

Общие свойства неравенств

Как сравнивать числа, преобразовывать неравенства и проверять решения.



Где встречаются неравенства

В 9 классе неравенства помогают описывать ограничения: что больше, меньше, не выше и не ниже. Они нужны в алгебре, в текстовых задачах и в жизненных ситуациях, где важен допустимый диапазон значений.



Что такое неравенство

Запись сравнения

Неравенство — это математическая запись, которая показывает, как соотносятся два числа или выражения. Для этого используют знаки $<$, $>$, $\leq$ и $\geq$, чтобы указать направление сравнения.

Строгие сравнения

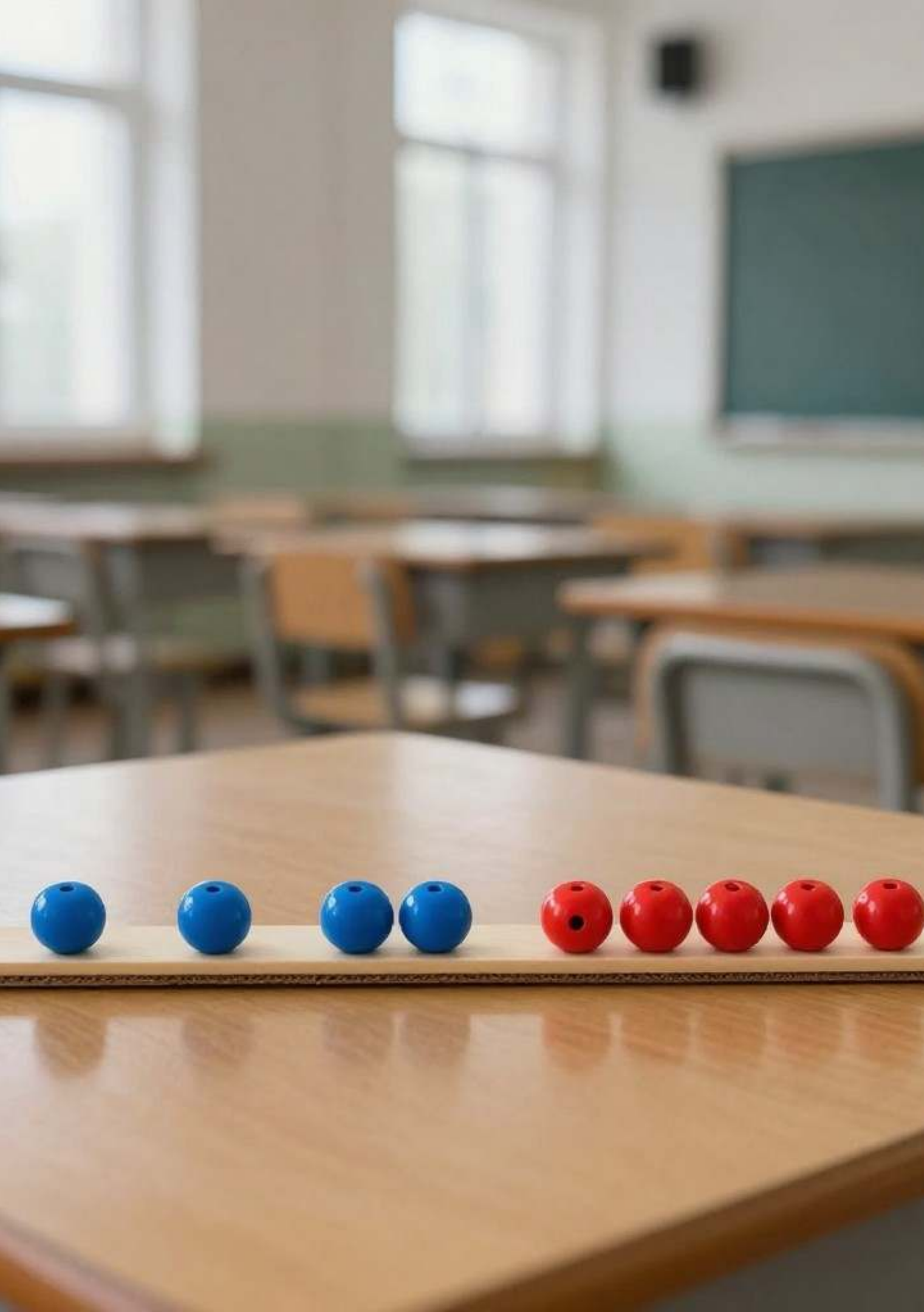
Знаки $<$ и $>$ обозначают строгие неравенства. Они показывают, что одно значение точно меньше или точно больше другого, без возможности равенства между ними.

Нестрогие сравнения

Знаки $\leq$ и $\geq$ означают, что граница входит в ответ. Например, $x \leq 7$ включает число 7 и все меньшие значения, а $y \geq 0$ — ноль и все большие.

Зачем это нужно

Неравенства позволяют задавать ограничения и множества решений. Их удобно читать на числовой прямой, проверять подстановкой и использовать при решении задач с условиями.



Знаки неравенств и их чтение

Таблица показывает основные знаки сравнения, их чтение и короткие примеры записи.

Первые два знака задают строгие неравенства, а знаки $\leq$ и $\geq$ включают равенство, поэтому ответ может содержать граничное значение.

Знак	Чтение	Пример
<	меньше	$3 < 5$
>	больше	$8 > 2$
$\leq$	меньше или равно	$x \leq 7$
$\geq$	больше или равно	$y \geq 0$

Основное свойство сложения

1. Одинаковое число

Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, знак сравнения не меняется. Это правило позволяет преобразовывать выражения, не нарушая порядок чисел.

2. Простой пример

Из неравенства $4 < 9$ можно прибавить 2 к обеим частям и получить $6 < 11$. Значения изменились, но сравнение осталось прежним.

3. Почему это работает

Одинаковое прибавление сдвигает оба числа на числовой прямой одинаково. Расстояние между ними сохраняется, поэтому меньшее число остаётся меньшим, а большее — большим.

4. Практическое применение

Это свойство часто используют при переносе слагаемых и упрощении неравенств. Оно помогает привести запись к более удобному виду, не меняя смысла сравнения.



Основное свойство вычитания

Вычитание сохраняет знак Связь со сложением

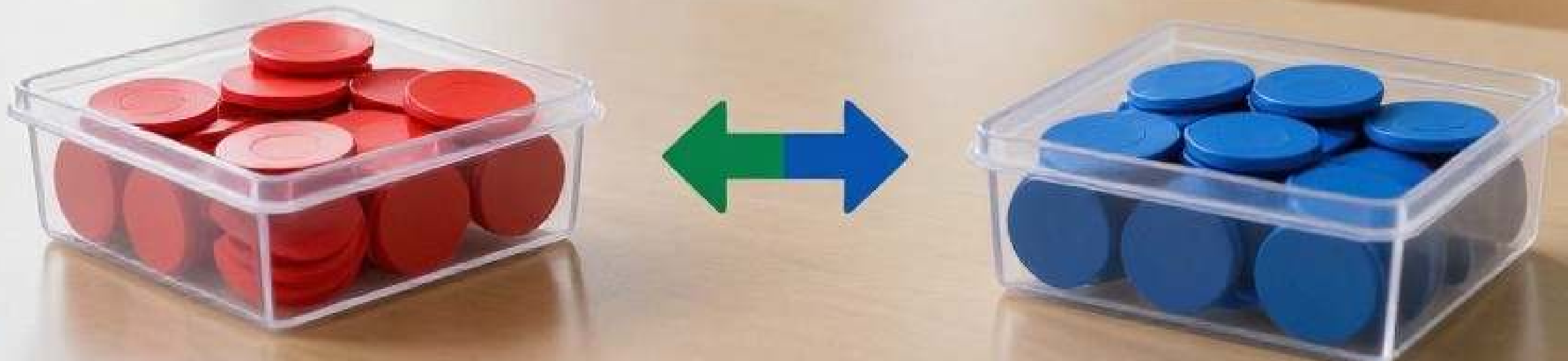
Если из обеих частей неравенства вычесть одно и то же число, знак сравнения сохраняется. Такое преобразование не нарушает порядок величин.

Вычитание можно рассматривать как прибавление противоположного числа. Поэтому это свойство является частным случаем основного свойства сложения и работает по тому же принципу.

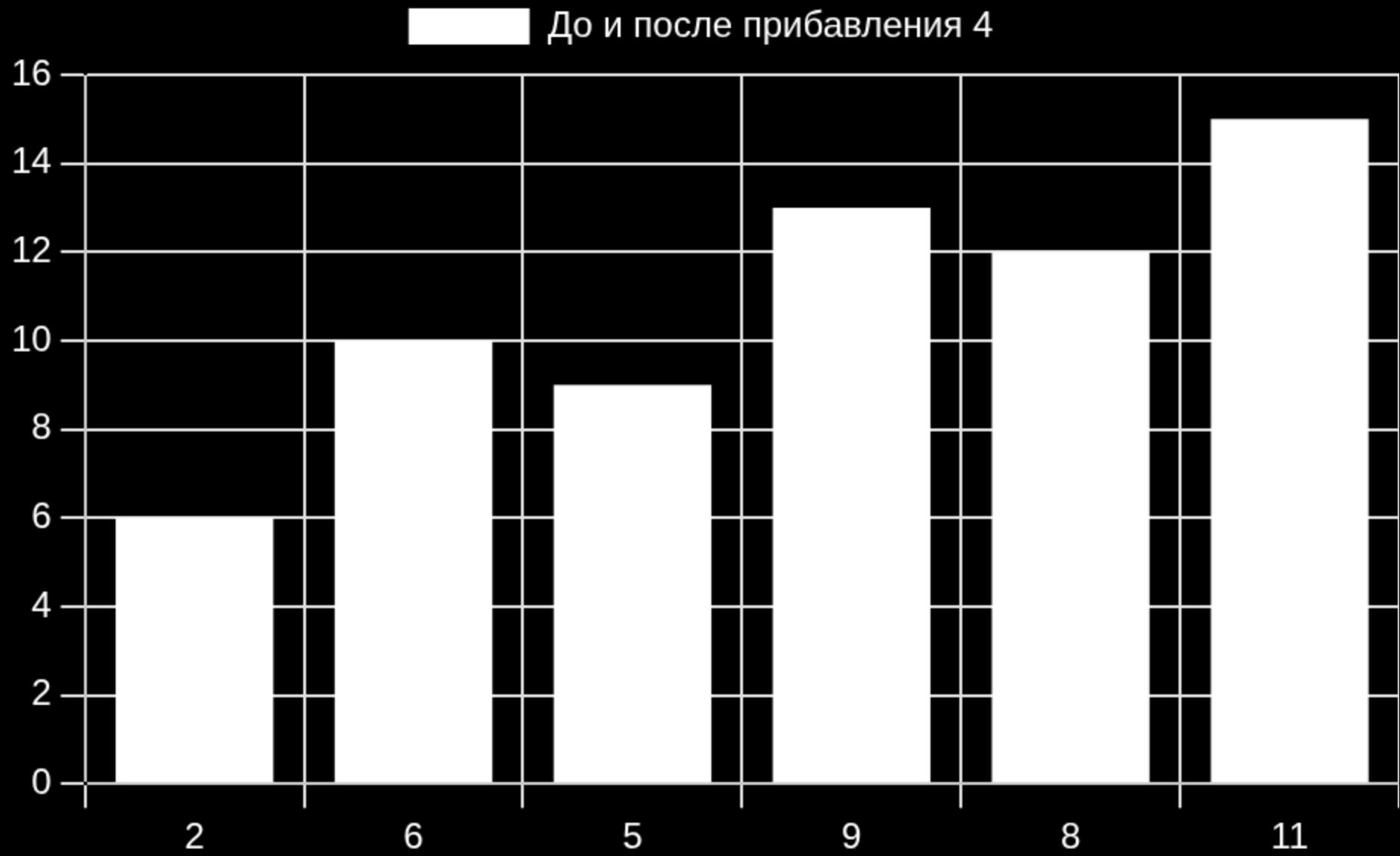
Пример преобразования Где помогает

Из $12 > 7$ получаем $12 - 3 > 7 - 3$, то есть $9 > 4$. После одинакового вычитания сравнение не изменилось, хотя сами значения стали меньше.

Это свойство удобно при упрощении выражений и переходе от сложного неравенства к более простой записи. Оно экономит шаги и делает решение нагляднее.



Как меняются значения после прибавления одного числа



На диаграмме показано, что одинаковое прибавление сдвигает оба числа на одну и ту же величину.

Порядок чисел сохраняется во всех парах, значит одинаковое прибавление не меняет знак сравнения.

Учебный пример по алгебре, без расчётных данных

Умножение неравенства на положительное число

1.

Правило умножения

Если обе части неравенства умножить на положительное число, знак сравнения сохраняется. Это справедливо и для обычных чисел, и для положительных дробей.

2.

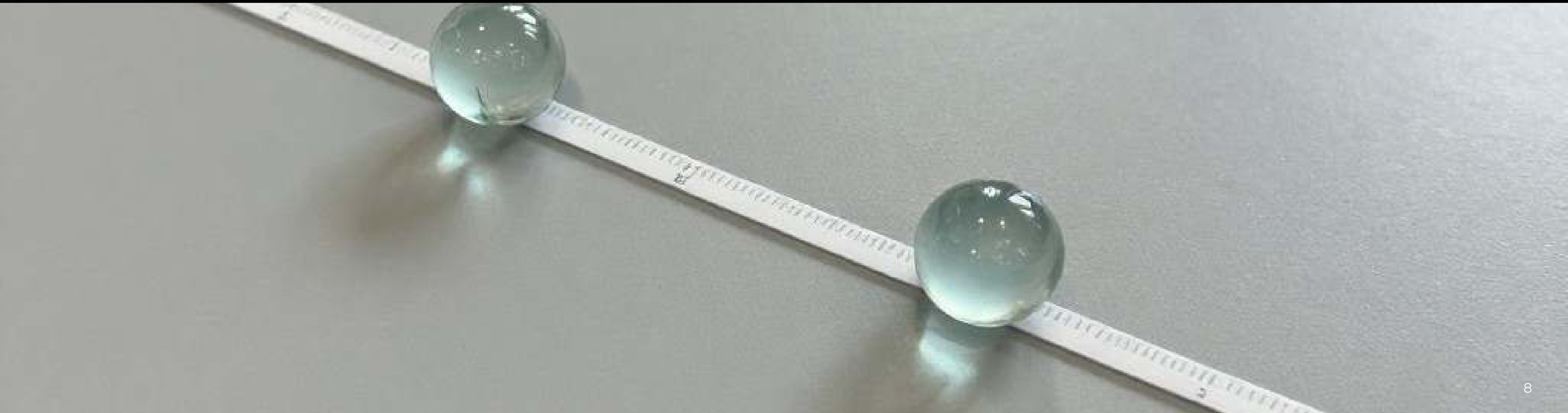
Пример действия

Из $3 < 7$ получаем $3 \cdot 2 < 7 \cdot 2$, то есть $6 < 14$. Если умножить на $\frac{1}{2}$, порядок тоже не изменится, потому что множитель положительный.

3.

Почему знак не меняется

Положительное число увеличивает или уменьшает обе части одинаково, но не переворачивает порядок. Поэтому направление сравнения остаётся прежним, как на числовой прямой.



Деление неравенства на положительное число

1. Основное правило

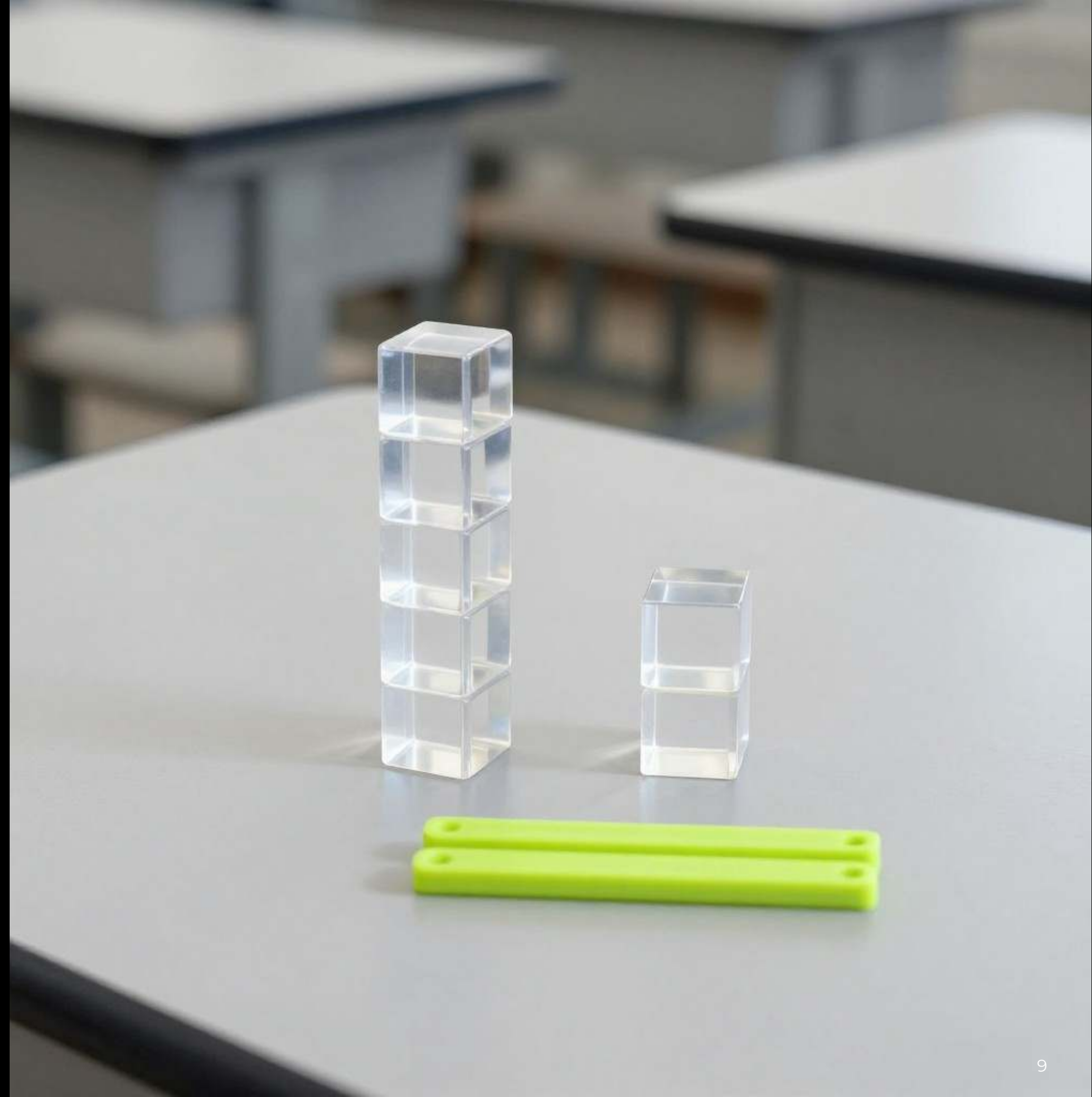
Если обе части неравенства разделить на положительное число, знак сравнения сохраняется. Деление действует так же, как обратное умножение, поэтому порядок не нарушается.

2. Понятный пример

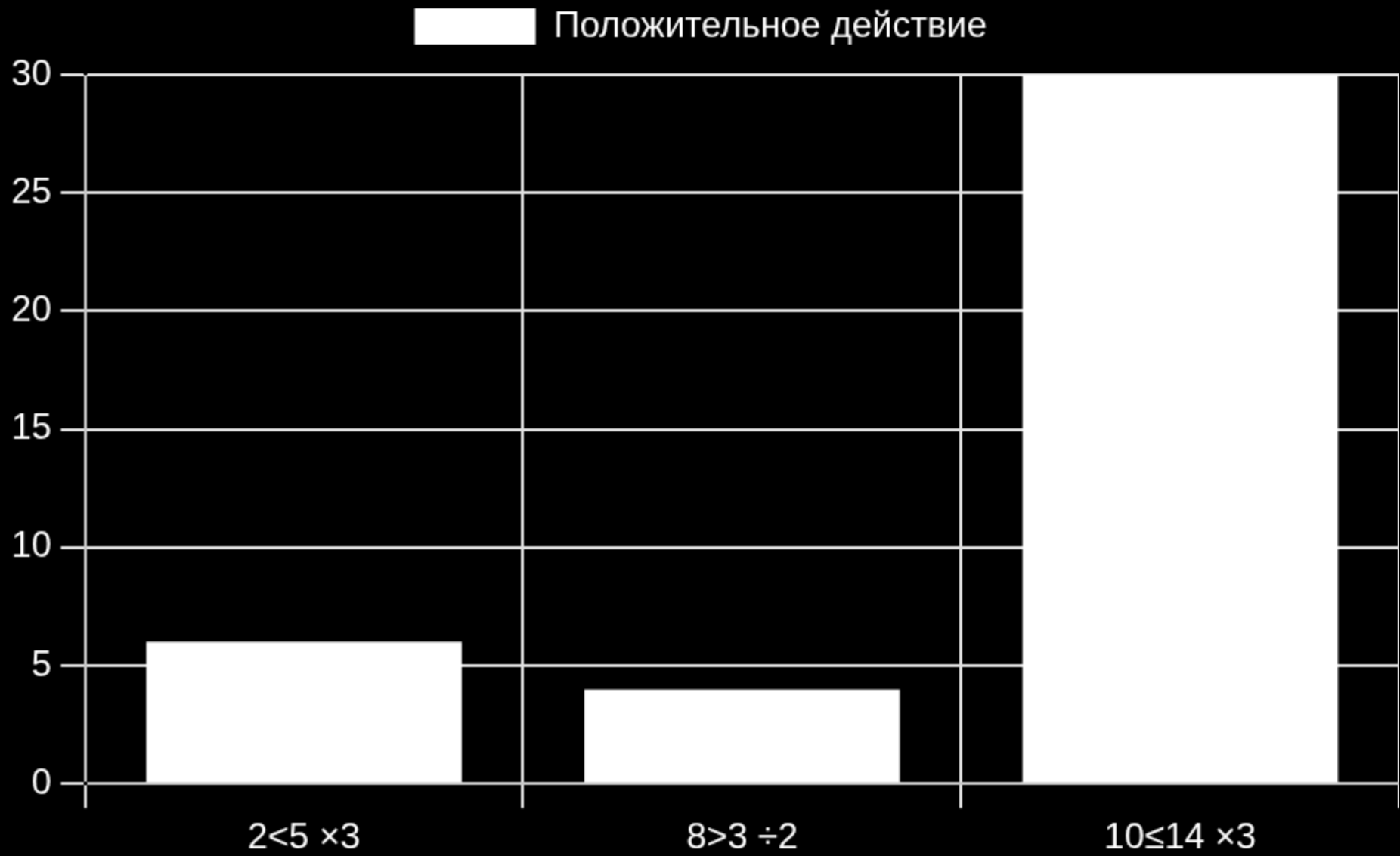
Из $18 \geq 6$ после деления на 3 получаем $6 \geq 2$. Значения стали меньше, но знак остался тем же, потому что делитель положительный.

3. Важно помнить

Деление на $\frac{1}{2}$ равносильно умножению на 2, поэтому правило работает и для дробных делителей. Делить на ноль нельзя, потому что это действие не определено.



Положительное число сохраняет направление сравнения



Положительный множитель или делитель меняет числа, но не переворачивает их порядок.

Во всех примерах знак сохраняется, значит положительное число не меняет направление сравнения.

Учебные примеры по алгебре, без внешних данных

Умножение на отрицательное число

1.

Правило знака

Если обе части неравенства умножить на отрицательное число, направление сравнения меняется на противоположное. Это нужно помнить отдельно от правил для уравнений, где знак равенства не меняется.

2.

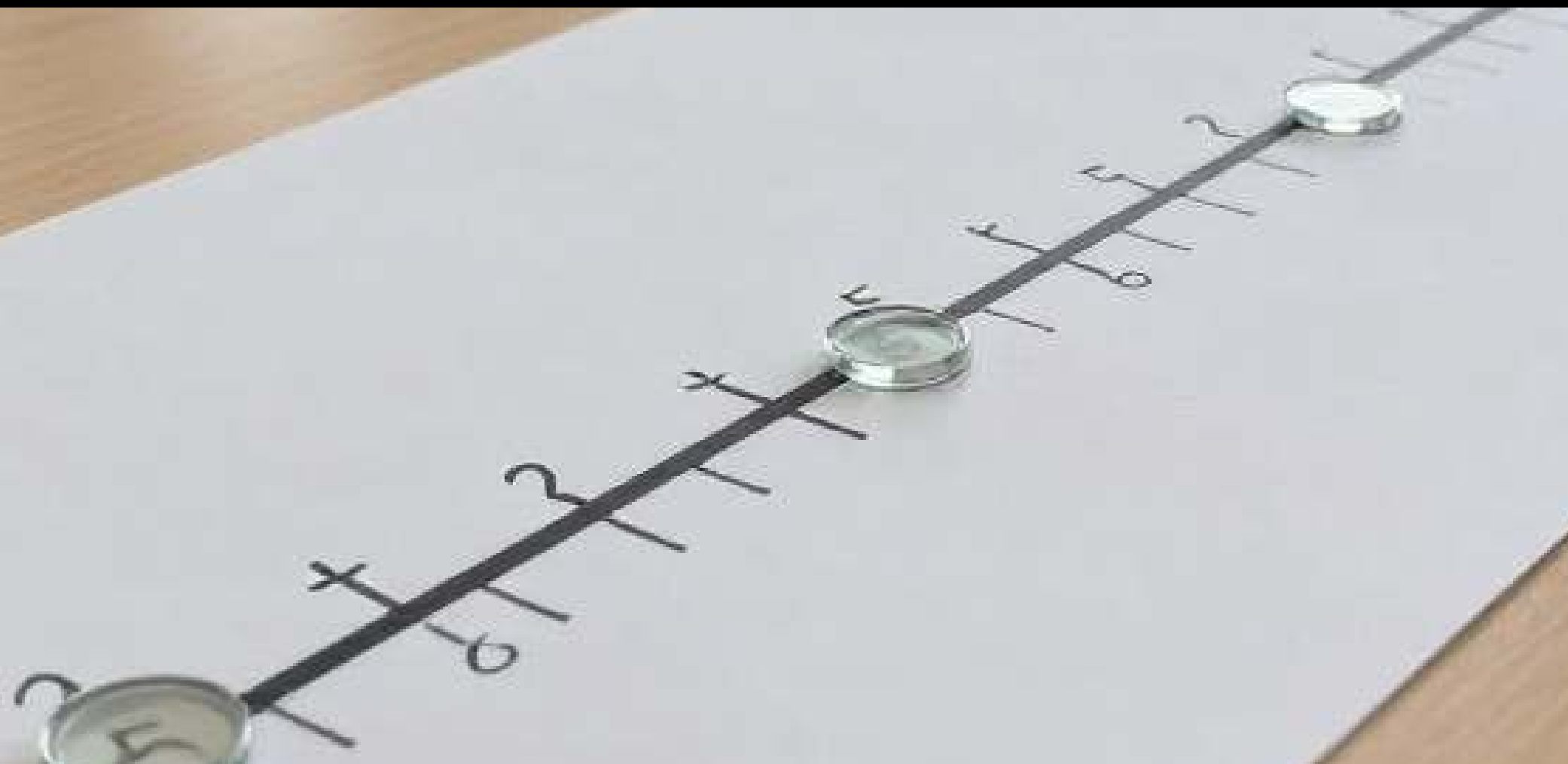
Почему так происходит

Отрицательное число меняет расположение точек на числовой прямой: большее по модулю значение может оказаться левее. Поэтому прежний порядок чисел нарушается, и знак сравнения приходится переворачивать.

3.

Пример преобразования

Из неравенства $2 < 5$ после умножения на -3 получаем $-6 > -15$. Левая часть стала меньше по значению, но на числовой прямой порядок оказался обратным, поэтому знак сменился.



Деление на отрицательное число

1. То же правило

При делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак сравнения тоже меняется. Деление можно рассматривать как умножение на обратное отрицательное число, поэтому результат будет таким же.

2. Проверка на примере

Если $-12 < -4$, то после деления на -4 получаем $3 > 1$. Числа стали положительными, а порядок сравнения изменился, потому что делитель был отрицательным.

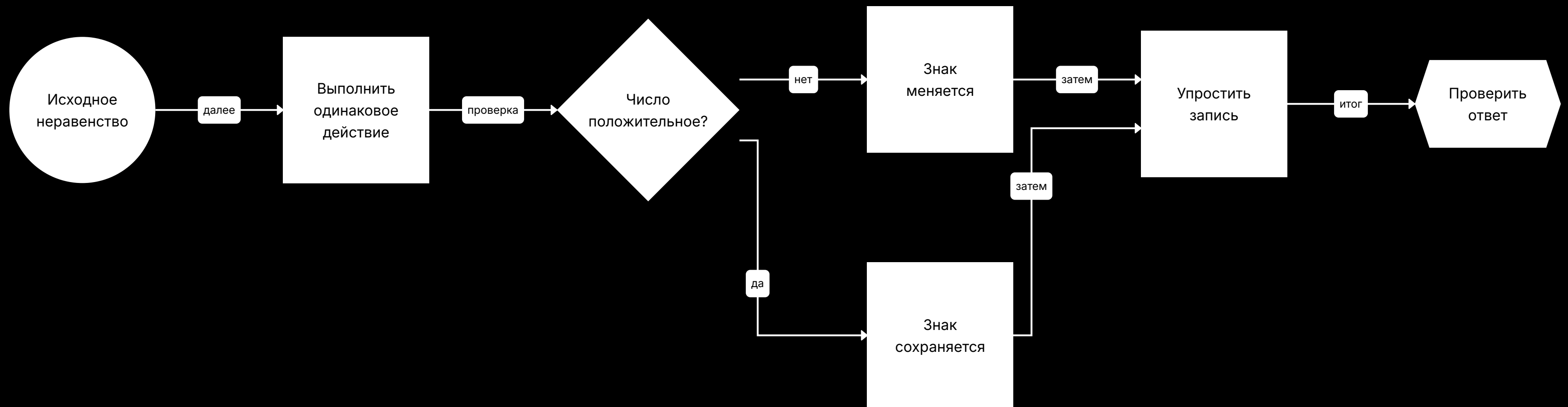
3. Что важно помнить

При делении нельзя менять только одну часть неравенства и нельзя делить на ноль. Меняются лишь сами значения и знак сравнения, а смысл ограничения остаётся тем же.



Алгоритм преобразования неравенства

Последовательность действий при работе с неравенствами в школьной алгебре



Неравенство на числовой прямой

Граница решения

Числовая прямая показывает, какие значения подходят в ответ. Граница отмечает начало промежутка, а вид точки подсказывает, входит ли это число в множество решений.

Включение и исключение

Закрашенная точка используется при знаках $\leq$ и $\geq$, потому что граница входит в ответ. Пустая точка ставится при $<$ и $>$, когда сама граница не подходит.

Направление промежутка

Стрелка вправо означает все числа больше выбранной границы, а стрелка влево — все числа меньше. Так легко увидеть решения вида $x > 2$, $x \leq 5$ и $-1 < x < 3$.

Сравнение выражений с помощью свойств неравенств

+

Суммы выражений

Если известно, что $a > b$ и $c > d$, можно сразу сделать вывод: $a + c > b + d$. Это помогает сравнивать суммы, не вычисляя каждое выражение отдельно.

×

Произведение на число

Когда $a > b$ и $c > 0$, знак сохраняется: $ac > bc$. Такое правило удобно при оценке значений, если множитель положительный и порядок чисел не нарушается.

$\Rightarrow$

Отрицательный множитель

Если $a > b$ и $c < 0$, то при умножении порядок меняется: $ac < bc$. Это свойство особенно важно при преобразовании выражений и проверке полученного результата.

Примеры преобразования неравенств

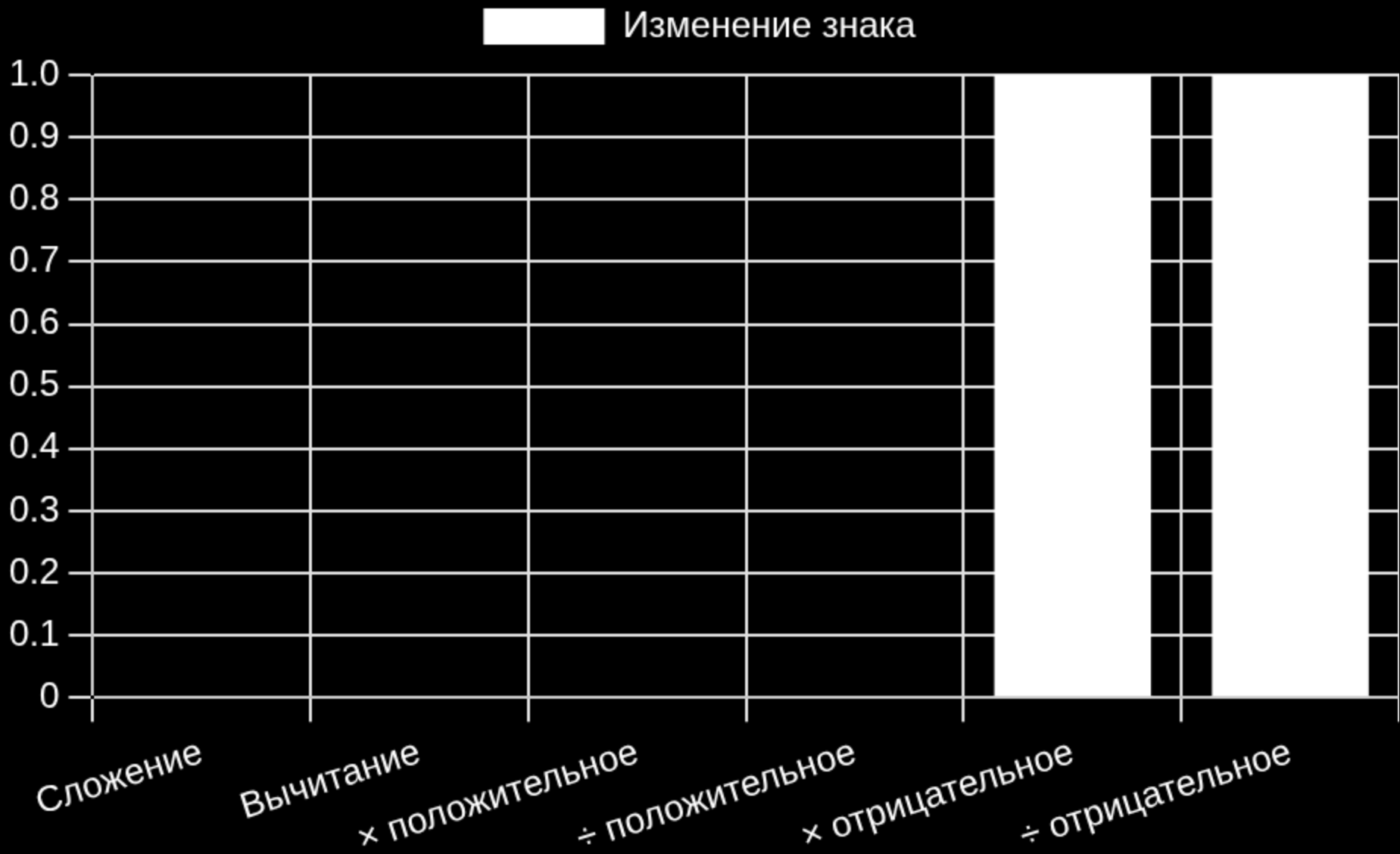
Исходное	Действие	Результат
$7 < 10$	$+5$	$12 < 15$
$9 > 4$	-2	$7 > 2$
$6 < 8$	$\times (-3)$	$-18 > -24$
$20 \geq 8$	$\div 4$	$5 \geq 2$

Учебник алгебры для основной школы

В таблице показано, как меняется знак неравенства при разных действиях с обеими частями. Это помогает увидеть общее правило на конкретных примерах.

При сложении, вычитании и делении на положительное число знак сохраняется; при умножении на отрицательное число он меняется на противоположный.

Когда знак сохраняется, а когда меняется



На схеме удобно видеть две группы правил: действия, которые сохраняют порядок чисел, и действия, после которых знак сравнения приходится переворачивать.

Операции с положительным числом не меняют знак, а умножение и деление на отрицательное число всегда требуют его смены.

Типичные ошибки при работе с неравенствами

Не меняют знак

Самая частая ошибка — забыть перевернуть знак при умножении или делении на отрицательное число. Из-за этого в ответ попадают неверные значения и нарушается порядок чисел.

Действуют не с обеими частями

Все преобразования нужно выполнять одинаково слева и справа. Если изменить только одну часть неравенства, сравнение перестает быть верным и решение теряет смысл.

Делят на ноль

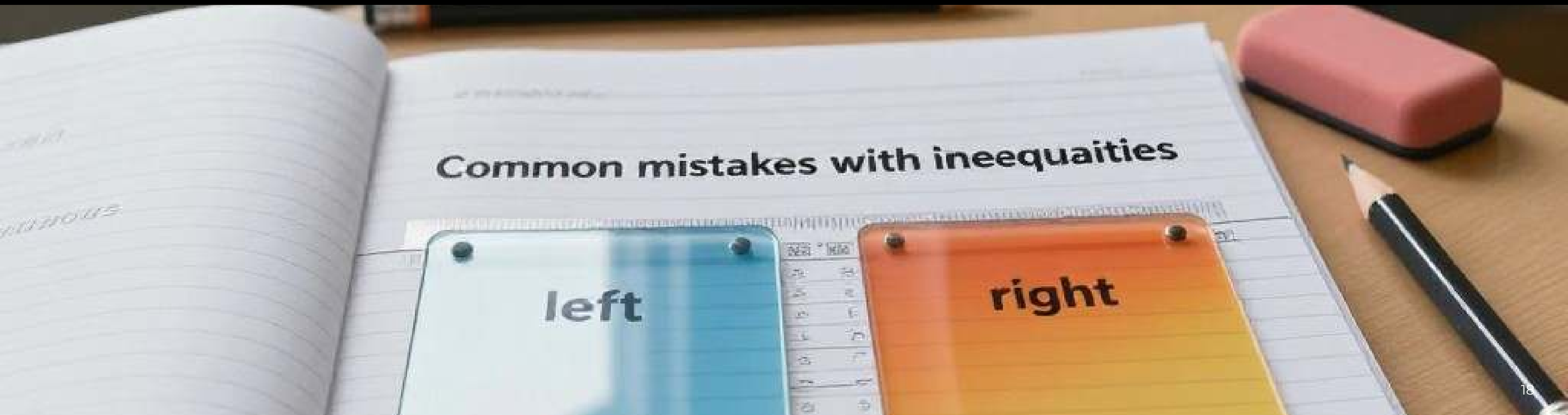
Деление на ноль невозможно, поэтому такой шаг нельзя использовать ни в одном преобразовании. Перед выполнением действия всегда нужно проверить, какое число выбрано.

Путают знаки

Строгие знаки $<$ и $>$ не включают границу, а $\leq$ и $\geq$ включают. Если перепутать их, можно либо потерять подходящее число, либо добавить лишнее.

Пропускают проверку

Ответ нужно проверить подстановкой или на числовой прямой. Такая проверка быстро показывает ошибку в знаке, неверную границу или лишний промежуток решений.



Неравенства в реальных задачах

Покупки и бюджет

Если на карманные расходы можно потратить не больше 500 рублей, удобно записать $x \leq 500$. Такая запись сразу показывает верхнюю границу допустимой суммы.

Расстояние и время

Когда маршрут должен быть короче 3 км, используют запись $s < 3$. Неравенство помогает быстро понять условие задачи и не перепутать допустимые значения.

Температура и ограничения

Если температура не должна опускаться ниже -5°C , пишут $t \geq -5$. Подобные записи встречаются в погоде, спорте, технике и повседневных правилах.

Главное правило, которое нельзя забыть

Неравенства подчиняются чётким законам: одинаковые действия с обеими частями сохраняют сравнение, а отрицательный множитель требует смены знака. Именно это делает их удобным инструментом для решений и проверок.