

Наибольшее и наименьшее значения функции

Ищем крайние значения функции через график, производную и сравнение значений.



Зачем это нужно в 10 классе

Эта тема показывает, как алгебра помогает находить лучший результат из нескольких возможных. Она нужна и в исследовании функций, и в задачах на оптимизацию: от площади и стоимости до высоты и значений на промежутке.



Основные определения

1. Наибольшее значение

Это самое большое значение функции на выбранном множестве. Оно сравнивается со всеми остальными значениями и показывает, где график принимает максимальную высоту на рассматриваемом участке.

2. Наименьшее значение

Это самое маленькое значение функции на том же множестве. Такое значение соответствует самой низкой точке графика среди всех допустимых значений аргумента на отрезке или в области определения.

3. Локальный экстремум

Локальный экстремум определяется только по соседним точкам. Функция может быть больше или меньше рядом, но не обязательно среди всех точек области определения, поэтому это более узкое понятие.

4. Глобальный экстремум

Глобальный экстремум сравнивается со всеми точками области определения или отрезка. Именно он даёт наибольшее или наименьшее значение функции в полном рассматриваемом множестве.



Как экстремум выглядит на графике

Самая высокая точка

Наибольшее значение видно как вершину, выше которой на рассматриваемом участке графика нет других точек. На отрезке такая точка может оказаться как внутри, так и на границе.

Самая низкая точка

Наименьшее значение соответствует впадине или самой низкой точке части кривой. Она также может располагаться в середине промежутка либо совпадать с концом отрезка.

Границы отрезка

Если функция изучается на отрезке, концы обязательно проверяют вместе с внутренними точками. Иногда именно крайняя точка оказывается максимальной или минимальной по сравнению со всеми остальными.

Вершина и впадина

График с вершиной и впадиной наглядно показывает, как меняются значения функции. Такие участки помогают увидеть, где функция поднимается, опускается и где может возникнуть экстремум.

Где чаще всего ищут максимум и минимум

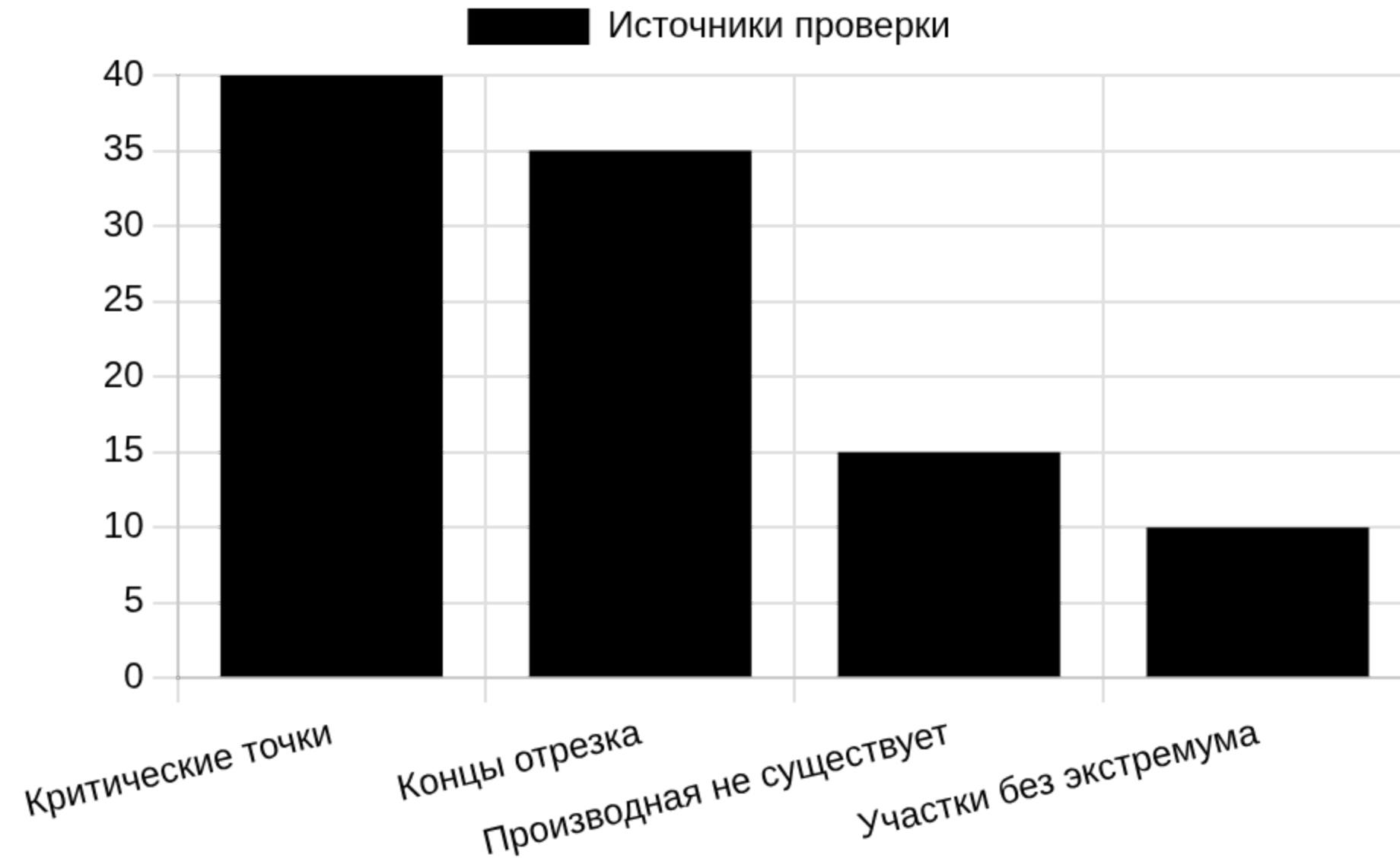


Диаграмма отражает типичную схему проверки: сначала внутренние кандидаты, затем границы промежутка. Это не строгая статистика, а наглядная модель алгоритма.

Главный вывод: максимум и минимум чаще всего находятся среди критических точек и на концах отрезка; особая точка ещё не гарантирует экстремум.

Схематическая иллюстрация по алгоритму нахождения экстремумов, школьный курс алгебры

Критические точки функции



$f'(x)=0$

Если производная в точке равна нулю и сама функция там определена, точка становится кандидатом на экстремум. Но одного этого условия недостаточно для окончательного вывода.



Производная не существует

Точка, где производная не существует, тоже может быть критической, если функция в ней определена. Такие случаи нужно проверять отдельно, потому что не всякая «острая» точка является максимумом или минимумом.

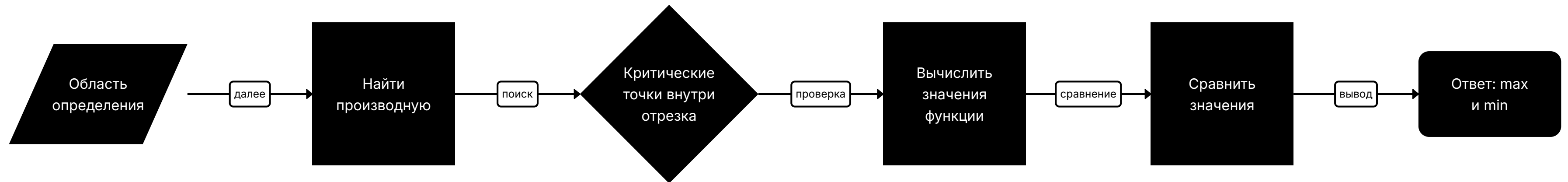


Нужна проверка

После нахождения критических точек сравнивают значения функции и исследуют знак производной. Только так можно понять, есть ли в точке экстремум и какой именно.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений на отрезке

Последовательность действий при исследовании функции на заданном промежутке



Признаки максимума и минимума

Сравнение основных признаков помогает быстро определить характер точки и не перепутать максимум с минимумом.

Смена знака производной — главный ориентир: она показывает, в какую сторону функция поворачивает и каков характер точки.

Признак	Максимум	Минимум
Знак f'	плюс → минус	минус → плюс
Ход функции	возрастает и убывает	убывает и возрастает
График	вершина	впадина

0

**производная в точке
внутреннего экстремума
равна этому значению**

Для дифференцируемой функции в точке внутреннего экстремума производная обязана обращаться в ноль. Но этого недостаточно: нужна дополнительная проверка.

Школьный курс алгебры и начал анализа

Достаточные признаки экстремума

1.

По первой производной

Если производная меняет знак с плюса на минус, функция переходит от возрастания к убыванию, и в точке возникает максимум. Переход от минуса к плюсу указывает на минимум.

2.

По второй производной

Когда $f'(x_0)=0$, знак второй производной помогает уточнить характер точки. При $f''(x_0)>0$ график вогнут вверх и точка даёт минимум, при $f''(x_0)<0$ — максимум.

3.

Условия применимости

Эти признаки работают только при выполнении всех необходимых предпосылок. Нужно убедиться, что функция определена в точке, производные существуют, а сама точка действительно рассматривается как внутренняя.

4.

Почему этого хватает

Смена знака производной или знак второй производной не просто описывают форму графика, а подтверждают направление движения функции. Поэтому они позволяют делать надёжный вывод о максимуме или минимуме.

На промежутке и на отрезке

Открытый промежуток

На открытом промежутке функция может быть ограниченной, но не достигать наибольшего или наименьшего значения: нужная точка может оказаться на границе, которая не входит в область рассмотрения.

Замкнутый отрезок

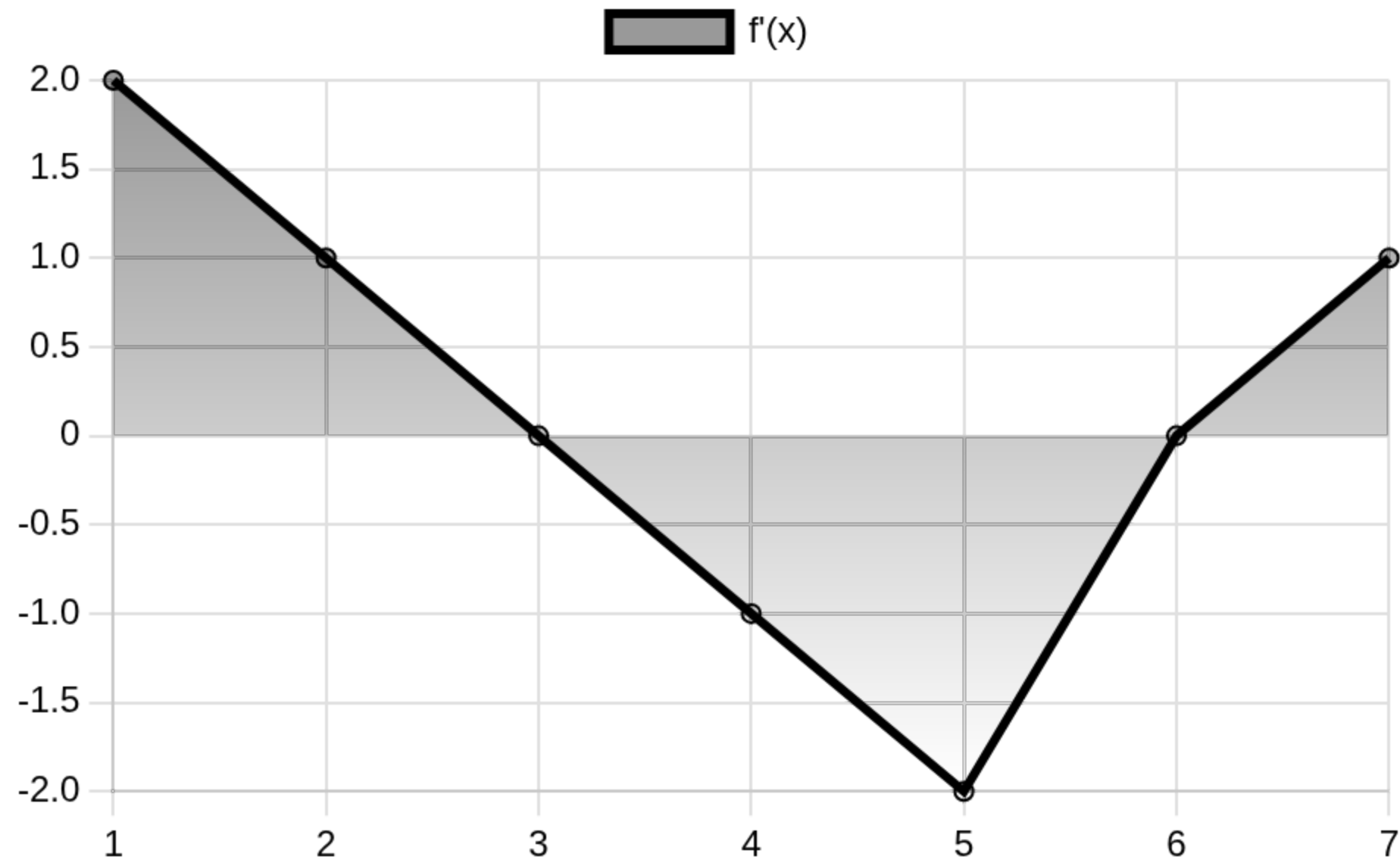
Для непрерывной функции на отрезке крайние значения обязательно находятся среди внутренних критических точек и концов отрезка, поэтому проверка только середины промежутка недостаточна.

Сравнение значений

Практически задача сводится к вычислению нескольких значений функции и их сравнению. На графике удобно отметить все точки-кандидаты и увидеть, где кривая поднимается выше или опускается ниже остальных.



Связь знака производной с ростом и убыванием



Здесь показана не сама функция, а её производная: по смене знака удобно отслеживать переходы между возрастанием и убыванием на разных участках.

Положительные значения соответствуют росту, отрицательные — убыванию. Точки с нулевой производной отмечают возможные места экстремума, если знак меняется.

Учебная схема по теме производной; иллюстративные данные, 2025

Типичные ошибки при нахождении экстремумов

Забывают концы

При поиске наибольшего и наименьшего значений на отрезке обязательно проверяют его границы. Если их пропустить, можно получить неверный ответ даже при правильном нахождении критических точек.

Ограничиваются уравнением

Одного решения уравнения $f'(x)=0$ недостаточно. Точка с нулевой производной должна быть проверена по знаку производной, иначе легко принять перегиб за максимум или минимум.

Не учитывают разрывы

Если производная не существует, но функция в точке определена, такая точка тоже может быть кандидатом на экстремум. Исключать её из рассмотрения нельзя без дополнительной проверки.

Выходят за область

Иногда значения сравнивают в точках, которые не принадлежат заданному промежутку или даже области определения. В таких случаях итог не относится к исходной задаче.

Путают локальное и глобальное

Локальный экстремум показывает поведение только рядом с точкой, а не на всём промежутке. Для ответа в задаче нужно понимать, ищется ли местный или общий результат.

Пример нахождения экстремумов для многочлена

Шаг	Результат	Значение
$f(x)$	x^3-3x^2-9x+1	—
$f'(x)$	$3(x-3)(x+1)$	—
Критические точки	$x=-1, x=3$	$f(-1)=6; f(3)=-26$

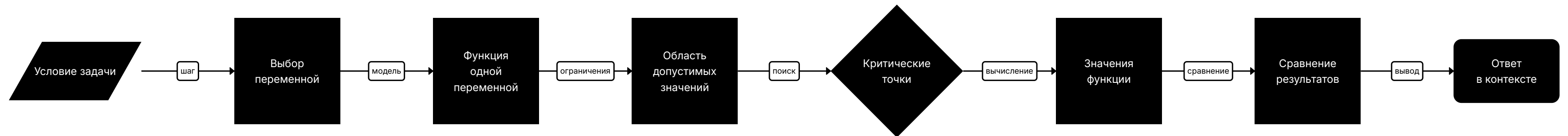
Школьный курс алгебры и начал анализа

Для функции $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ найдём производную, критические точки и значения функции в них. Итог зависит от выбранного промежутка.

На всей области определения у многочлена нет наибольшего и наименьшего значений. На отрезке нужно дополнительно сравнить эти точки с концами промежутка.

Решение задачи на оптимизацию

Последовательность действий при поиске экстремума в прикладной задаче



Геометрические задачи с экстремумом



Максимальная площадь

В задачах о прямоугольнике при заданном периметре нужно выразить одну величину через другую и исследовать площадь как функцию одной переменной, чтобы найти лучший вариант.



Минимальный расход

При фиксированном объёме часто требуется уменьшить площадь поверхности или количество материала. Экстремум показывает наиболее экономичную конструкцию при заданных условиях.



Наименьшее расстояние

В задачах на расстояние ищут точку, в которой значение функции становится минимальным. Такой подход помогает решать практические геометрические и координатные задачи без перебора вариантов.

Где экстремумы встречаются в школьных задачах

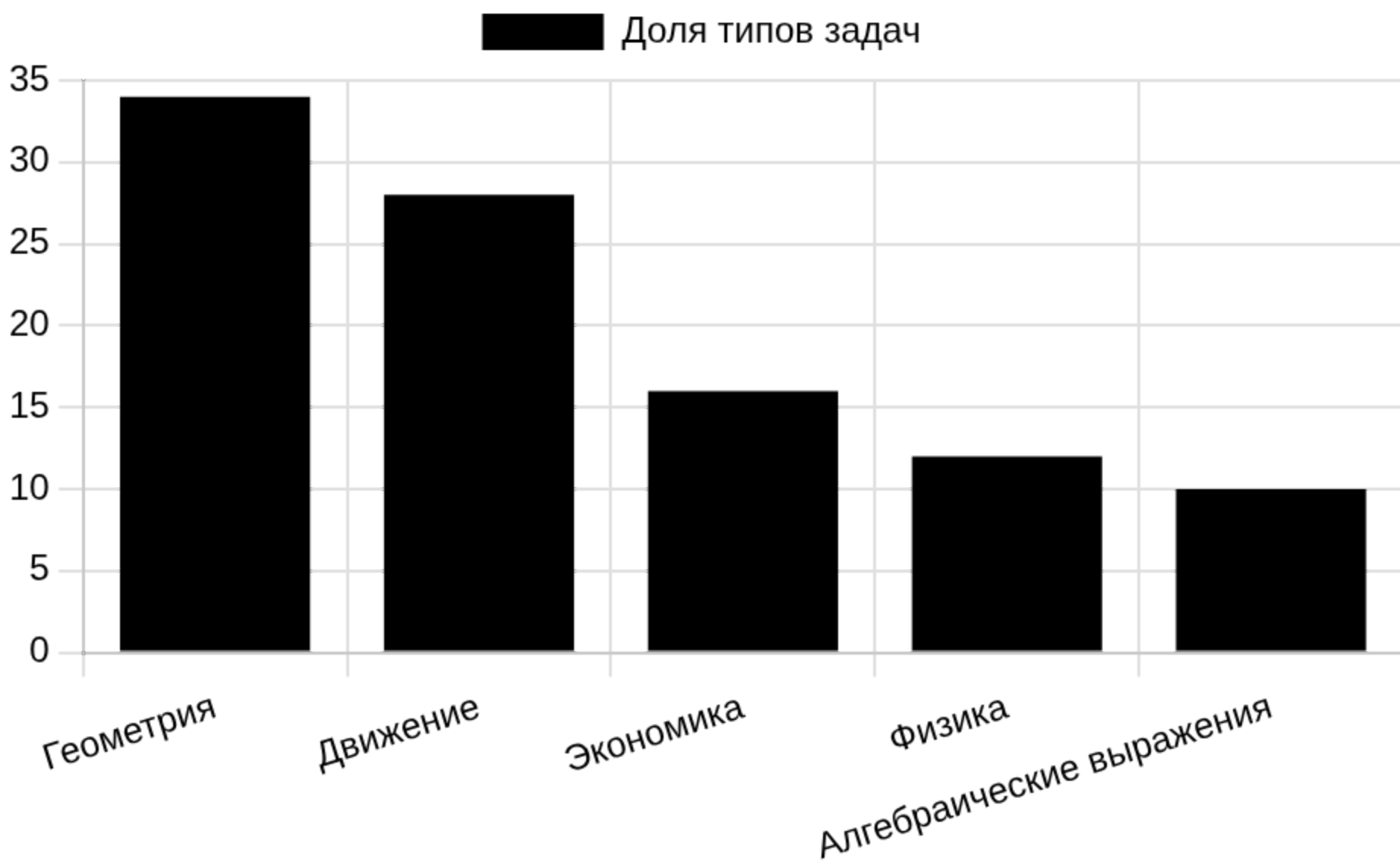


Диаграмма показывает не статистику класса, а типичное распределение примеров в учебных заданиях по теме экстремумов.

Чаще всего экстремумы связывают с геометрией и движением: там удобно вводить одну переменную и сразу видеть смысл найденного результата.

Иллюстративная учебная схема, 2025

Связь с полным исследованием функции

1. Область определения

Исследование начинается с определения всех допустимых значений аргумента. Без этого нельзя корректно искать экстремумы, сравнивать значения функции и делать выводы о поведении графика.

2. Нули и знаки

Затем находят нули функции и анализируют знаки на промежутках. Это помогает понять, где график пересекает ось Ox и как меняется положение кривой относительно неё.

3. Возрастание и убывание

Первая производная позволяет установить интервалы роста и спада. На этих участках сразу видно, где функция приближается к максимуму или минимуму и где происходит смена направления.

4. Выпуклость графика

Вторая производная уточняет форму графика и характер точек. Она помогает отличить обычную точку от перегиба и глубже понять, почему экстремум возникает именно там.

5. Итоговое описание

Наибольшее и наименьшее значения завершают исследование, потому что связывают все предыдущие шаги в единый вывод о поведении функции на рассматриваемом промежутке.

Как оформляется ответ в задаче

1.

Указать промежуток

Сначала обязательно записывают, на каком отрезке или в какой области искали экстремумы. Без этого ответ может оказаться неполным, потому что одна функция на разных промежутках ведёт себя по-разному.

2.

Привести точки и значения

Затем называют найденные точки и соответствующие им значения функции. Если экстремум достигается на конце отрезка, это тоже нужно отметить отдельно и без сокращений.

3.

Сформулировать вывод

В конце пишут, какое значение является наибольшим или наименьшим, и делают это в контексте задачи. Такой ответ показывает не только вычисление, но и понимание смысла результата.



Экстремумы: от формулы к ответу

Тема наибольшего и наименьшего значений функции объединяет график, производную и прикладные задачи. Если уверенно сравнивать значения и проверять все кандидаты, ответ будет точным и обоснованным.