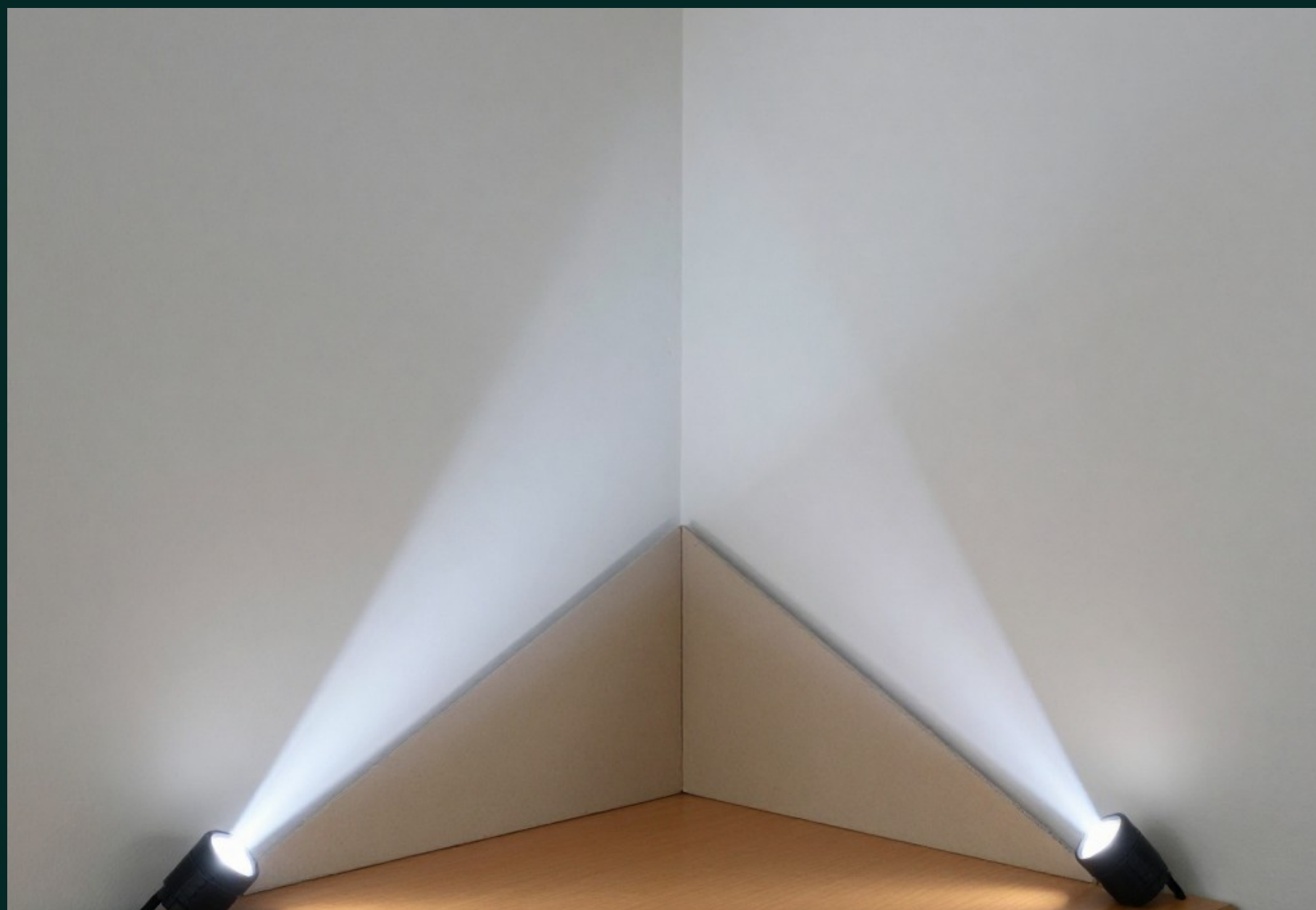

Тригонометрические функции тупого угла



Разберём, как находить значения функций для углов больше 90° .

Зачем нужны тупые углы в 9 классе

Тупые углы помогают связать геометрию, координаты и вычисления. Они часто встречаются в задачах на окружность и построения, а формулы приведения позволяют быстро получать ответы и готовиться к ОГЭ без лишних сложностей.



Что такое тупой угол



Границы угла

Тупым называют угол, который больше 90° и меньше 180° . Он расположен между прямым и развёрнутым углом, поэтому легко выделяется на чертеже.

Примеры

К тупым углам относят, например, 100° , 120° , 135° и 150° . Такие значения часто используются в школьных задачах, потому что их удобно связывать с табличными углами.

Почему не треугольник

Тупой угол не может быть углом прямоугольного треугольника, так как в таком треугольнике один угол уже равен 90° . Поэтому его изучают через координатную плоскость.

Удобный способ изучения

Единичная окружность помогает увидеть, где лежит сторона угла и какие знаки будут у функций. Это делает вычисления понятными даже без сложных построений.

Положение тупого угла на единичной окружности

Отсчёт угла

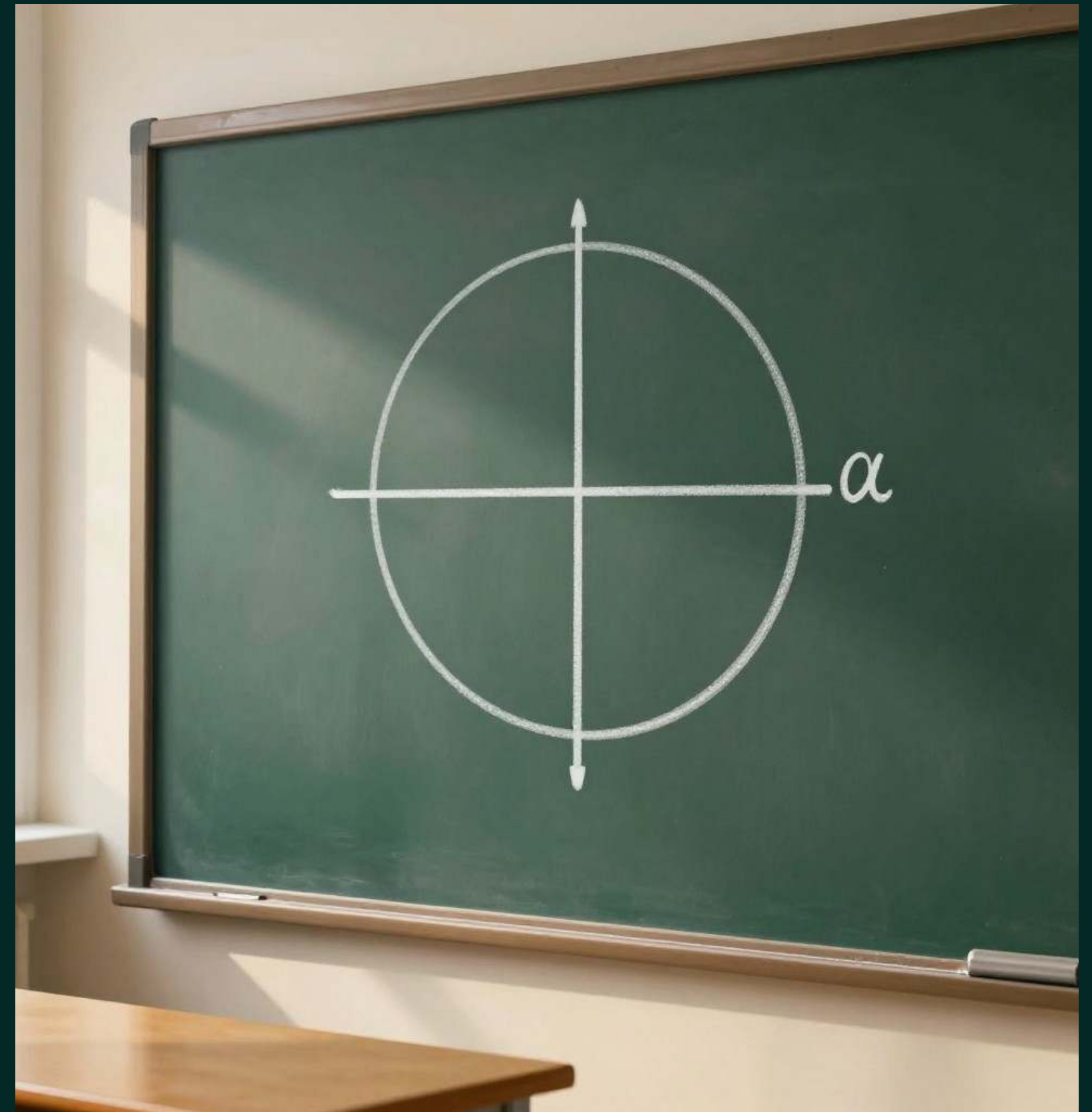
Тупой угол откладывают от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. Его конечная сторона проходит во вторую четверть координатной плоскости.

Координаты точки

На единичной окружности точка угла α имеет координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Поэтому значения функций можно читать прямо по положению точки на окружности.

Знаки в II четверти

Во второй четверти синус положителен, потому что ордината точки больше нуля, а косинус отрицателен, так как абсцисса точки становится меньше нуля.



Как находят тригонометрические функции тупого угла

Пошаговый алгоритм по единичной окружности и формулам приведения

Знаки тригонометрических функций по четвертям

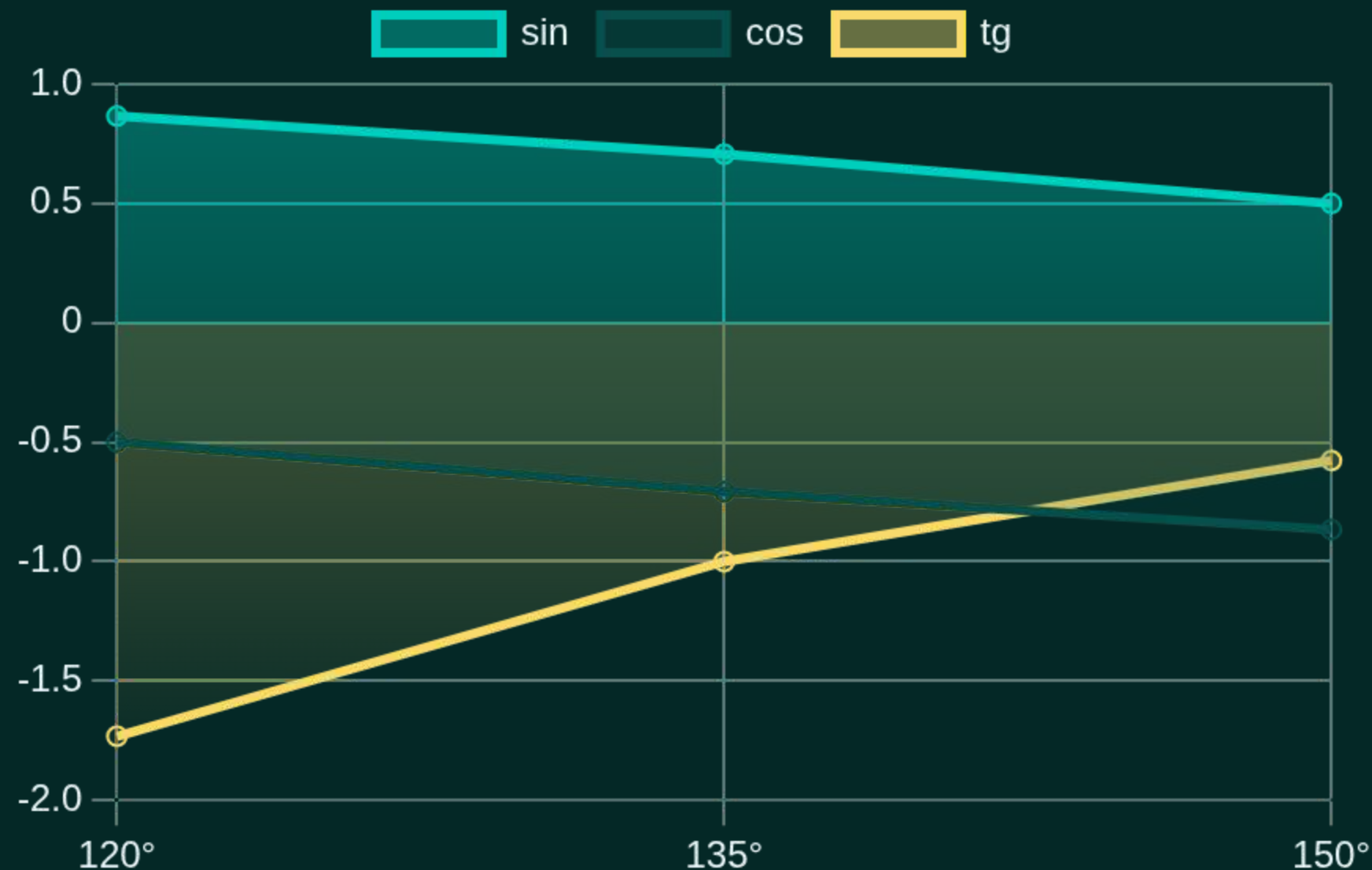
Таблица помогает быстро определить знак функции по положению угла на координатной плоскости.

Во второй четверти положителен только синус; остальные функции имеют отрицательный знак.

Четверть	Положительные	Отрицательные
I	sin, cos, tg, ctg	—
II	sin	cos, tg, ctg
III	tg, ctg	sin, cos
IV	cos	sin, tg, ctg

Правила знаков на единичной окружности

Как меняются значения функций при переходе от 90° к 180°



Табличные значения углов 120° , 135° , 150°

- Тангенс показан на тех углах, где он определён; у 90° и 180° он не существует.
- При движении к 180° синус убывает, косинус становится всё более отрицательным, а тангенс по модулю уменьшается.

Синус тупого угла

01

Главный знак

У любого тупого угла синус положителен, потому что точка на единичной окружности находится выше оси Ox . Это удобно проверять по второй четверти.

02

Формула приведения

Для тупого угла используют запись $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Она показывает, что модуль синуса совпадает со значением для опорного острого угла.

03

Примеры

Так, $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$, а $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 1/2$.

04

Как запомнить

Чтобы не ошибиться, достаточно найти опорный угол и взять табличное значение. Для синуса знак не меняется, поэтому ответ всегда остаётся положительным.



Косинус тупого угла



Отрицательный знак

Косинус тупого угла всегда отрицателен, потому что точка угла во второй четверти лежит левее оси Oy , а её абсцисса меньше нуля.



Формула приведения

Используют правило $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Оно позволяет заменить тупой угол опорным острым и сразу поставить нужный знак без лишних вычислений.



Табличные примеры

Например, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Модуль остаётся таким же, как у соответствующего острого угла.

Тангенс и котангенс тупого угла



Почему знак минус

Тангенс тупого угла отрицателен, потому что $\sin \alpha$ положителен, а $\cos \alpha$ отрицателен. При делении положительного числа на отрицательное получается отрицательный результат.

Формула для tg

Запоминают правило $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$. Оно сразу показывает, что нужно взять значение для опорного угла и изменить знак.

Формула для ctg

Для котангенса работает аналогичное соотношение $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Это помогает находить ответы так же быстро, как и для тангенса.

Табличные значения

Примеры: $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 150^\circ = -\sqrt{3}/3$. Такие значения удобно получать через углы 60° , 45° и 30° .

Стандартные значения для тупых углов

Угол	$\sin / \cos / \operatorname{tg}$	Что важно
120°	$\sqrt{3}/2; -1/2; -\sqrt{3}$	II четверть
135°	$\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2; -1$	Опорный 45°
150°	$1/2; -\sqrt{3}/2; -\sqrt{3}/3$	Опорный 30°
180°	$0; -1; \text{не опр.}$	Тангенс не существует

Табличные значения тригонометрических функций и формулы приведения для углов вида $180^\circ - \alpha$.

Таблица показывает табличные значения для самых удобных тупых углов и угла 180° ; они часто используются при решении задач через формулы приведения.

Для тупых углов удобно помнить опорные острые углы 30° , 45° и 60° : по ним быстро находятся значения синуса, косинуса и тангенса.

Опорный острый угол как ключ к вычислениям



Угол в зеркальном отражении

Любой тупой угол во II четверти можно представить как «почти 180° ». От него мысленно отнимают острый опорный угол, и задача сразу сводится к знакомым значениям для 30° , 45° или 60° .



Пары, которые легко запомнить

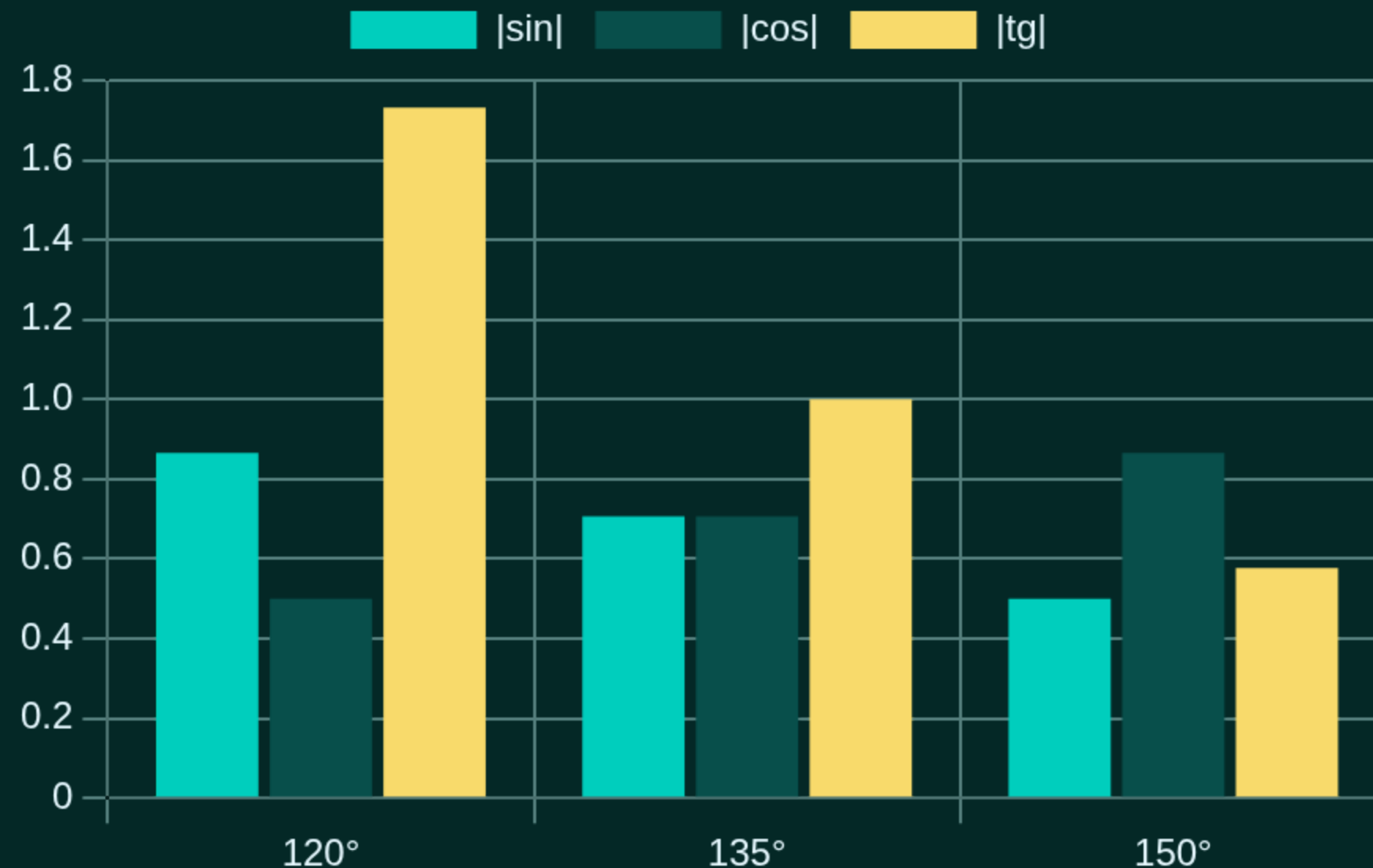
Углы 120° и 60° , 135° и 45° , 150° и 30° образуют удобные пары. У них совпадают модули синуса и косинуса, но знаки различаются, потому что одна точка лежит во II четверти.



Счёт без лишних шагов

Когда опорный угол найден, ученик не ищет новое значение с нуля. Достаточно взять табличное число для острого угла, затем поставить нужный знак по четверти и записать ответ без длинных вычислений.

Сравнение модулей функций для 120° , 135° и 150°



Табличные значения тригонометрических функций для 120° , 135° и 150° .

- На диаграмме удобно сравнивать не сами знаки, а величины чисел: они подсказывают, как меняются функции при движении к 180° .
- Модуль синуса уменьшается, модуль косинуса растёт, а модуль тангенса меняется неравномерно. Это отражает различие между функциями во II четверти.

Формулы приведения для тупых углов

$\times^1$

Синус сохраняется

Для углов вида $180^\circ - \alpha$ синус не меняет модуль и остаётся положительным: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Это самый удобный случай для быстрых вычислений.

$-$

Косинус меняет знак

Косинус во II четверти отрицателен, поэтому $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Значение берут у острого угла, а затем обязательно ставят минус.

$\div$

Тангенс и котангенс

Для тангенса и котангенса знак тоже меняется: $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Это сразу показывает результат без дополнительных построений.

table

Опора на таблицу

После приведения нужно лишь подставить табличное значение для 30° , 45° или 60° . Поэтому формулы приведения особенно полезны там, где важна скорость и аккуратность ответа.

Алгоритм вычисления значений тригонометрических функций

Последовательность основана на положении угла во II четверти и формулах приведения для вида $180^\circ - \alpha$.

Типичные ошибки при работе с тупыми углами

Забывают знак

Чаще всего ученики верно находят опорный угол, но забывают, что косинус, тангенс и котангенс во II четверти отрицательны. Из-за этого правильное число превращается в неверный ответ.

Путают четверть

Если не определить положение угла на окружности, легко перепутать II четверть с I или III. Тогда выбирается неправильный знак, а иногда и неверная формула приведения.

Берут только модуль

Иногда записывают значение острого угла без учёта знака. Такой ответ выглядит знакомо, но не подходит для тупого угла, потому что у него другие координаты точки на окружности.

Не проверяют область

Для угла 180° тангенс не определён, и это важно помнить отдельно. Если не проверить область определения функции, можно получить формально красивый, но математически неверный результат.

Знаки функций в разных четвертях



Правила знаков тригонометрических функций на единичной окружности.

- Схема помогает быстро проверить, совпадает ли знак с положением угла на единичной окружности, прежде чем записывать окончательный ответ.
- Во II четверти положителен только синус. Это главный ориентир при работе с тупыми углами и формулами приведения.

Где встречаются тупые углы в жизни и технике

01 | Архитектура и крыши

В строительстве тупые углы появляются в крышах, навесах и опорах. По ним рассчитывают наклон, длину стропил и высоту конструкции, чтобы элемент был прочным и удобным.

02 | Мебель и предметы быта

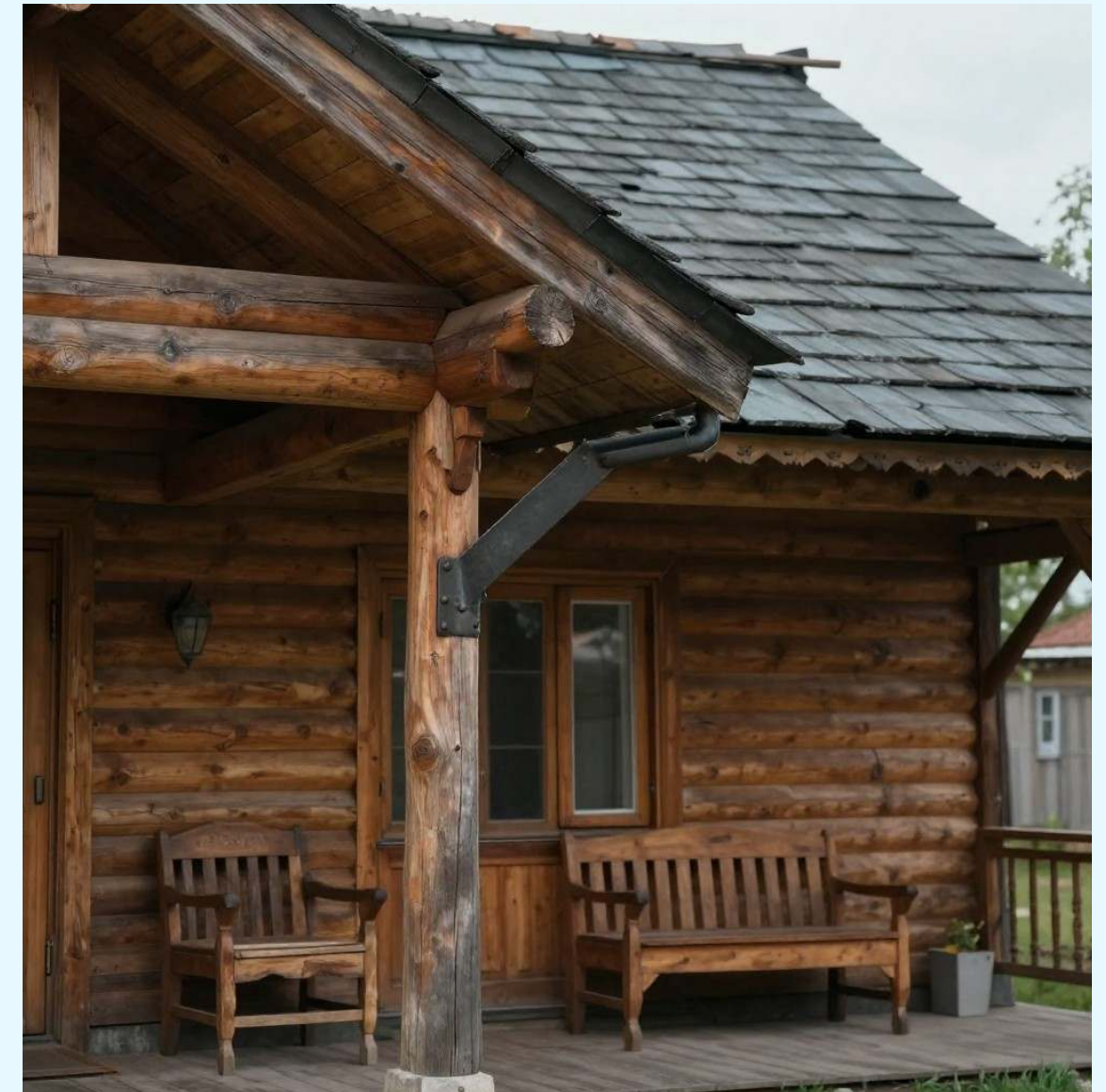
В дизайне мебели тупой угол помогает создавать устойчивые формы и удобные спинки, подлокотники или соединения деталей. Такие расчёты делают предметы не только красивыми, но и практичными.

03 | Механизмы и детали

В механизмах встречаются раскрытые рычаги, ножницы, поворотные элементы и соединения деталей. Геометрия позволяет заранее определить, как будет двигаться конструкция и какие размеры ей нужны.

04 | Черчение и мосты

На чертежах и в проектах мостов тупые углы используют для точного построения линий и наклонных опор. Здесь особенно важно уметь находить длины и углы без ошибок.



Мини-проверка знаний по теме

Небольшая таблица помогает быстро повторить значения функций и вспомнить, какие опорные углы связаны с тупыми углами.

Значения для 30° , 45° и 60° вспоминаются через опорный угол, а для 140° важно определить только знак функций, а не точное число.

Задание	Ответ	Опорный угол
$\sin 150^\circ$	$\frac{1}{2}$	30°
$\cos 120^\circ$	$-\frac{1}{2}$	60°
$\operatorname{tg} 135^\circ$	-1	45°
$\sin 140^\circ$	$+$	40°

Табличные значения и признаки знаков тригонометрических функций во II четверти.

Что важно запомнить о тупых углах

Тупой угол всегда находится во II четверти, поэтому его синус положителен, а остальные тригонометрические функции имеют отрицательный знак. Опорный угол и формулы приведения позволяют быстро получать точные значения.