадывания определить нужный центр и построить окружность. Это основа многих задач на построение в 7 классе.



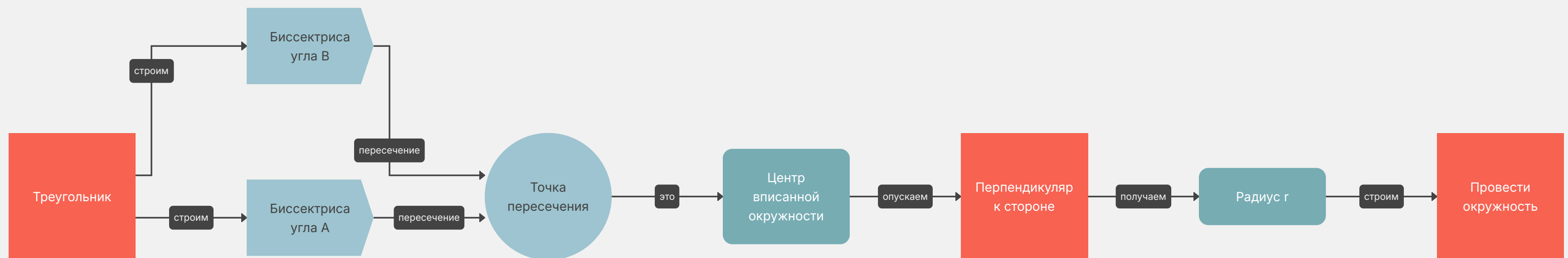
Построение описанной окружности

Пошаговое построение по серединным перпендикулярам сторон треугольника.



Построение вписанной окружности

Пошаговое построение по биссектрисам углов треугольника.

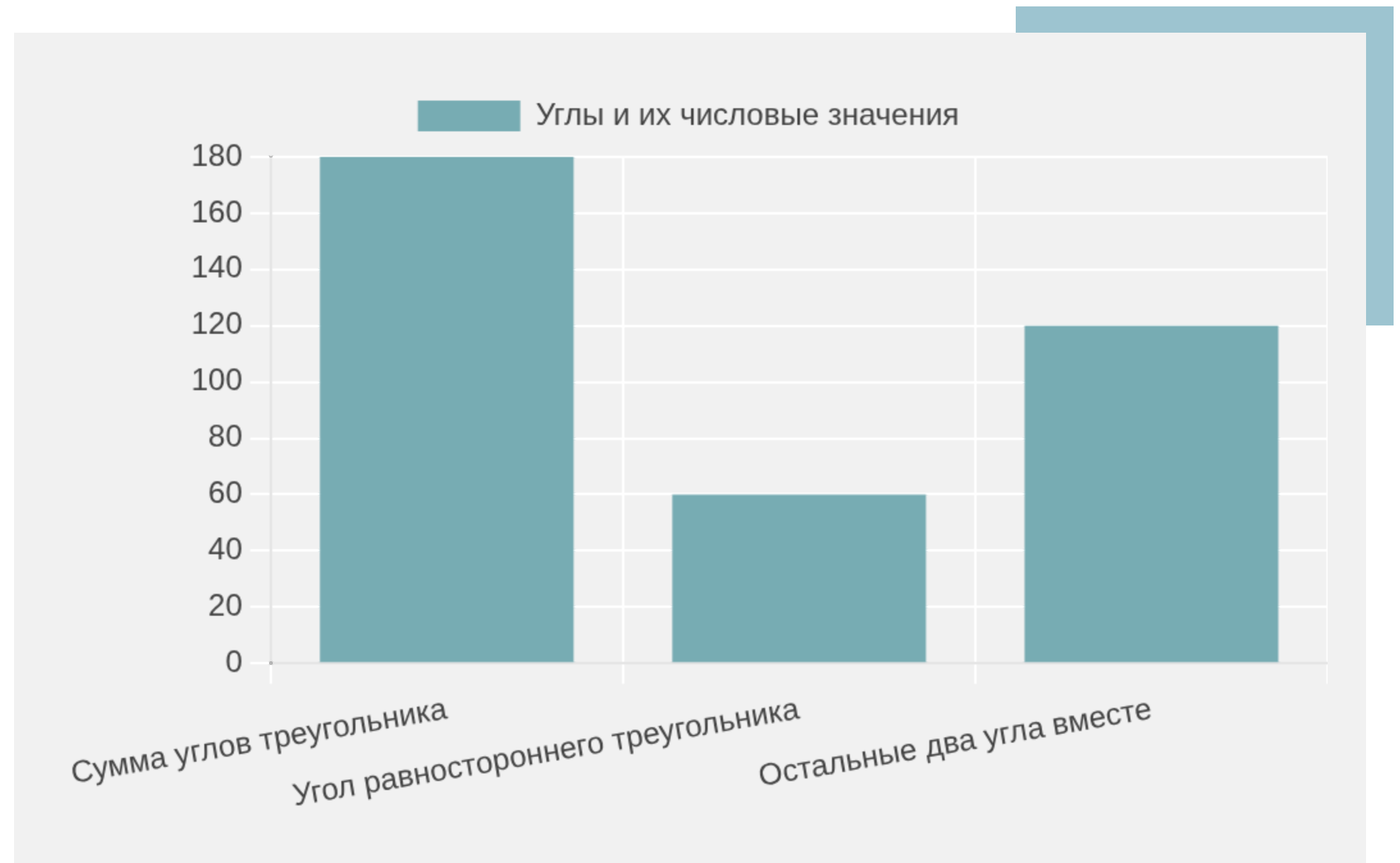


Связь углов треугольника и окружности

У вписанного треугольника каждый угол связан с дугой, на которую он опирается, поэтому углы помогают находить неизвестные элементы.

Сумма углов всегда остаётся 180° , а в равностороннем треугольнике симметрия делает построения и вычисления особенно простыми.

Школьный курс геометрии: свойства углов треугольника и вписанных углов



2

показывает, что полупериметр равен половине периметра треугольника.

Формула $S = p \cdot r$ удобна, когда известны стороны: сначала находят полупериметр, затем радиус вписанной окружности.

Формула площади треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности, школьный курс геометрии

4

В формуле площади стоит именно столько в знаменателе, потому что радиус описанной окружности зависит от всех сторон треугольника.

Формула помогает выразить R через известные стороны и площадь треугольника.

Формула площади треугольника через радиус описанной окружности: $S = abc / 4R$

Основные формулы темы

Таблица объединяет формулы для площади и радиусов окружностей, а также особый случай равностороннего треугольника.

Формулы показывают, что r и R можно находить через разные данные: стороны, периметр и площадь.

Школьные формулы по теме «Вписанные и описанные треугольники»

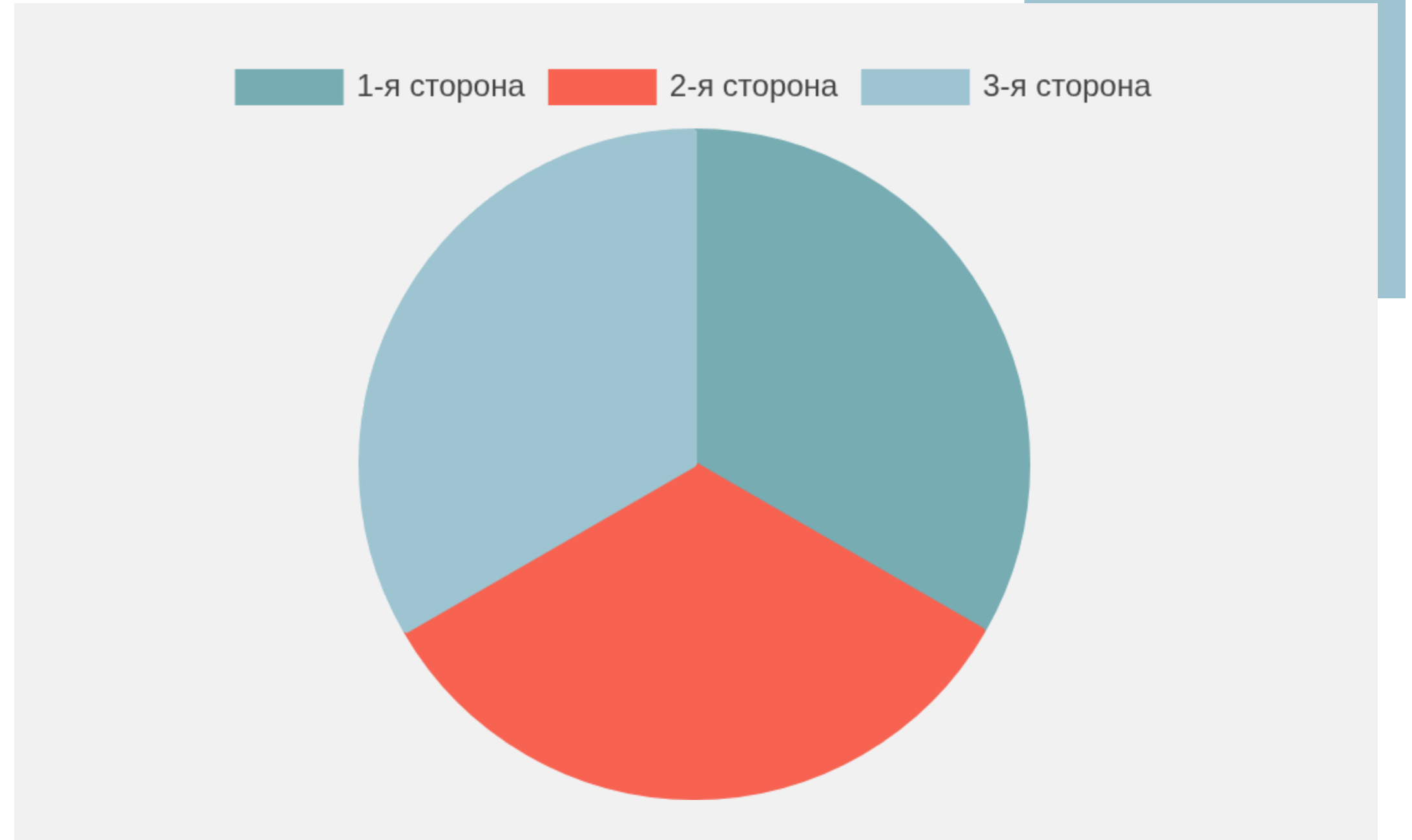
Формула	Что находит	Когда применяют
$p=(a+b+c)/2$	полупериметр	по сторонам
$S=p \cdot r$	площадь	если известен r
$S=abc/4R$	площадь	если нужен R

Равносторонний треугольник как особый случай

В такой фигуре все медианы, биссектрисы и серединные перпендикуляры совпадают по направлениям, поэтому построения становятся особенно наглядными.

Равенство всех сторон создаёт полную симметрию: центры окружностей совпадают, а формулы для R и r становятся простыми.

Свойства равностороннего треугольника из школьной геометрии



Пример по чертежу: как распознаются центры окружностей

1

Ищем линии построения

Сначала смотрят, какие вспомогательные линии нанесены на чертёж: биссектрисы указывают на вписанную окружность, а серединные перпендикуляры — на описанную. Это главный ориентир при чтении рисунка.

2

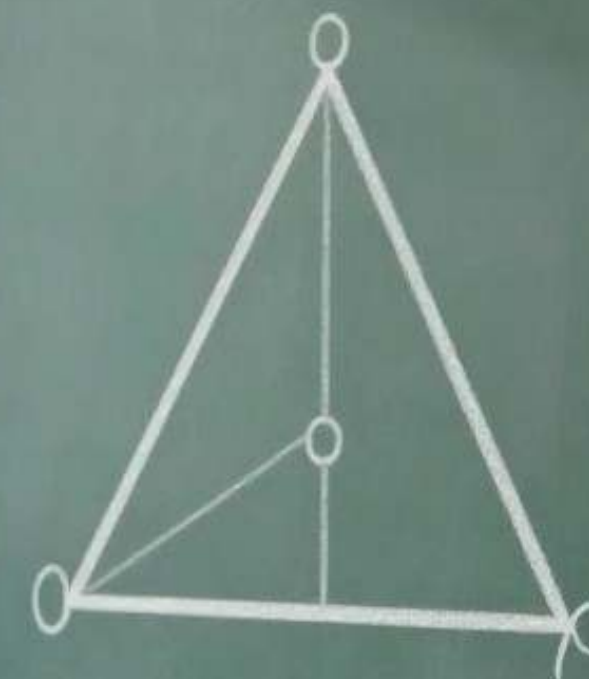
Проверяем положение центра

Центр вписанной окружности всегда находится внутри треугольника. Центр описанной окружности тоже может быть внутри, но в тупоугольном треугольнике он смещается за его пределы.

3

Сравниваем с точками касания

Если окружность касается всех сторон, перед нами вписанная окружность. Если она проходит через вершины треугольника, это описанная окружность; по этим признакам легко сделать вывод.



Частые ошибки в задачах

Путают центры

Школьники часто принимают точку пересечения биссектрис за центр описанной окружности. На самом деле она принадлежит вписанной окружности, потому что равноудалена от сторон, а не от вершин.

Меняют свойства окружностей

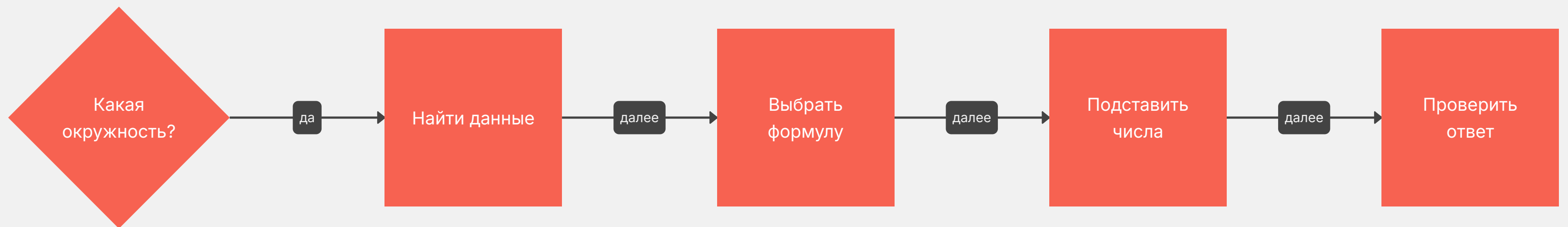
Ещё одна ошибка — считать, что описанная окружность касается сторон. Наоборот, она проходит через вершины треугольника, а вписанная окружность именно касается его сторон изнутри.

Не проверяют условие задачи

Иногда не обращают внимания, какие элементы уже даны в условии. Если известны стороны и площадь, удобнее использовать формулы для r или R , а не строить лишние линии.

Как решать задачи на радиусы окружностей

Последовательность помогает выбрать правильную формулу и не перепутать r и R .

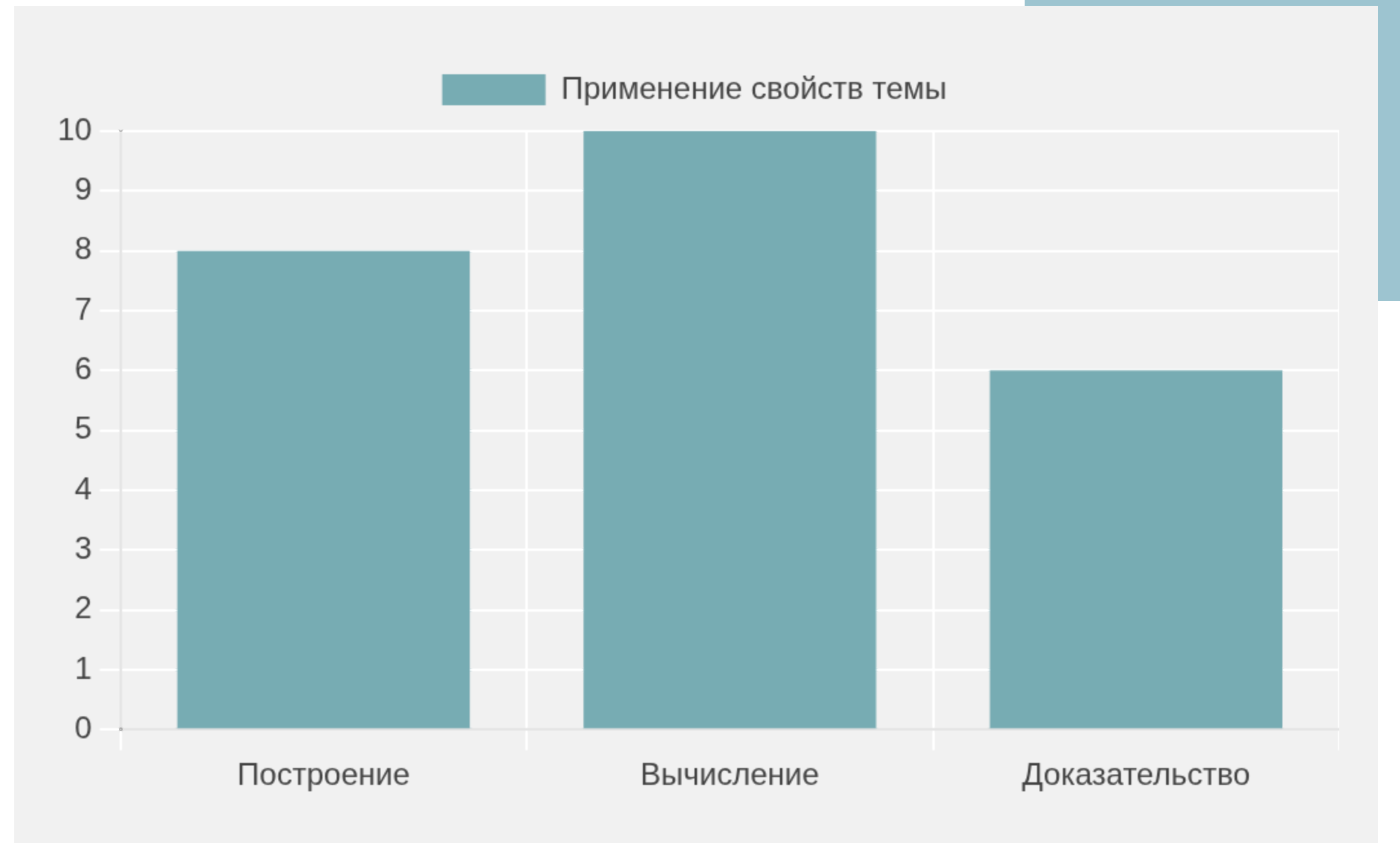


Где встречаются эти свойства в учебных задачах

Такие задания помогают тренировать чтение чертежа, выбор формулы и объяснение решения без лишних вычислений.

Чаще всего свойства окружностей нужны в вычислительных задачах, но построения и доказательства тоже остаются важной частью темы.

Учебная тематика школьной геометрии, 7 класс



Связь темы с другими понятиями геометрии

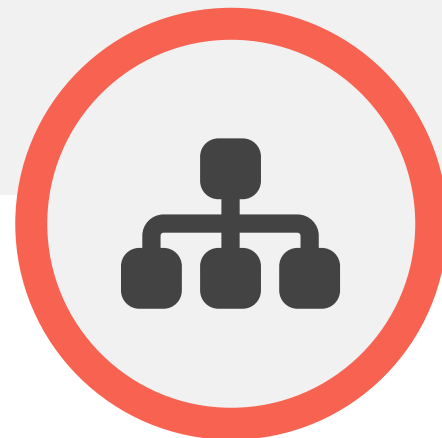
Тема показывает, как окружность может быть связана с треугольником двумя разными способами: через вершины или через касание сторон.

Окружность



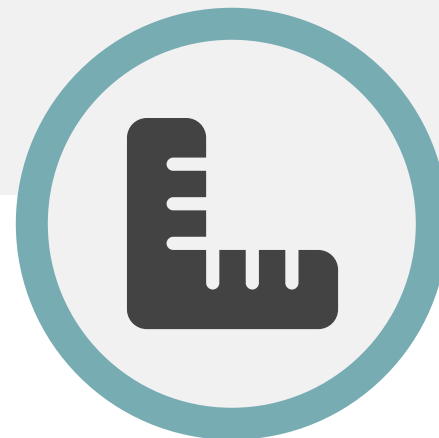
Именно биссектрисы находят точку, равноудалённую от сторон треугольника, поэтому они помогают строить центр вписанной окружности.

Биссектриса



Серединные перпендикуляры указывают точку, одинаково удалённую от вершин, и ведут к центру описанной окружности.

Серединный перпендикуляр



Через площадь, периметр и полупериметр удобно находить радиусы окружностей, особенно когда в задаче известны стороны треугольника.

Площадь и периметр



В симметричных треугольниках центры окружностей располагаются особенно наглядно, поэтому легче заметить общие свойства фигур и линий.

Симметрия



Мини-памятка: как не перепутать виды окружностей

Таблица помогает быстро сопоставить признак, центр и связь окружности с треугольником.

Если помнить два ориентира — биссектрисы и серединные перпендикуляры, тип окружности определяется почти сразу.

Школьные признаки вписанной и описанной окружностей

Признак	Если это...	Тип окружности
Центр по биссектрисам	равноудалён от сторон	вписанная
Центр по перпендикулярам	равноудалён от вершин	описанная
Окружность касается/проходит	касается сторон / через вершины	вписанная / описанная

Вписанные и описанные треугольники: что важно запомнить

Главное в теме — не путать две разные ситуации: одна окружность проходит через вершины, другая касается сторон. Центры строятся по разным линиям, а формулы помогают решать задачи быстро и точно.