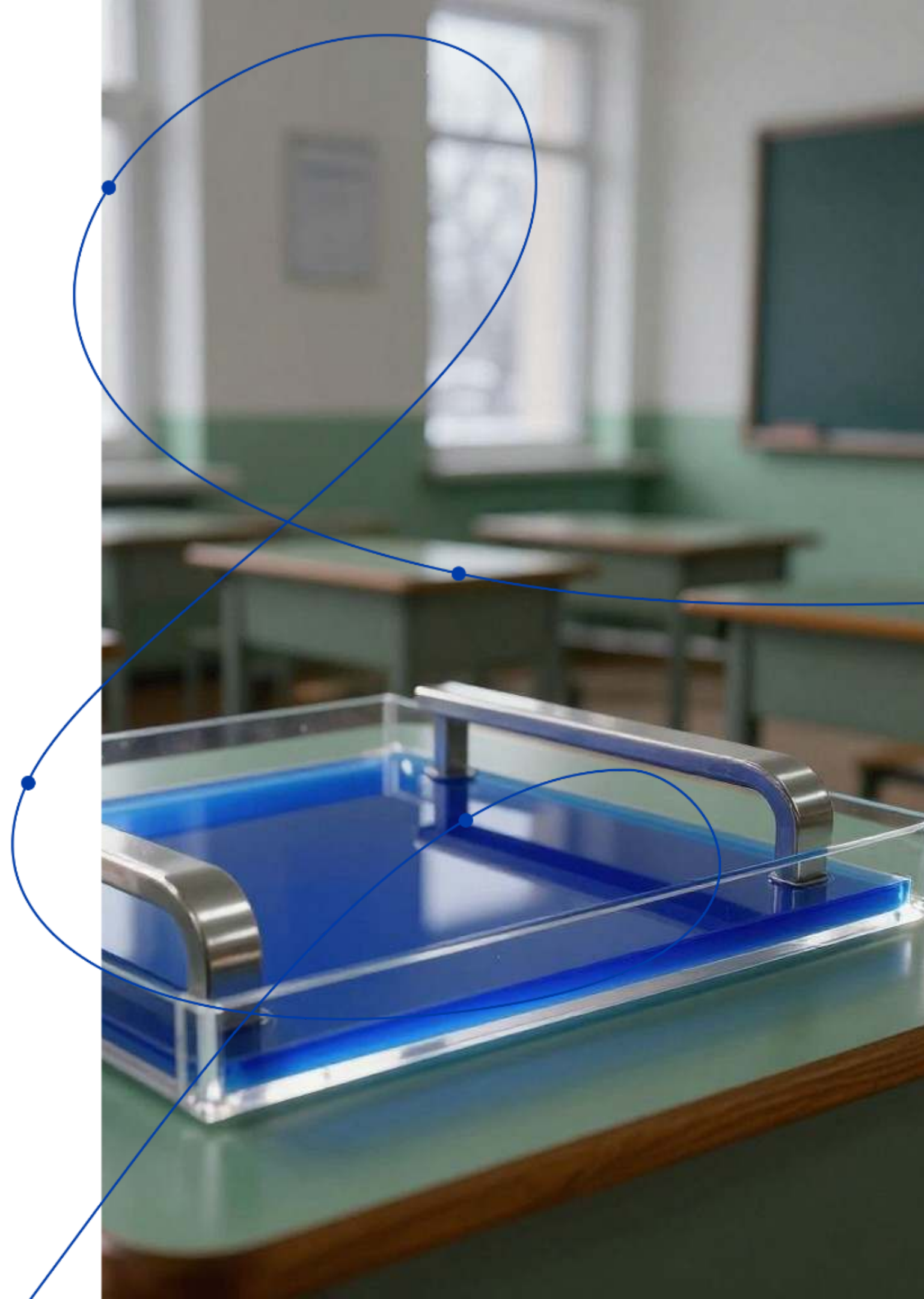


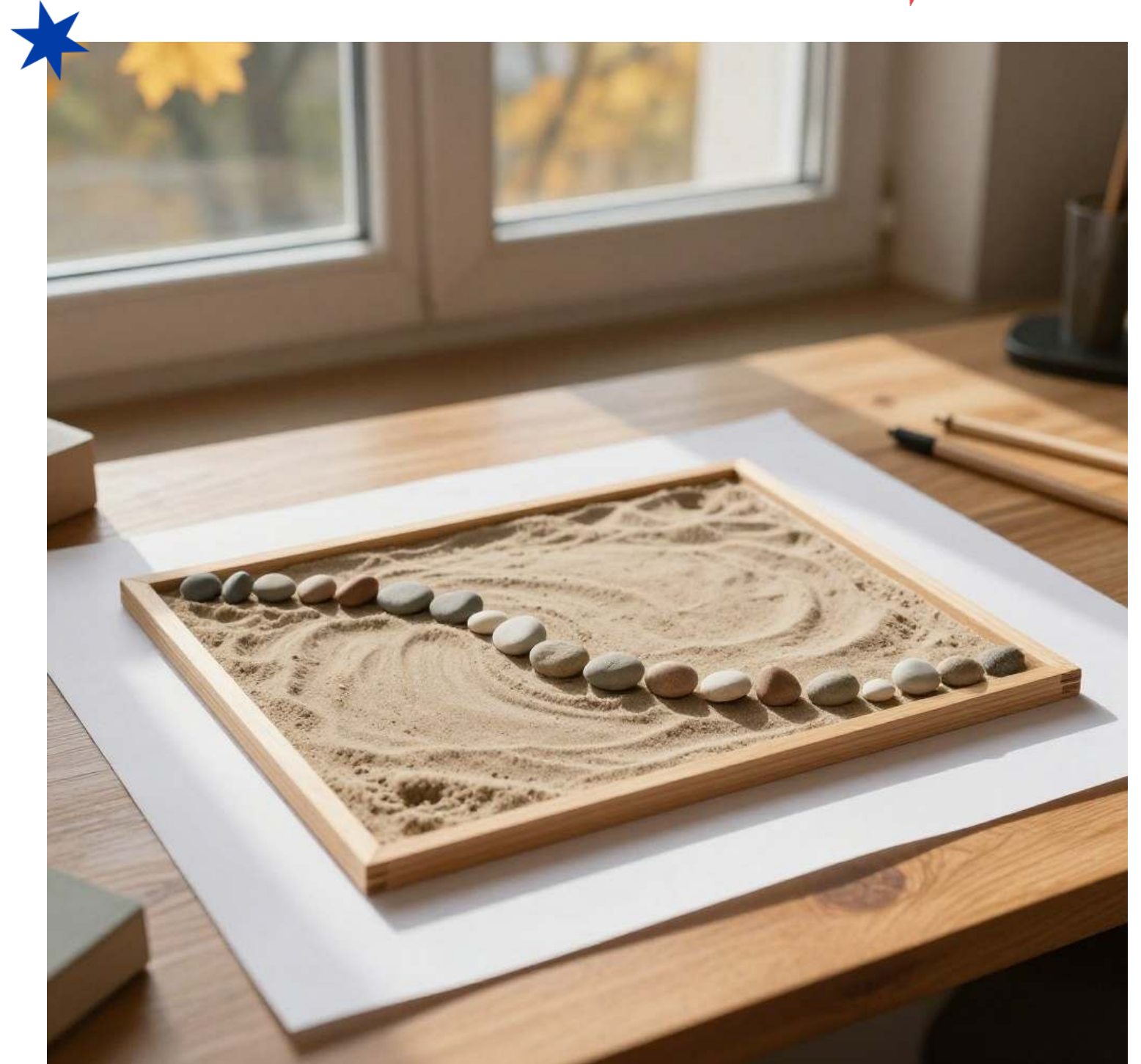
Площади и интегралы: от геометрии к вычислению

Площадь под графиком, между кривыми и в сложных областях — через определённый интеграл.



Почему задача о площади приводит к интегралу

Когда граница фигуры искривлена, одну формулу площадей уже не подобрать. Вместо этого площадь наращивают приближениями — узкими прямоугольниками. С введением предела это приближение становится точным и превращается в интеграл.

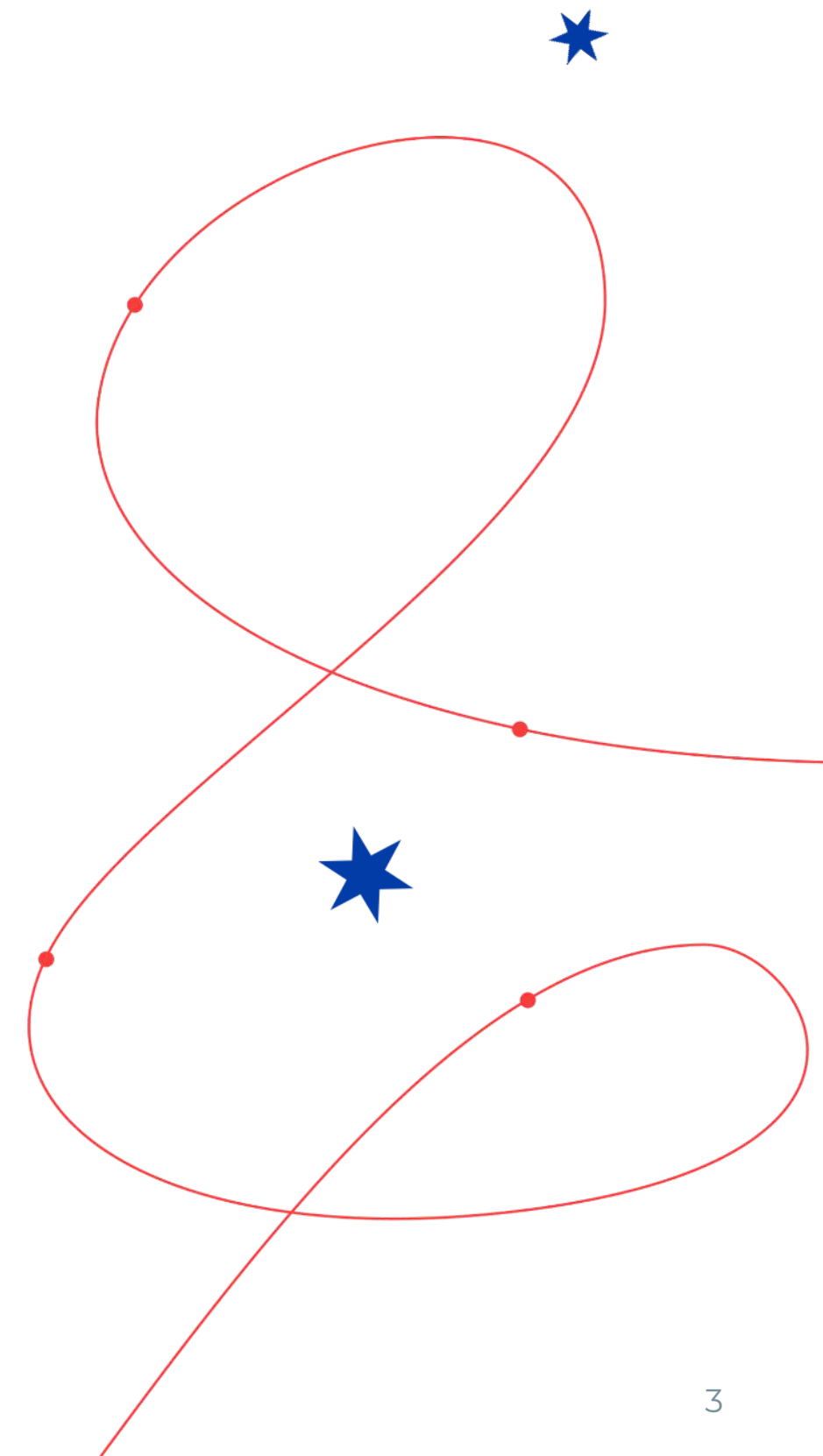


Площадь под графиком неотрицательной функции

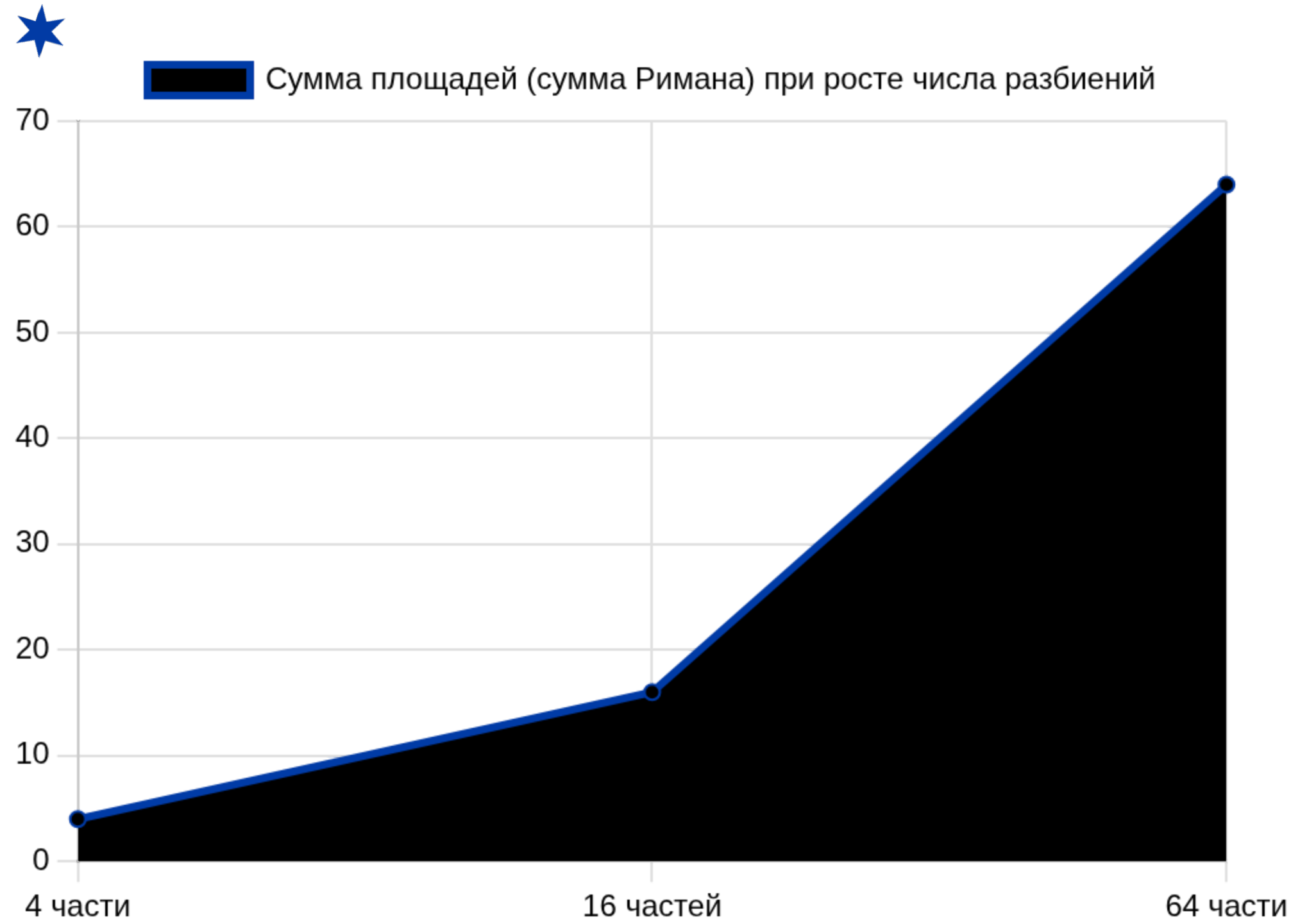
Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то площадь фигуры под графиком вычисляется как $S = \int[a;b] f(x)dx$. Интеграл собирает площади множества тонких столбиков.

Каждый «малый прямоугольник» имеет ширину dx по оси x и высоту, равную значению функции $f(x)$ в выбранной точке. Так геометрия преобразуется в сумму значений.

Такой смысл особенно удобен в школьных задачах: область ограничена графиком, осью Ox и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Единица площади согласована с квадратом единицы по оси x .



Как суммы прямоугольников приближают площадь



Чем мельче разбиение отрезка, тем ближе «ступеньки» под графиком к реальной кривой, а сумма Римана устойчивее.

Данные показывают принцип: при увеличении числа прямоугольников накопленная площадь стремится к одному и тому же предельному значению.

Иллюстративная схема зависимости сходимости от числа разбиений (качественный тренд)

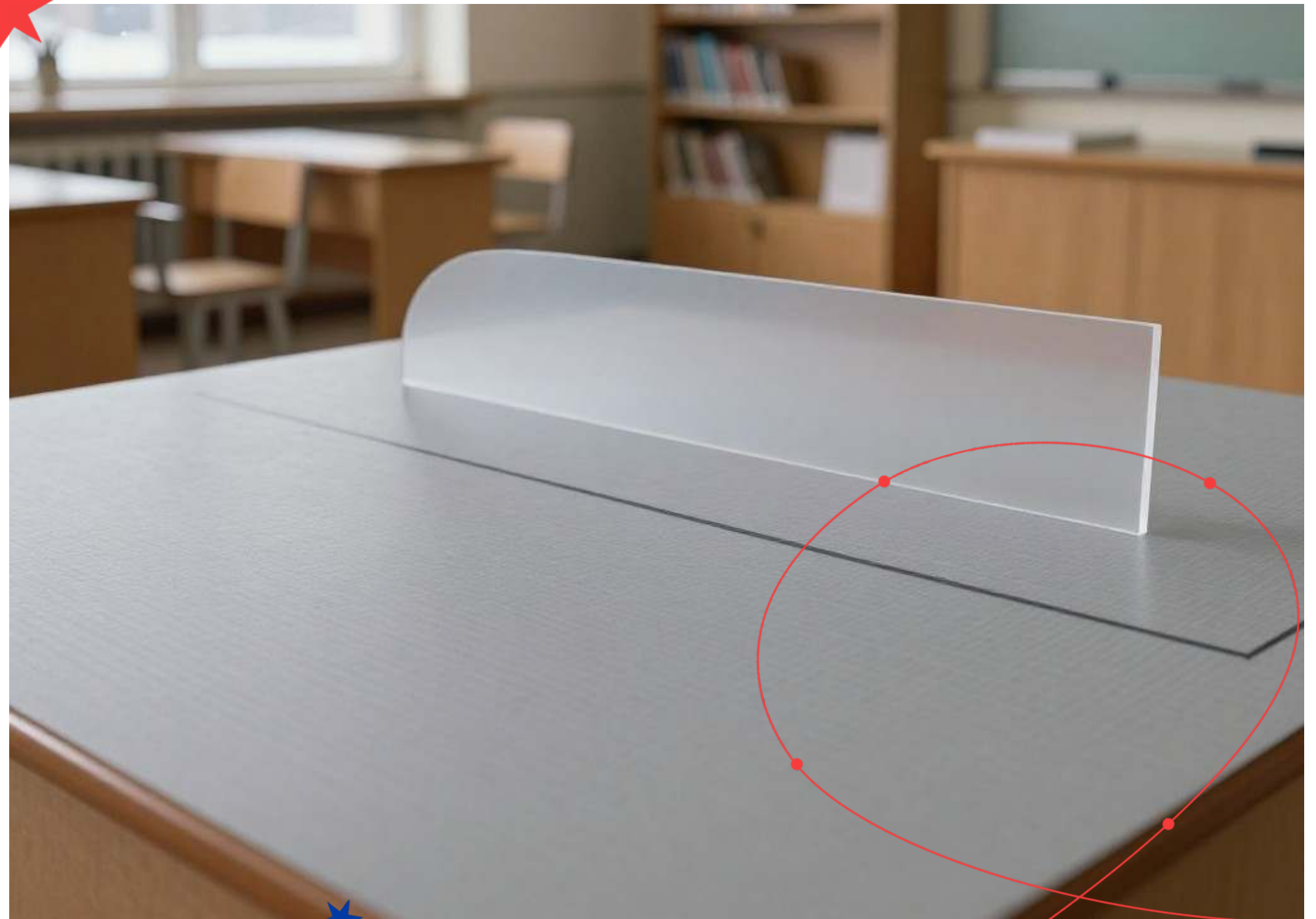
Геометрический смысл определённого интеграла

Накопление площади слева направо

Определённый интеграл можно понимать как накопление площади: от $x = a$ к $x = b$ суммируются «вклады» тонких прямоугольников. При $f(x) > 0$ получаем обычную геометрическую площадь заштрихованной области.

Отрицательный вклад и знак интеграла

Если же график опускается ниже оси Ox , значение $f(x)$ становится отрицательным. Тогда вклад в интеграл тоже отрицателен — и знак уже нельзя игнорировать при интерпретации результата.



Основные формулы для вычисления площадей



Базовые случаи показывают, как записать площадь интегралом в зависимости от взаимного расположения области и оси Ox , а также от того, какая функция выше.

Выбор формулы определяется не «красотой вычислений», а геометрией: что считать верхней/нижней границей и по какую сторону от Ox находится область.



Ситуация	Формула
Под графиком $f(x)$ при $f(x) \geq 0$	$S = \int[a;b] f(x)dx$
Область ниже Ox	$S = -\int[a;b] f(x)dx$
Между $y=f(x)$ и $y=g(x)$ при $f(x) \geq g(x)$	$S = \int[a;b] (f(x)-g(x))dx$
В полярных координатах	$S = 1/2 \int[\alpha;\beta] r^2 d\theta$



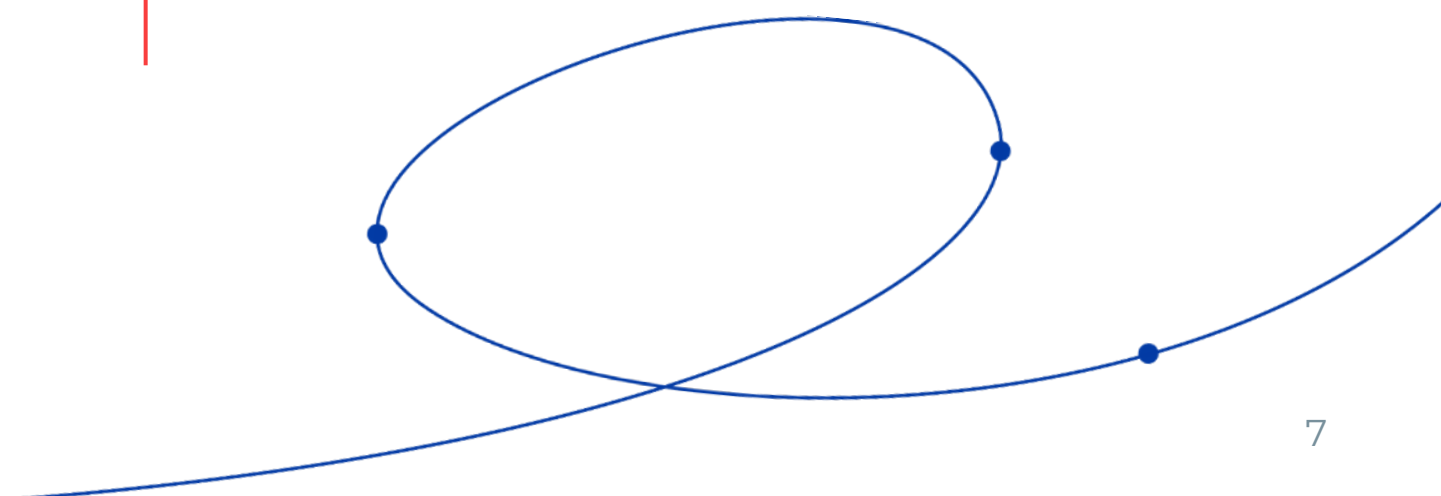
Учебные формулы для определённого интеграла (школьный курс)

Площадь между двумя графиками

Площадь области между кривыми вычисляют как интеграл разности верхней и нижней функций: $S = \int[a;b] (f(x) - g(x))dx$, если на всём промежутке $f(x) \geq g(x)$. Тогда разность всегда неотрицательна.

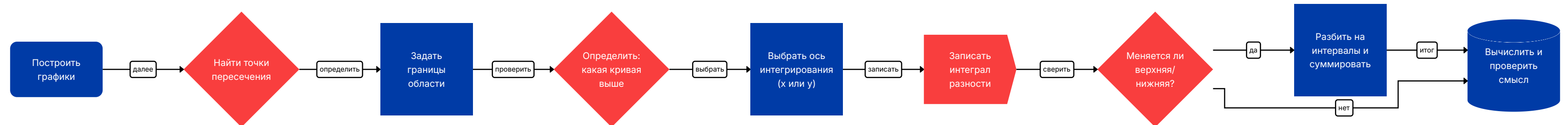
Границы области обычно задают точками пересечения графиков, потому что именно там верхняя и нижняя функции меняются местами. Отрезок $[a; b]$ берут так, чтобы порядок функций оставался постоянным.

Если пересечений несколько и порядок функций меняется, отрезок приходится разбивать на интервалы. На каждом интервале записывают свой интеграл разности и затем складывают результаты.



Алгоритм нахождения площади через интеграл

Пошаговый порядок действий для школьных задач на площади.



Интегрирование по оси y



Иногда удобнее рассматривать область как набор горизонтальных полос. Тогда площадь выражают через интеграл по y : $S = \int [c;d] (x_{\text{прав}}(y) - x_{\text{лев}}(y)) dy$.

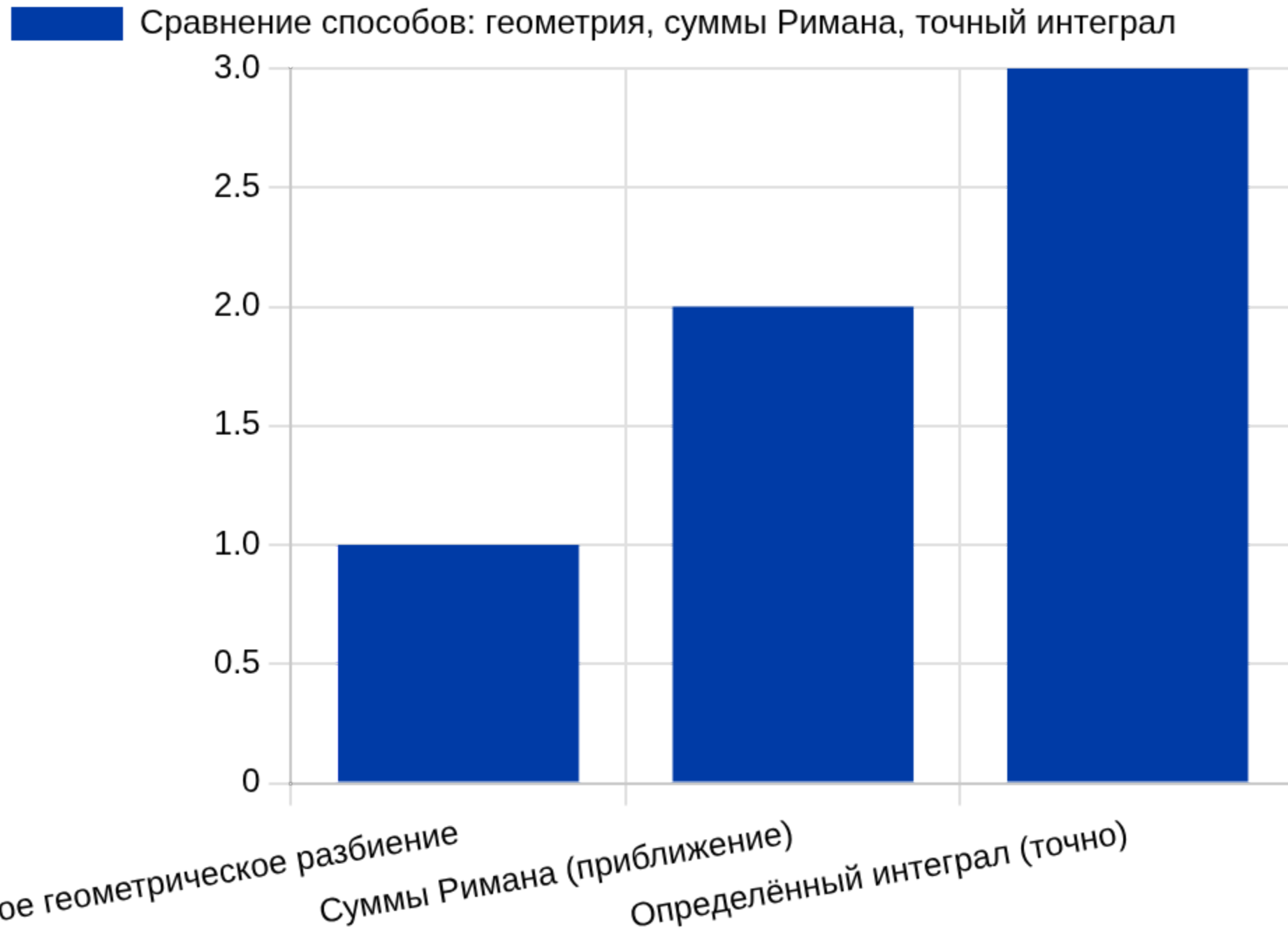


Этот подход особенно полезен, когда границы области задаются проще в терминах y : например, имеются горизонтальные элементы или симметрия, из-за которой при интегрировании по x потребовались бы несколько разных отрезков.

Выбор переменной интегрирования зависит от того, насколько наглядно и однозначно можно записать «правую» и «левую» (или верхнюю и нижнюю) границы в выбранной системе. Это снижает риск ошибок.



Сравнение способов нахождения площади



Для фигур с простой формой граней (прямоугольники, треугольники) разбиение и интеграл дают один и тот же результат без погрешности.

Смысл сравнения в том, что приближённые методы улучшают точность при измельчении разбиения, а интеграл сразу даёт предельное значение площади.



Качественное сравнение принципов (не числовые измерения) на основе теории определённого интеграла

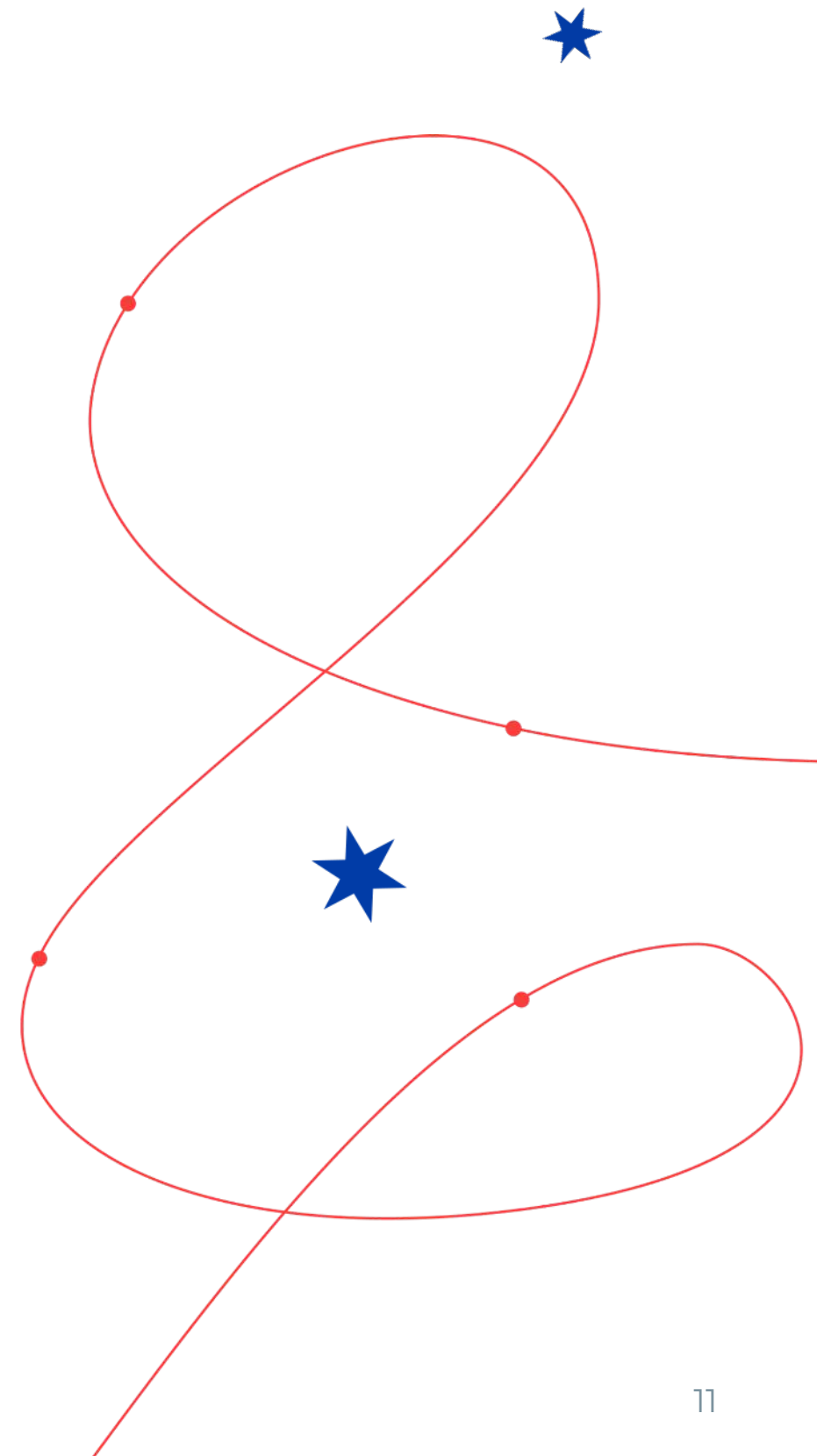
Что делать, если функция ниже оси Ox

Если график $f(x)$ расположен ниже оси Ox , значения $f(x)$ отрицательны, поэтому интеграл может получиться отрицательным. Помните: это знак вклада, а не «площадь со знаком».

Геометрическая площадь должна быть неотрицательной. Поэтому ответ оформляют как $S = |\int[a;b] f(x)dx|$ или через модуль подынтегральной функции, чтобы убрать отрицательный вклад.

Ещё надёжнее — мысленно разделить область: отдельно посчитать часть выше Ox и часть ниже Ox . Тогда в интегралах учитывается знак, а итоговая площадь получается суммой модулей.

Критически важна аккуратная запись пределов и выражений для верхней/нижней границы. Именно они определяют, что считается площадью, а что — алгебраическим суммированием прямоугольников.



Типичные ошибки при вычислении площадей



Таблица фиксирует самые частые промахи при задачах на площади через определённый интеграл. Большинство ошибок связано не со сложными вычислениями, а с неверной постановкой границ и знаков области.

Главный вывод: точное определение границ и знака области важнее «техники вычисления». Если границы заданы неверно, первообразная значения не спасает.



Ошибка	Как проявляется	Как исправить
Перепутаны функции	интеграл даёт «не ту» величину	проверьте, какая кривая сверху на каждом участке
Нет точек пересечения	границы интегрирования выбраны неверно	найдите точки пересечения и разделите отрезок
Неверный отрезок	получается площадь чужой фигуры	уточните a и b по реальным границам области
Не учтён переход через Ox	знак интеграла не совпадает с площадью	разбейте на интервалы или примените модуль
Не разбита область	формула верна только частично	при смене порядка кривых делите на несколько интегралов
Нет проверки знака	итог противоречит здравому смыслу	сравните результат с ожиданием: площадь должна быть ≥ 0



Свод наблюдений по типичным заданиям школьного курса.

Примеры, которые «видно» на графике: площадь между параболой и прямой

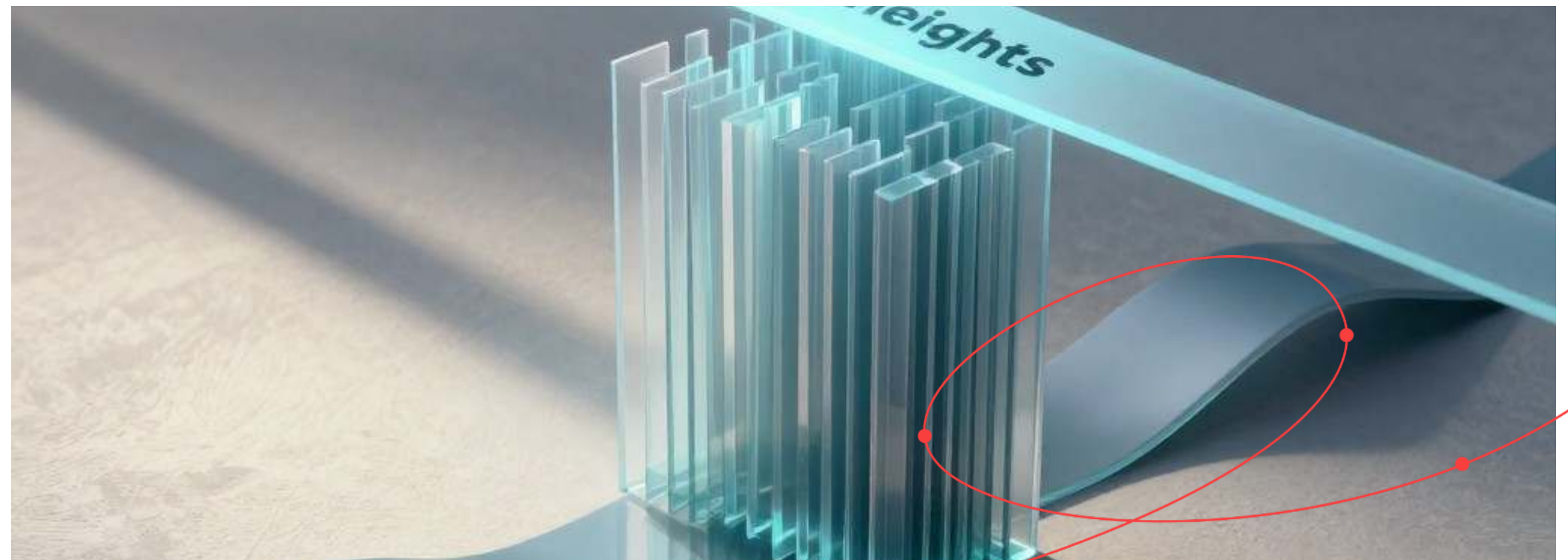
Три штриха к заштрихованной области

Область заключена между графиками $y = x^2$ и $y = 2x$ на отрезке $[0; 2]$. Точки пересечения находятся из $x^2 = 2x$, значит $x = 0$ и $x = 2$. На рисунке это две «рамки», между которыми и лежит тень.

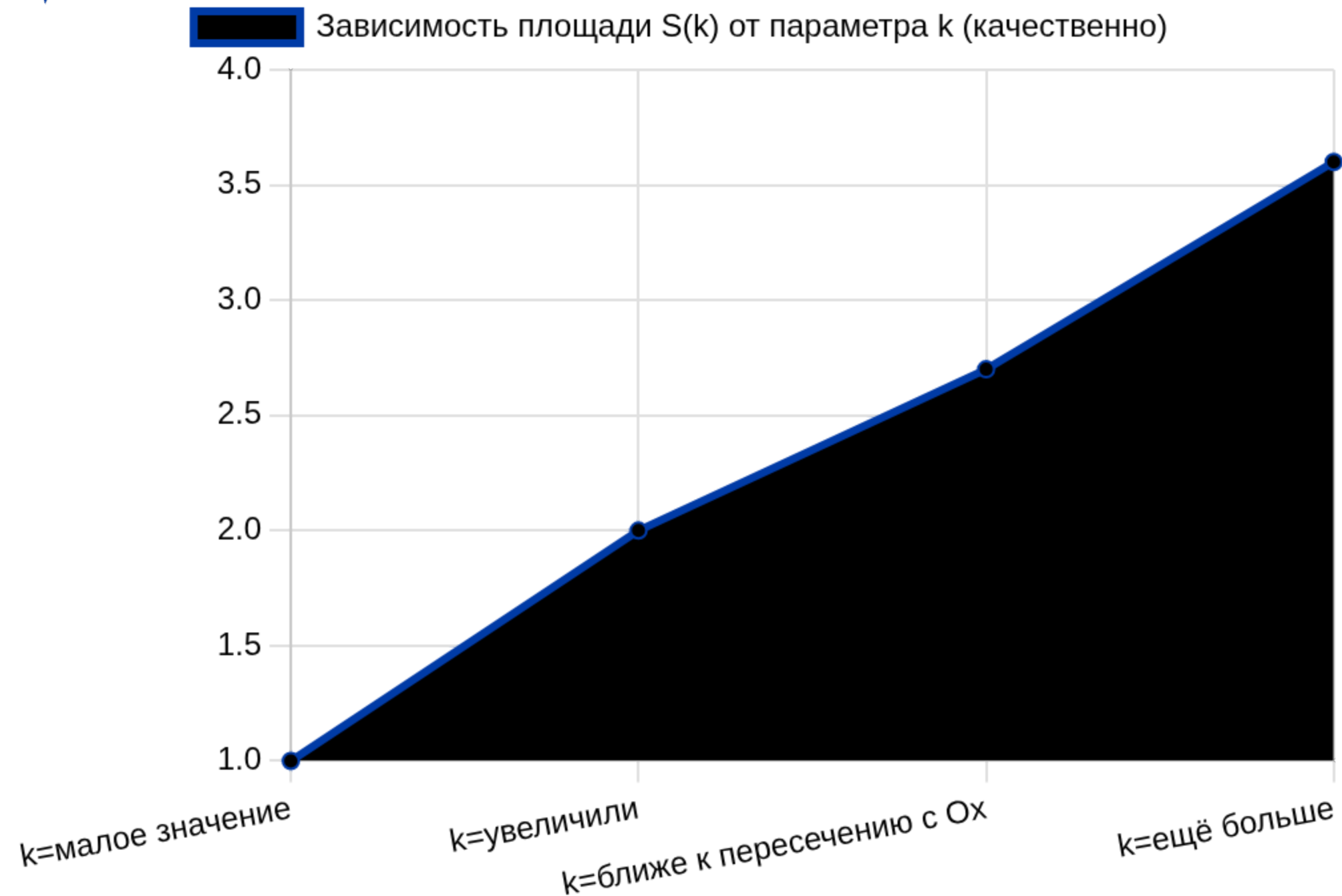


Интеграл как «разность высот»

Когда сверху находится прямая, а снизу — парабола, площадь выражается как $S = \int_{[0;2]} (2x - x^2) dx$. Формула связывает алгебру с геометрией: разность $(2x - x^2)$ — это высота каждого прямоугольника над вертикальной полосой.



Как площадь меняется при изменении параметра



С ростом k нули параболы для $y = kx - x^2$ расходятся, и «толщина» заштрихованной области увеличивается. Поэтому площадь меняется заметно и не по прямой.

Нелинейность графика показывает: интеграл чувствителен к параметру, а геометрическая площадь отражает изменения формы кривой, а не только масштаба.



Качественная иллюстрация по функции $y = kx - x^2$; точные значения зависят от выбранных диапазонов k .

Практические применения площади под графиком



Путь по графику скорости

Площадь под графиком скорости $v(t)$ на промежутке времени равна пройденному пути, если скорость неотрицательна. Так интеграл превращает график в измеряемую величину.



Накопленная масса и заряд

В естественных науках площадь помогает находить накопленную массу, заряд или расход жидкости. Формула работает, когда величина описывается функцией по времени или координате.



Выручка и накопленный доход

В экономике интеграл связывает функцию изменения величины с суммарным результатом: выручкой или накопленным доходом. Площадь здесь — это итог за весь период.



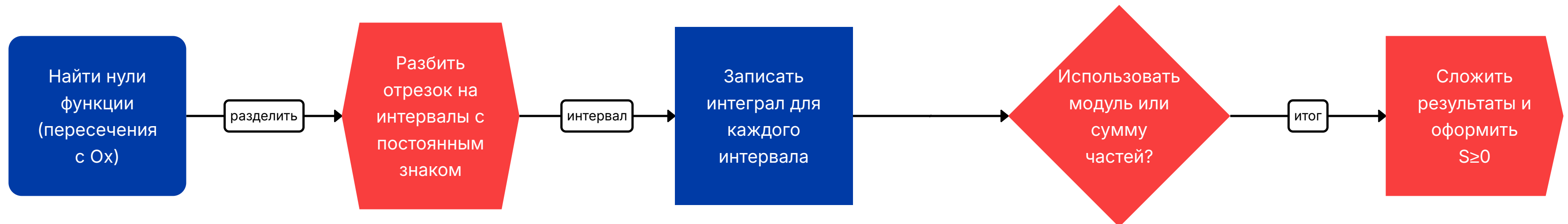
Расход жидкости как «накопление»

Если задана скорость потока или производная расхода по координате, интегрирование по соответствующей переменной даёт общий объём. Площадь суммирует вклад маленьких отрезков.



Когда используется запись через модуль

Процесс для областей, которые пересекают ось Ox или содержат фрагменты с разными знаками.



Историческая идея метода исчерпывания



Античность

В античной математике площадь пытались находить через «исчерпывание»: сначала вписывали в фигуру многоугольники, а затем описывали их. Разность приближений становилась всё меньше.

Архимед

Архимед использовал метод для вычисления площадей сложных фигур. Логика оставалась общей: приближение точнее, чем ближе вписанные и описанные многоугольники друг к другу.

XVII век

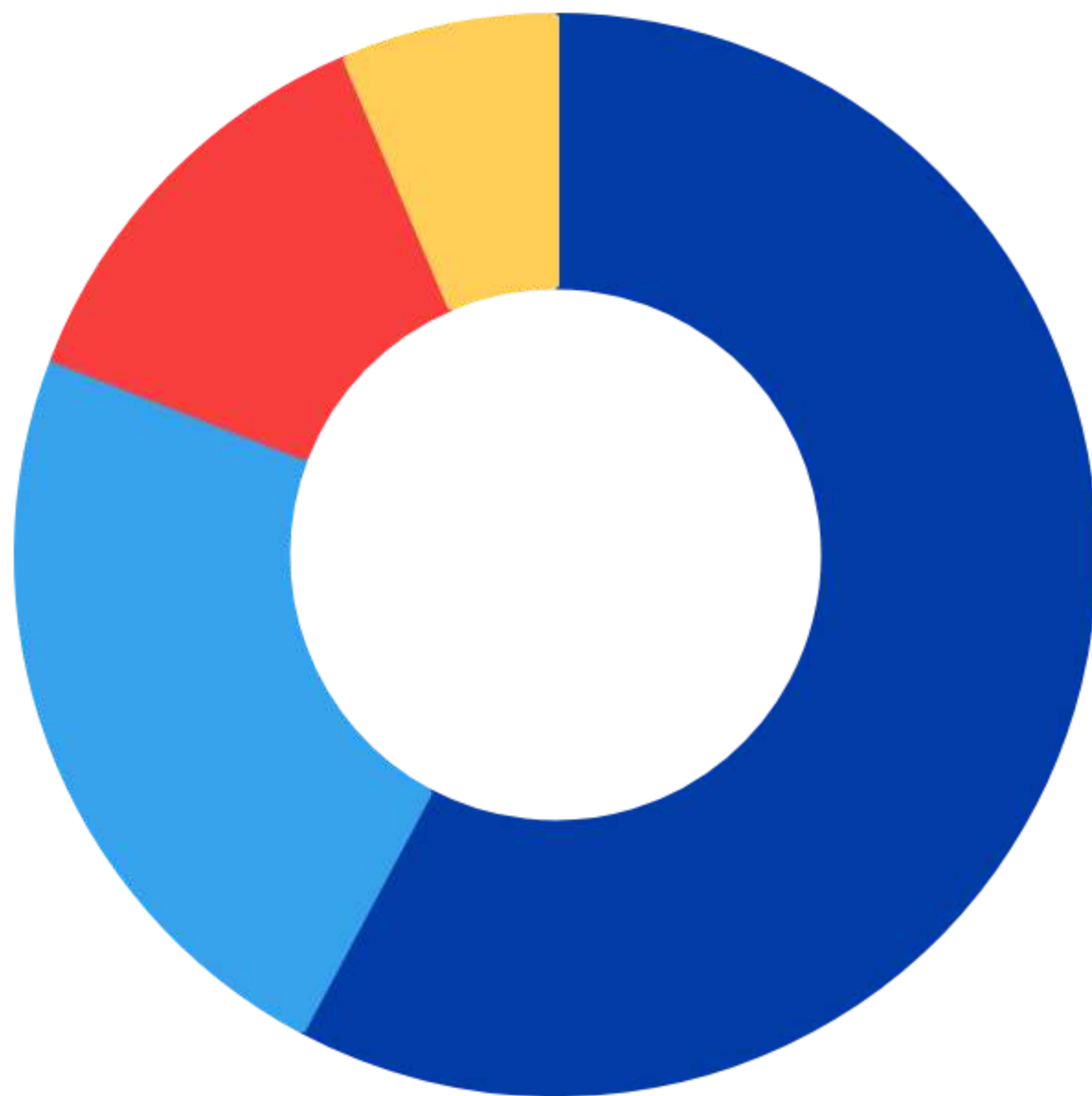
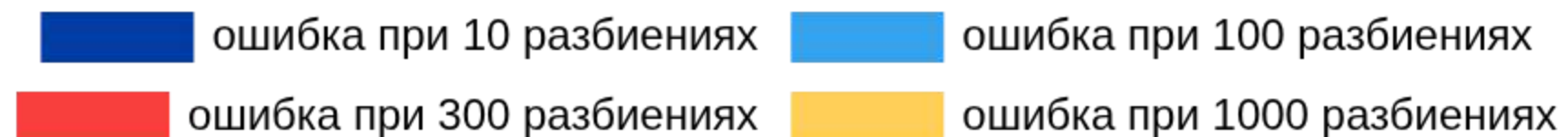
В работах Ньютона и Лейбница предельные переходы получили систематическое развитие. Идея «приближать всё точнее» стала строгой математической операцией.

Современный интеграл

Определённый интеграл можно рассматривать как строгое продолжение той же идеи исчерпывания: предельная сумма площадей малых частей даёт точный результат.



Точность приближения площади зависит от числа разбиений



Обобщённая иллюстрация для сумм Римана; конкретные числа зависят от функции и выбранного разбиения.



При увеличении числа прямоугольников приближение Римана «подстраивается» под кривизну графика. Ошибка убывает, но её снижение становится менее заметным на больших N .

Диаграмма подчёркивает: точность определяется величиной шага разбиения. Чем меньше шаг, тем ближе сумма площадей к истинному интегралу.

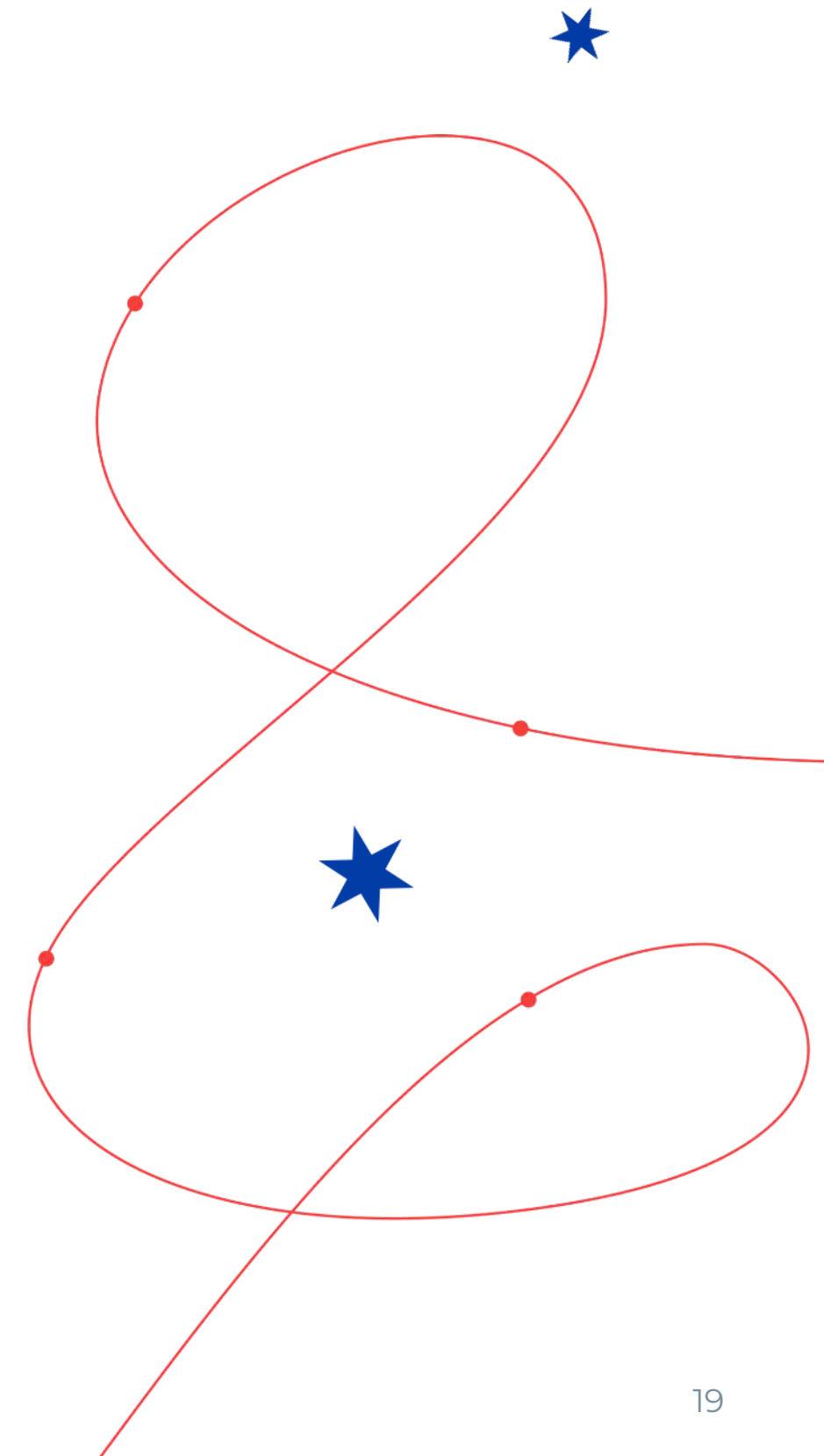


Опорный план решения задач на площадь

Постройте графики и найдите точки пересечения: именно они задают границы. Затем определите, какие кривые ограничивают область сверху и снизу на каждом участке отрезка.

Выберите переменную интегрирования (обычно x) так, чтобы выражение «верхняя – нижняя» было простым. Запишите формулу площади в виде определённого интеграла на нужных пределах.

Вычислите интеграл, проверьте знак и единицы измерения. Если область пересекает Ox или порядок кривых меняется, разбейте решение на части и сложите площади.



Главный вывод: интеграл как точный способ находить площадь

Определённый интеграл объединяет геометрию и алгебру в единую процедуру вычисления площадей: под графиком, между кривыми и в сложных криволинейных областях. Ключ — график, границы, знак и разбиение.

