

# Решение простейших тригонометрических уравнений

Научимся находить все решения и записывать их правильно.



# Тригонометрия вокруг нас

Тригонометрические уравнения появляются в задачах о движении, углах, окружности и колебаниях. Чтобы их решать, нужно уверенно читать значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса на единичной окружности и помнить основные углы  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ .



# Что называют простейшим тригонометрическим уравнением

## Одна функция

Простейшим называют уравнение, в котором одна тригонометрическая функция равна числу:  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$  или  $\operatorname{ctg} x = a$ . Здесь нет дополнительных преобразований и сложных выражений.

## Опора на свойства

Решение строится на том, какие значения может принимать функция, в каких четвертях находится нужный знак, и как значения повторяются через определённый промежуток.

## Найти все корни

Важно не только подобрать один подходящий угол, но и записать все решения сразу. Для этого используют симметрию на окружности и период функции.

## Аккуратная запись ответа

Ответ обычно записывают не одним числом, а в виде семейства решений с параметром  $k \in \mathbb{Z}$ . Так показывают, что корней бесконечно много.



# Едини́чная окру́жность как основа решений



## Координаты точки

На единичной окружности угол  $x$  задаёт точку с координатами  $(\cos x; \sin x)$ . Поэтому косинус читают как абсциссу, а синус — как ординату точки.

## Знаки по четвертям

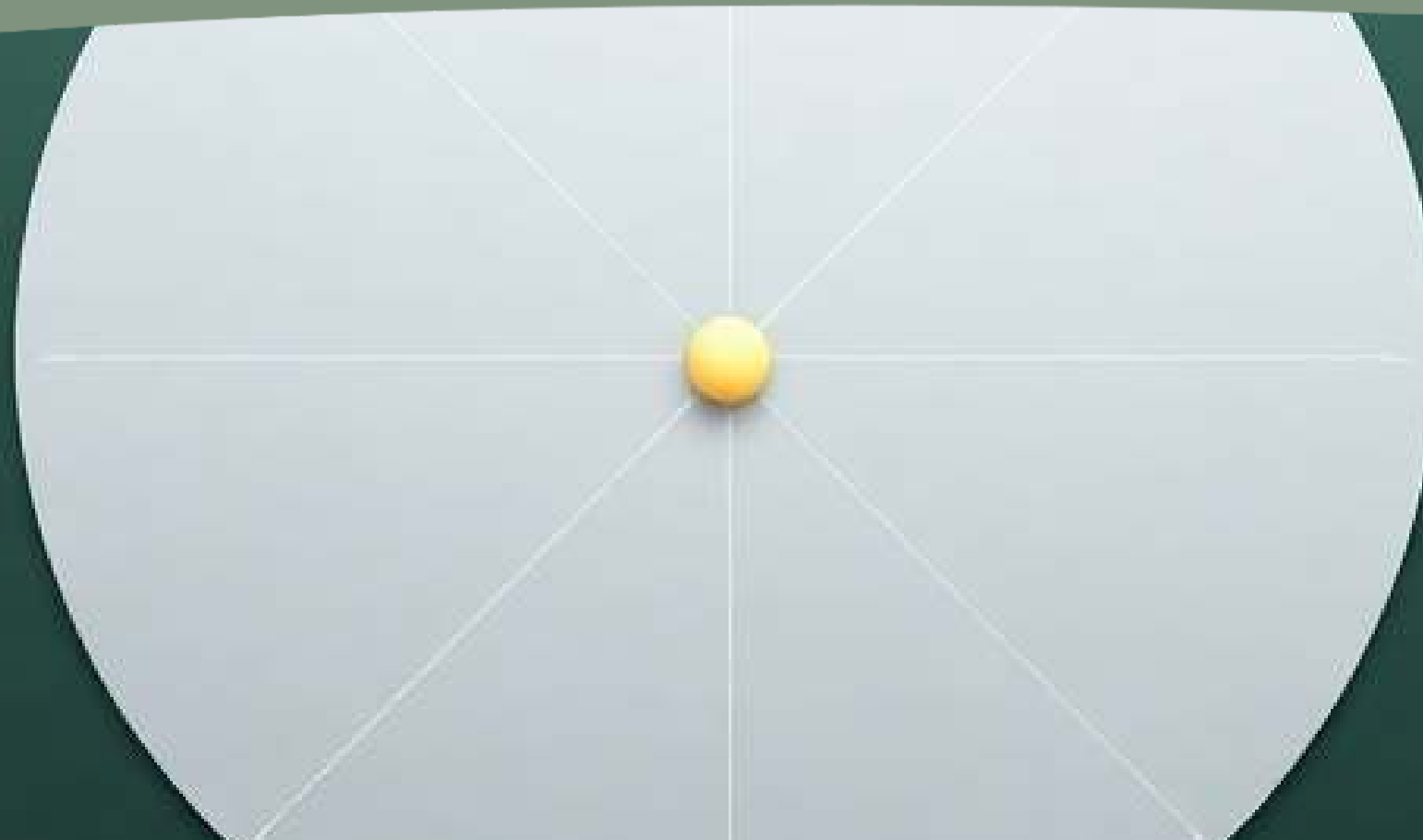
Положение точки в I, II, III или IV четверти сразу подсказывает знаки синуса и косинуса. Это помогает быстро отбирать подходящие углы без лишних вычислений.

## Связь с углами

Особенно удобно работать с основными углами  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ . Их легко найти на окружности и использовать как опорные при решении.

## Помощь в симметрии

Окружность показывает, какие углы дают одинаковые значения функции. Благодаря этому можно сразу увидеть пары решений и правильно записать общий ответ.



# Основные значения тригонометрических функций

Таблица помогает быстро вспомнить значения на основных углах и использовать их при решении уравнений.

Наиболее важные опорные углы легко узнаются по характерным значениям; для  $90^\circ$  тангенс не существует, потому что косинус равен нулю.

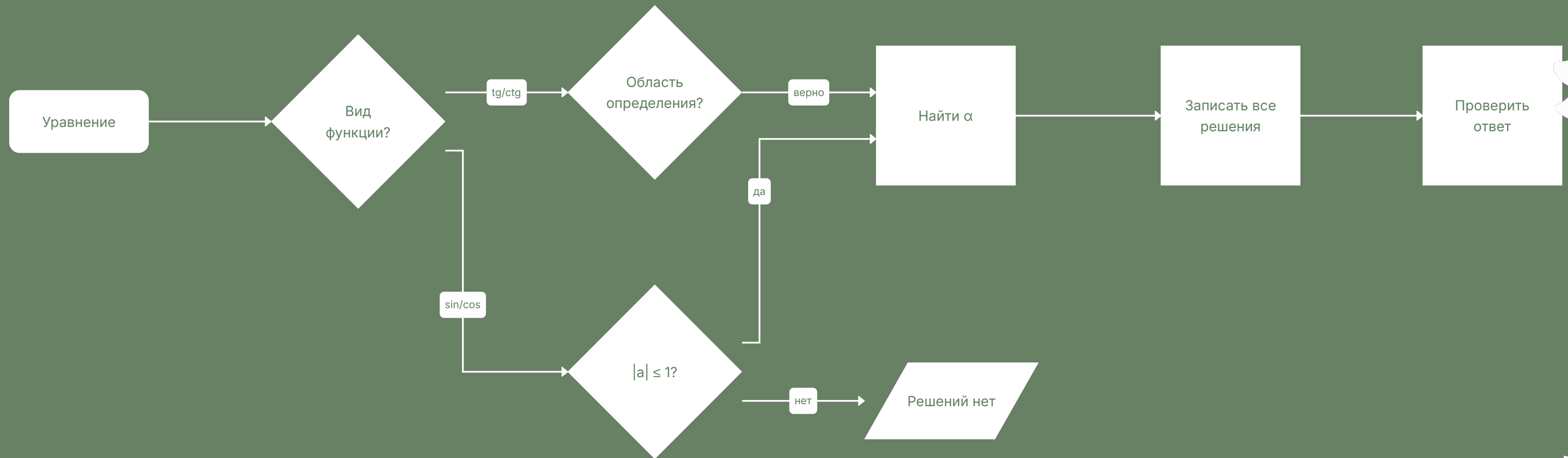
| Угол | sin                  | cos                  | tg                   |
|------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0°   | 0                    | 1                    | 0                    |
| 30°  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45°  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    |
| 60°  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$           |
| 90°  | 1                    | 0                    | не определён         |

Основные значения тригонометрических функций на единичной окружности



# Алгоритм решения простейшего уравнения

Схема показывает общий порядок действий при работе с  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$ .



# Как решается уравнение $\sin x = a$

## 1. Проверка числа $a$

Сначала смотрят, лежит ли число  $a$  в отрезке от  $-1$  до  $1$ . Если  $|a| > 1$ , уравнение не имеет решений, потому что синус не выходит за эти границы.

## 2. Опорный угол

При  $|a| \leq 1$  находят угол  $\alpha$ , для которого  $\sin \alpha = a$ . Это удобная отправная точка: дальше нужно найти все углы, дающие такое же значение синуса.

## 3. Два семейства решений

Для синуса подходят два угла на каждом периоде:  $x = \alpha + 2\pi k$  и  $x = \pi - \alpha + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Они симметричны относительно оси  $Oy$ .

## 4. Отрицательные значения

Если  $a$  отрицательно, нужные точки находятся ниже оси  $Ox$ . На единичной окружности их легко увидеть как симметричные положения относительно горизонтальной оси.



# Сколько решений имеет уравнение $\sin x = a$

Число решений

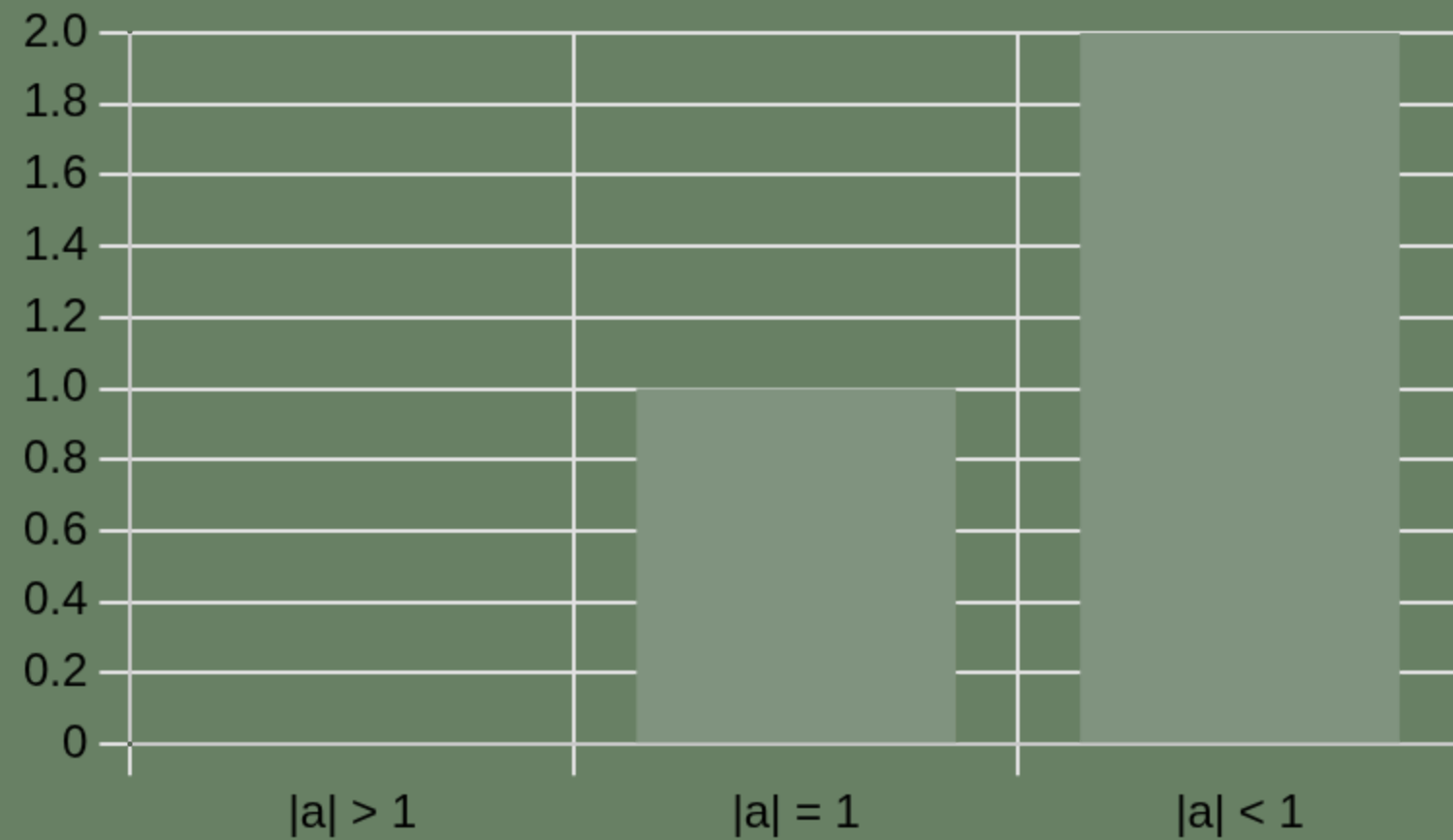


График показывает, как меняется число семейств решений в зависимости от значения  $a$  и почему границы  $-1$  и  $1$  особенно важны.

Число решений определяется диапазоном значений синуса: вне отрезка  $[-1; 1]$  корней нет, внутри него появляется два семейства.

*Анализ области значений функции  $\sin x$  и периодичности  $2\pi$*

# Как решается уравнение $\cos x = a$



## 1. Проверка значения

Сначала убеждаются, что  $|a| \leq 1$ . Если число выходит за эти пределы, уравнение  $\cos x = a$  не имеет решений, потому что косинус принимает только такие значения.

## 2. Поиск опорного угла

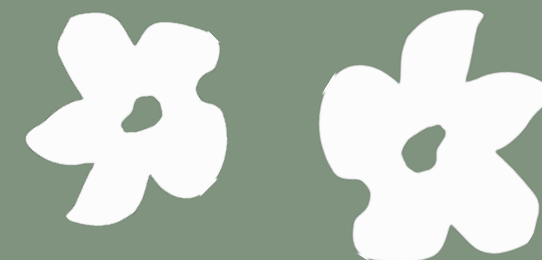
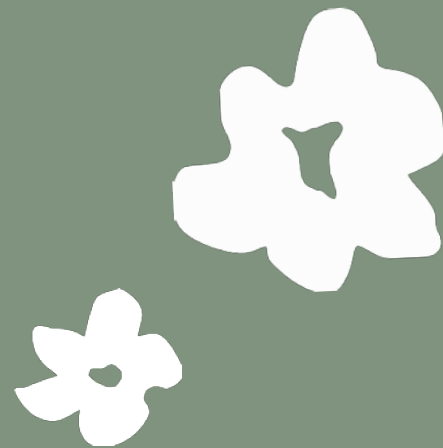
Если решение возможно, находят угол  $\alpha$ , для которого  $\cos \alpha = a$ . Этот угол помогает сразу увидеть все подходящие точки на единичной окружности.

## 3. Запись общего решения

Решения можно писать как  $x = \pm\alpha + 2\pi k$ . Часто используют и формы  $x = \alpha + 2\pi k$ ,  $x = 2\pi - \alpha + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 4. Симметричные точки

У косинуса одинаковые значения получают точки, расположенные симметрично относительно оси  $Ox$ . Поэтому на каждом периоде обычно возникает пара решений.



# Симметрия решений для косинуса

## Отражение относительно оси

Если две точки на окружности находятся по разные стороны от оси  $Ox$ , их косинусы совпадают. Это главное свойство, которое помогает найти второе решение.

## Пара углов на периоде

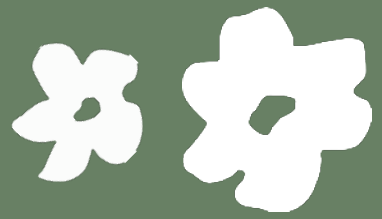
Для каждого опорного угла обычно существует второй угол, дополняющий его до полного круга. Поэтому ответы для косинуса часто записывают парой значений.

## Удобство на рисунке

На схеме легко увидеть углы  $\alpha$  и  $2\pi - \alpha$  как симметричные точки. Такое изображение помогает не перепутать формулу и быстрее проверить ответ.



# Как решается уравнение $\operatorname{tg} x = a$



## 1. Проверяем определение

Тангенс не существует при  $x = \pi/2 + \pi k$ , потому что  $\cos x = 0$ . Поэтому сначала убеждаемся, что искомые углы не попадают в точки разрыва функции.

## 2. Находим опорный угол

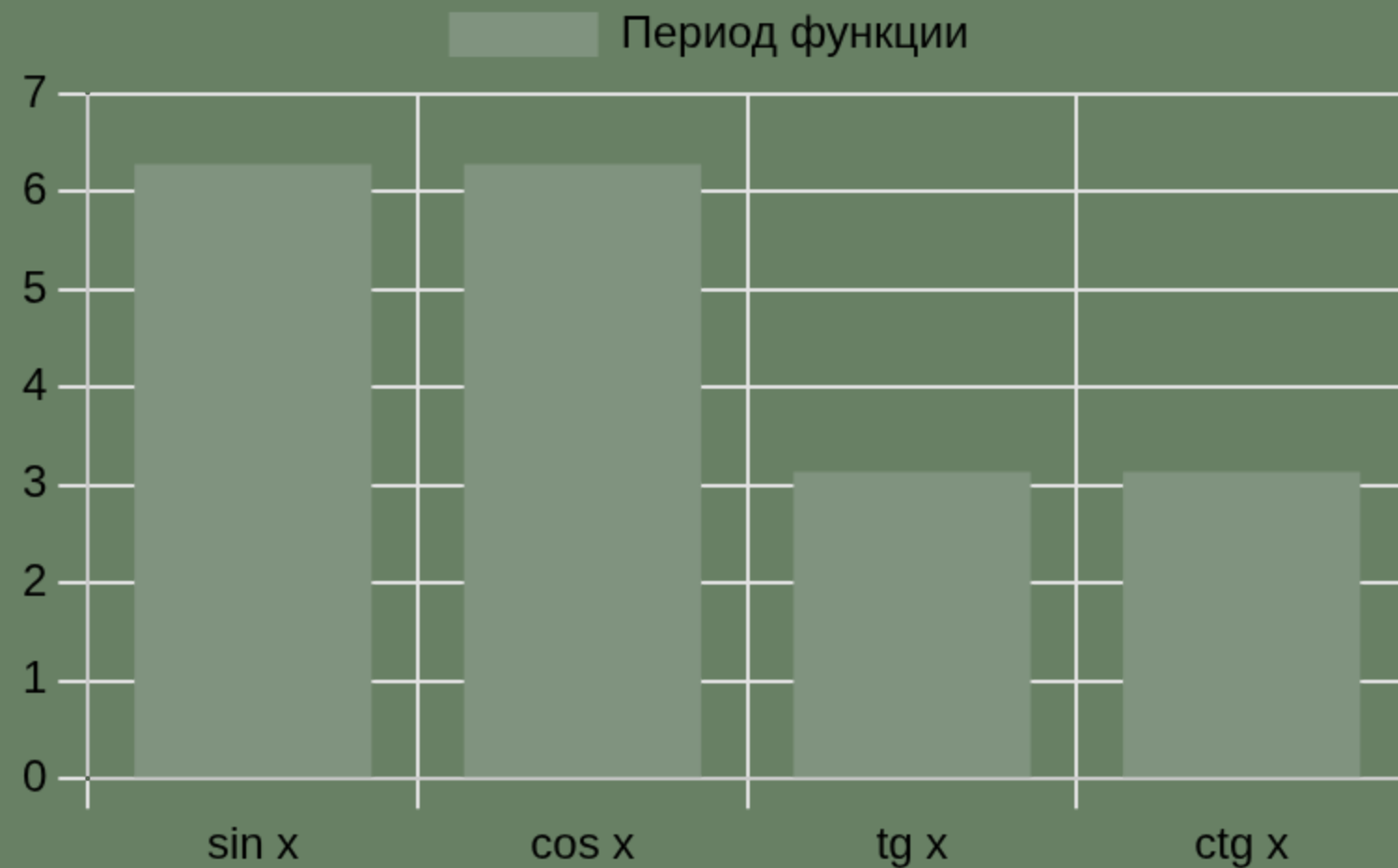
Если  $a$  — любое действительное число, решение есть всегда. Берут угол  $\alpha$ , для которого  $\operatorname{tg} \alpha = a$ , и используют его как основу для ответа.

## 3. Записываем общий ответ

Поскольку период тангенса равен  $\pi$ , все решения повторяются через  $\pi$ :  $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Так получают бесконечное семейство корней.



# Периоды тригонометрических функций



*Свойства тригонометрических функций; школьный курс алгебры*

На диаграмме хорошо видно: у синуса и косинуса повторение идёт медленнее, чем у тангенса и котангенса.

Период определяет, как часто повторяются решения: у  $\sin$  и  $\cos$  он равен  $2\pi$ , у  $\text{tg}$  и  $\text{ctg}$  —  $\pi$ .

# Как решается уравнение $\operatorname{ctg} x = a$

## 1. 1. Проверяем область

Сначала помним: котангенс не определён при  $x = \pi k$ , потому что там  $\sin x = 0$ . Эти точки нужно исключить из рассуждения, иначе ответ будет неполным.

## 2. 2. Ищем опорный угол

Для любого действительного  $a$  уравнение имеет решения. Находят угол  $\alpha$ , для которого  $\operatorname{ctg} \alpha = a$ , обычно опираясь на основные значения и связь с тангенсом.

## 3. 3. Записываем периодичность

У котангенса период равен  $\pi$ , поэтому все решения повторяются через  $\pi$ . Общая запись:  $x = \operatorname{arccotg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , без дополнительных ограничений на  $a$ .

## 4. 4. Проверяем ответ

После записи полезно убедиться, что полученные углы не совпадают с точками, где функция не определена. Это особенно важно при работе с отрицательными значениями  $a$ .

# Сравнение четырёх простейших уравнений

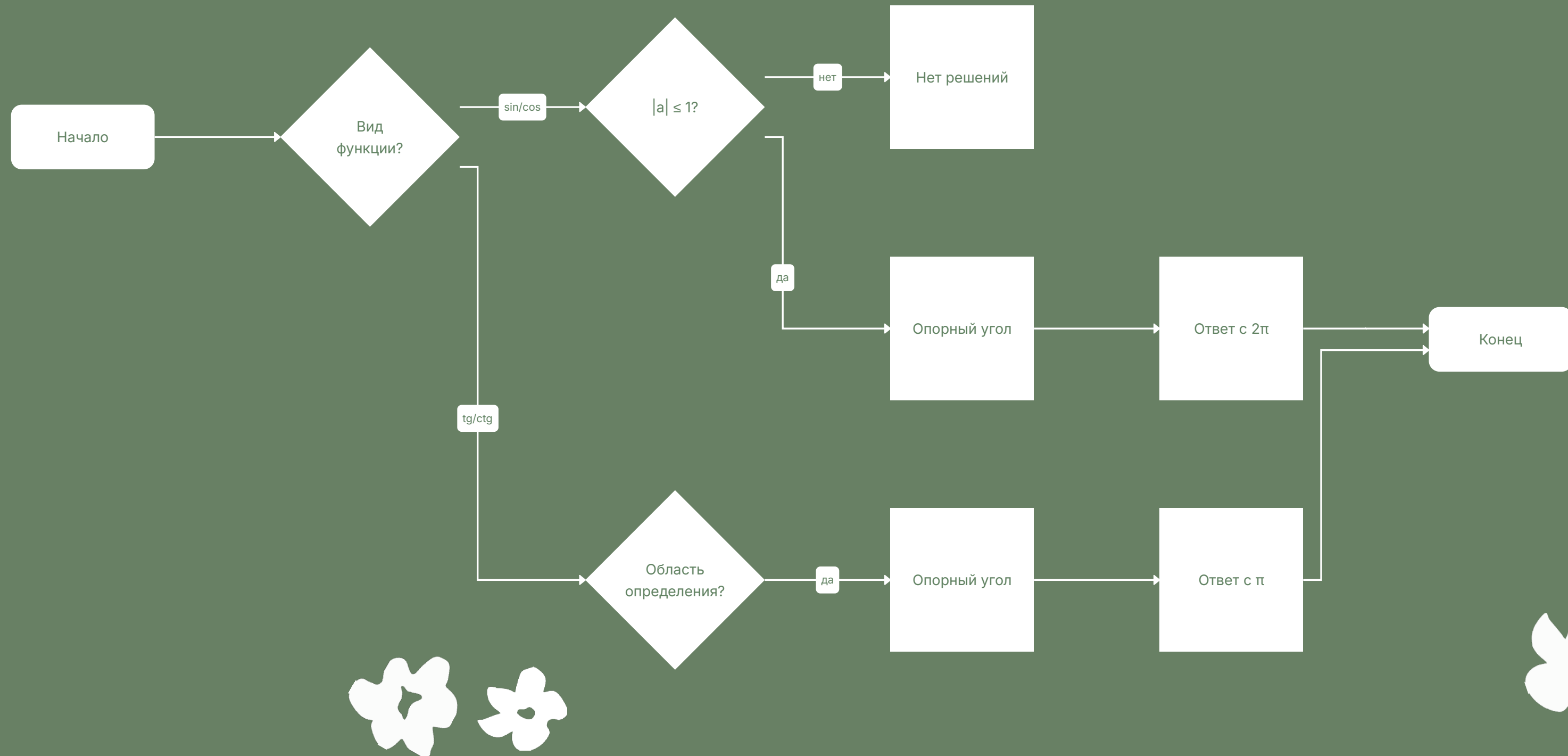
Таблица помогает быстро увидеть, когда уравнение имеет решения, сколько семейств ответов получается и какой период нужно учитывать.

Главные различия связаны с областью значений и периодом: синус и косинус ограничены, а тангенс и котангенс определены для любого  $a$ .

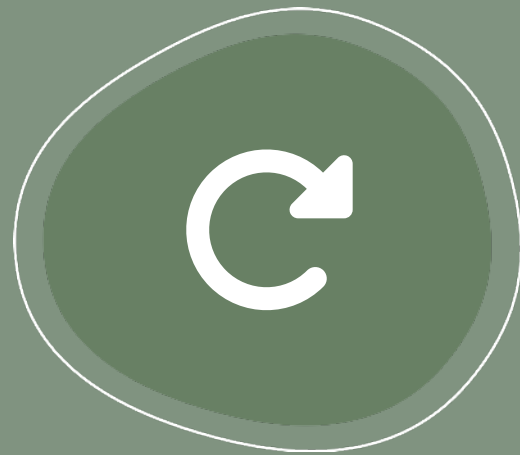
| Уравнение                  | Решения                | Период |
|----------------------------|------------------------|--------|
| $\sin x = a$               | $ a  \leq 1$ ; 2 семьи | $2\pi$ |
| $\cos x = a$               | $ a  \leq 1$ ; 2 семьи | $2\pi$ |
| $\operatorname{tg} x = a$  | любое $a$ ; 1 семья    | $\pi$  |
| $\operatorname{ctg} x = a$ | любое $a$ ; 1 семья    | $\pi$  |

# Проверка допустимости числа $a$

Схема показывает, как выбирать путь решения в зависимости от вида тригонометрического уравнения.



# Типичные ошибки в решении



## Забывают период

В ответе иногда пишут только один корень и не добавляют семейство решений. Для тригонометрических уравнений это ошибка, потому что значения повторяются через период функции.



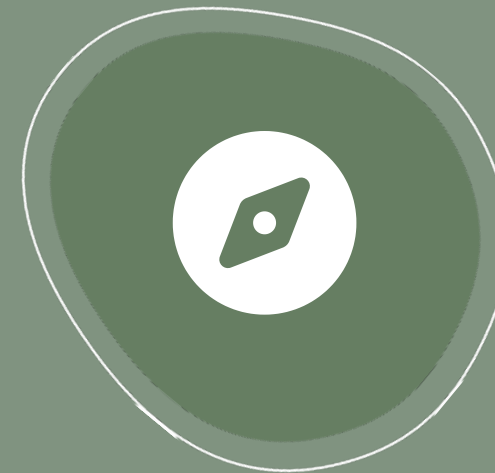
## Берут не все корни

Для  $\sin x = a$  и  $\cos x = a$  часто находят только один угол. Нужно помнить о второй симметричной точке на единичной окружности и записывать оба семейства.



## Путают формулы

Формулы для синуса и косинуса похожи, поэтому их легко перепутать. Но у каждого уравнения свой набор углов, и замена одной записи другой меняет ответ.



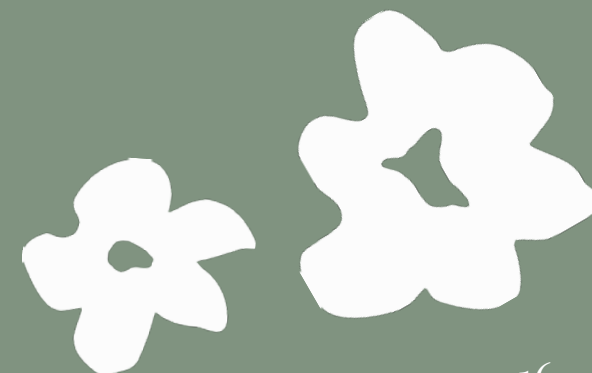
## Ошибаются в четверти

Знак функции зависит от четверти, в которой расположен угол. Если определить его неверно, можно выбрать неправильный опорный угол и получить неверные решения.

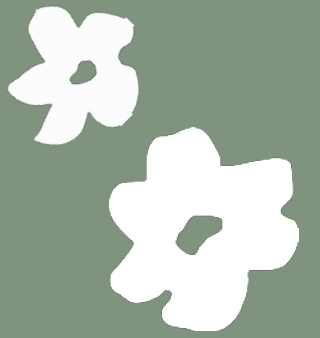


## Смешивают единицы измерения

Нужно различать градусы и радианы:  $30^\circ$  не равно  $\pi/30$ , а  $30^\circ$  соответствует  $\pi/6$ . Такая путаница особенно часто приводит к ошибкам в ответе.

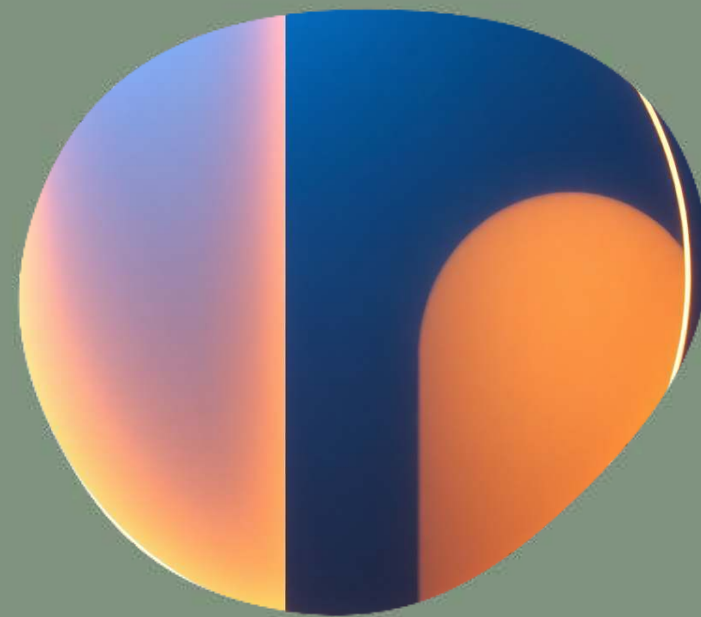


# Примеры с опорными углами



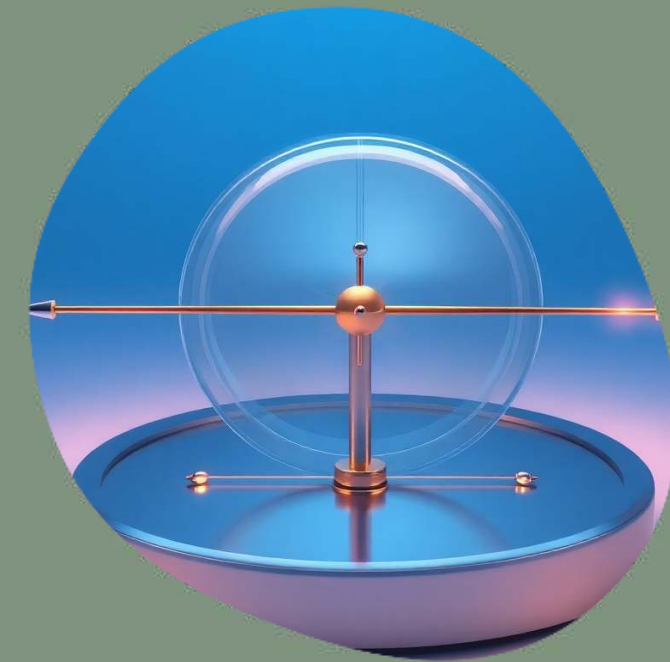
## Синус и две симметричные точки

Уравнение  $\sin x = \sqrt{2}/2$  даёт два направления на единичной окружности:  $x = \pi/4 + 2\pi k$  и  $x = 3\pi/4 + 2\pi k$ . Эти точки лежат в I и II четвертях, где синус положителен.



## Косинус в левой половине окружности

Для  $\cos x = -1/2$  подходят углы  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$ . Здесь значение косинуса отрицательно, потому что точки находятся слева от оси Oy, а ответы повторяются через  $2\pi$ .



## Тангенс и котангенс с периодом $\pi$

Уравнения  $\tan x = 1$  и  $\cot x = 1$  имеют по одному семейству решений:  $x = \pi/4 + \pi k$ . На рисунке удобно отметить, что одинаковые значения повторяются уже через поворот.



# Связь значения $a$ и существования решений



*Свойства областей значений тригонометрических функций*

Высота столбцов показывает, что для  $\sin x$  и  $\cos x$  решения исчезают за пределами отрезка  $[-1; 1]$ , а  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  остаются определены.

Область значений функции сразу показывает, есть ли корни: у синуса и косинуса — только внутри  $[-1; 1]$ , у тангенса и котангенса — для любого  $a$ .

# Мини-практикум с ответами

Проверь, насколько уверенно ты находишь опорный угол и записываешь общее решение с нужным периодом.

В каждом примере достаточно узнать опорный угол и не забыть о периоде:  $2\pi$  для  $\sin$  и  $\cos$ ,  $\pi$  для  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$ .



| № | Уравнение                        | Ответ                     |
|---|----------------------------------|---------------------------|
| 1 | $\sin x = \frac{1}{2}$           | $\pi/6, 5\pi/6 + 2\pi k$  |
| 2 | $\cos x = -\frac{1}{2}$          | $2\pi/3, 4\pi/3 + 2\pi k$ |
| 3 | $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ | $\pi/3 + \pi k$           |
| 4 | $\operatorname{ctg} x = 1$       | $\pi/4 + \pi k$           |

*Задания по теме урока*



# Главные выводы урока

Сегодня мы научились решать простейшие тригонометрические уравнения через единичную окружность, опорные углы и период. Главное — проверять область допустимых значений и записывать ответ полностью.