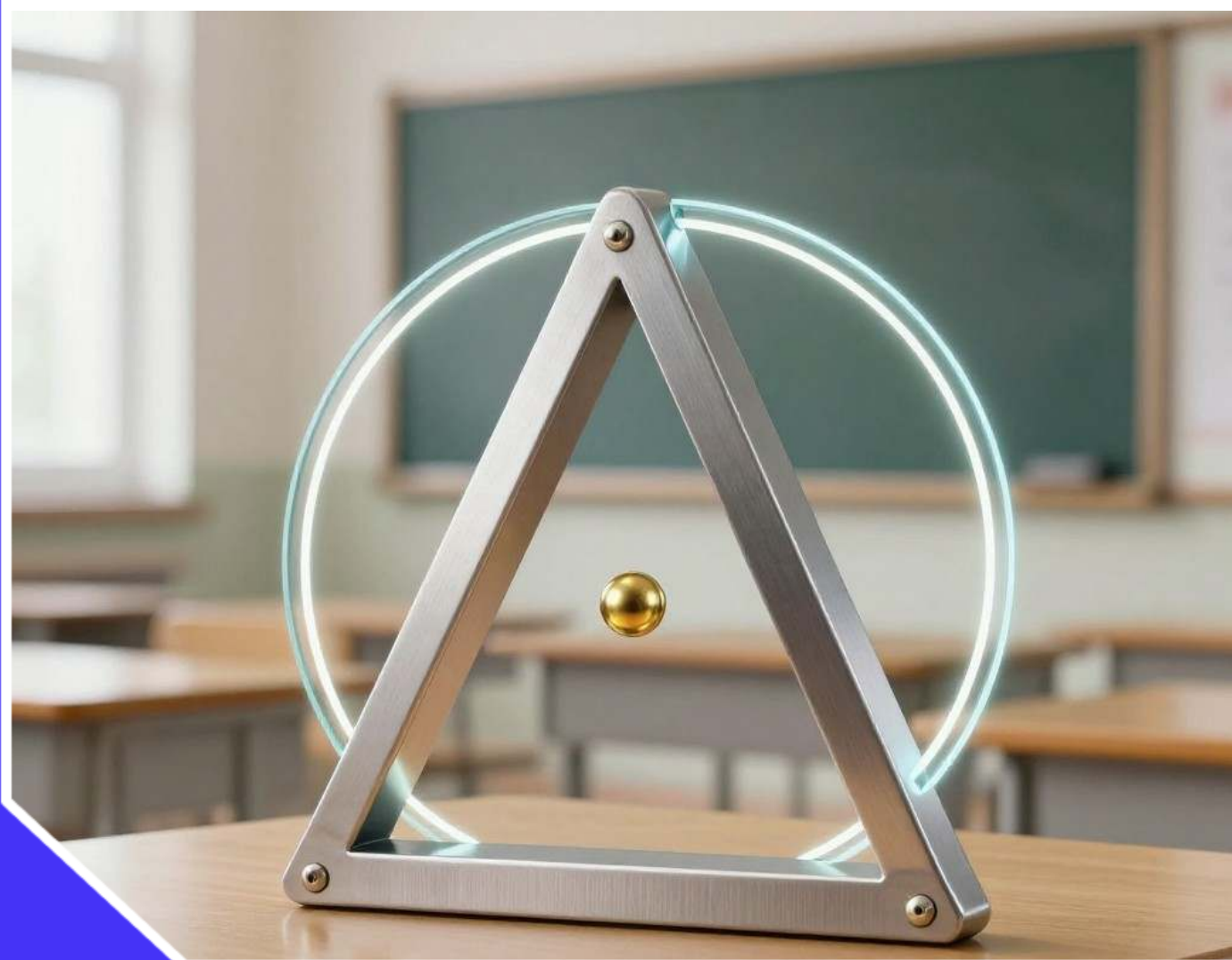
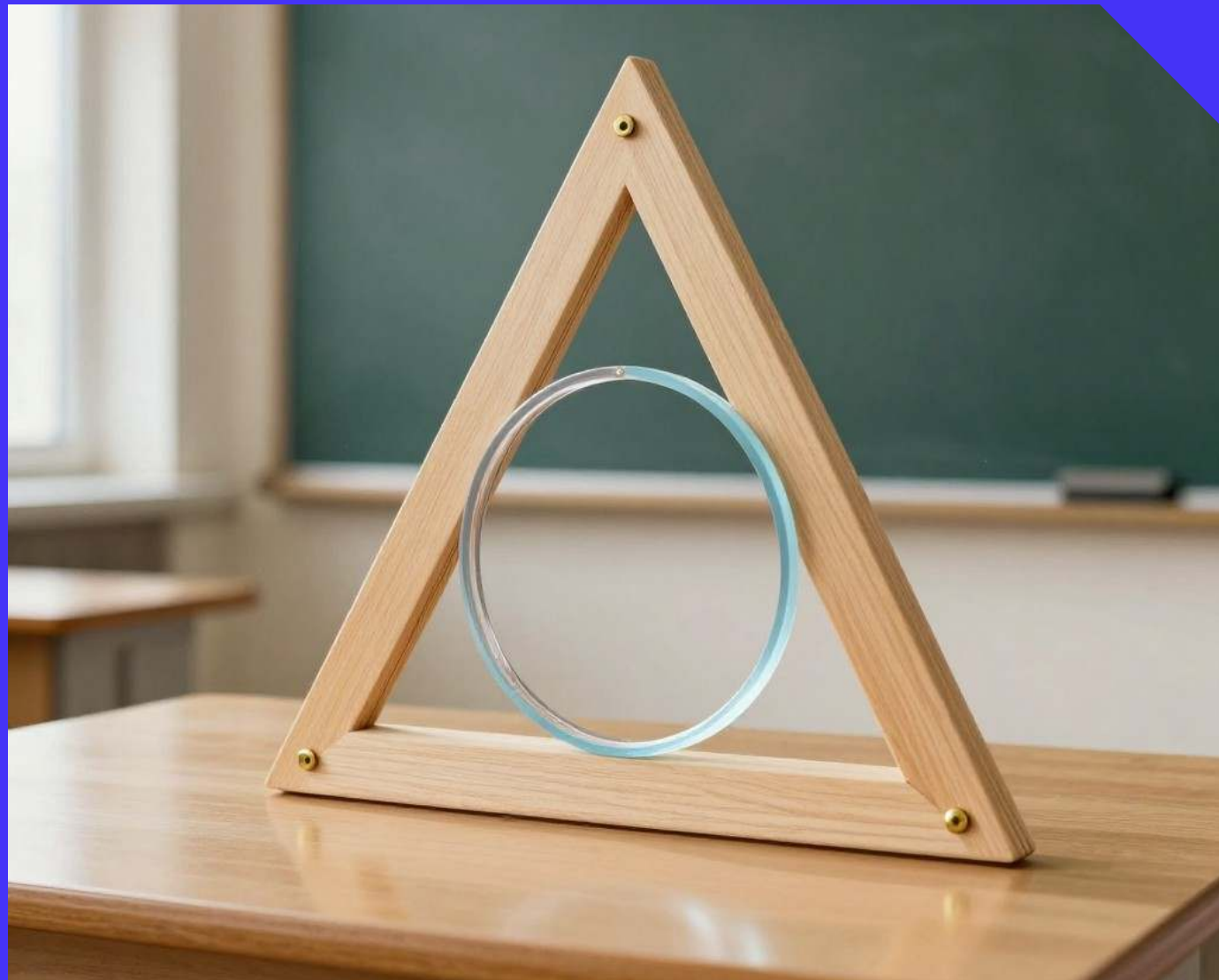


Вписанная и описанная окружности: главные идеи урока

Две окружности, два центра, один треугольник.





Эти окружности помогают решать задачи на построение, доказательство и измерения. Они показывают, как стороны, вершины и специальные линии треугольника связаны между собой.

Зачем изучать окружности в треугольнике

Вписанная окружность: определение и обозначения

01

Где находится

Вписанная окружность целиком лежит внутри треугольника и касается каждой его стороны ровно в одной точке. Это делает её удобной для изучения расстояний внутри фигуры.

02

Главная точка

Центр вписанной окружности называют инцентром. Именно от него одинаково далеко расположены все три стороны треугольника, поэтому одна окружность может касаться их одновременно.

03

Радиус окружности

Радиус вписанной окружности обозначают r . Его длина равна расстоянию от инцентра до любой стороны треугольника, так как это расстояние везде одинаково.

04

Почему это возможно

Если точка внутри треугольника находится на одинаковом расстоянии от всех сторон, то вокруг неё можно построить окружность, касающуюся каждой стороны изнутри.



Инцентр и биссектрисы треугольника

Точка пересечения

Инцентр — это общая точка пересечения всех биссектрис треугольника. Поскольку биссектриса делит угол пополам, три такие прямые всегда сходятся в одном месте.

Равные расстояния

От инцентра до каждой стороны можно провести перпендикуляр одинаковой длины. Поэтому этот центр называют точкой, равноудалённой от сторон треугольника.

Что видно на чертеже

На рисунке особенно важны сами биссектрисы, точка их пересечения и отрезки, показывающие одинаковое расстояние до сторон. Это помогает увидеть, почему окружность касается всех сторон.

Практический смысл

Знание свойств инцентра упрощает построения и вычисления. Если найти две биссектрисы, третья тоже пройдет через ту же точку, а значит центр уже определён.



Три важные точки треугольника и чем они отличаются

- Инцентр — биссектрисы
- Циркумцентр — серединные перпендикуляры
- Центр тяжести — медианы



Школьный курс геометрии: свойства треугольника

У каждой точки свой способ построения и свой набор равных элементов: стороны, вершины или отрезки медиан.

Точки нельзя путать: каждая отвечает за свою геометрическую идею и помогает решать разные типы задач.

Свойства вписанной окружности

Основные признаки вписанной окружности удобно сравнить по ключевым свойствам.

Вписанная окружность определяется через биссектрисы и существует у любого треугольника.

Свойство	Значение
Центр	инцентр
Положение	внутри
Касание	3 стороны
Радиус	r

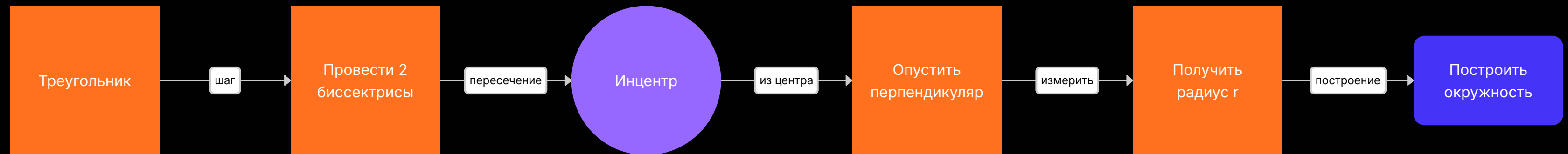
$$S = pr$$

Эта формула связывает площадь треугольника с полупериметром и радиусом вписанной окружности.

Если известны стороны и площадь, можно найти радиус вписанной окружности. Если известен радиус, площадь тоже вычисляется без лишних построений.

Как построить вписанную окружность

Последовательность основана на свойствах биссектрис и инцентра.



Описанная окружность: определение и обозначения

Что это такое

Описанная окружность проходит через все три вершины треугольника. Это значит, что каждая вершина лежит на одной и той же окружности, а не внутри неё и не снаружи.

Центр окружности

Центр описанной окружности называют центром описанной окружности или циркумцентром. Он равноудалён от всех вершин, поэтому может служить точкой для построения окружности.

Радиус R

Радиус описанной окружности обозначают R . Он равен расстоянию от центра до любой вершины треугольника и остаётся одинаковым для всех трёх вершин.

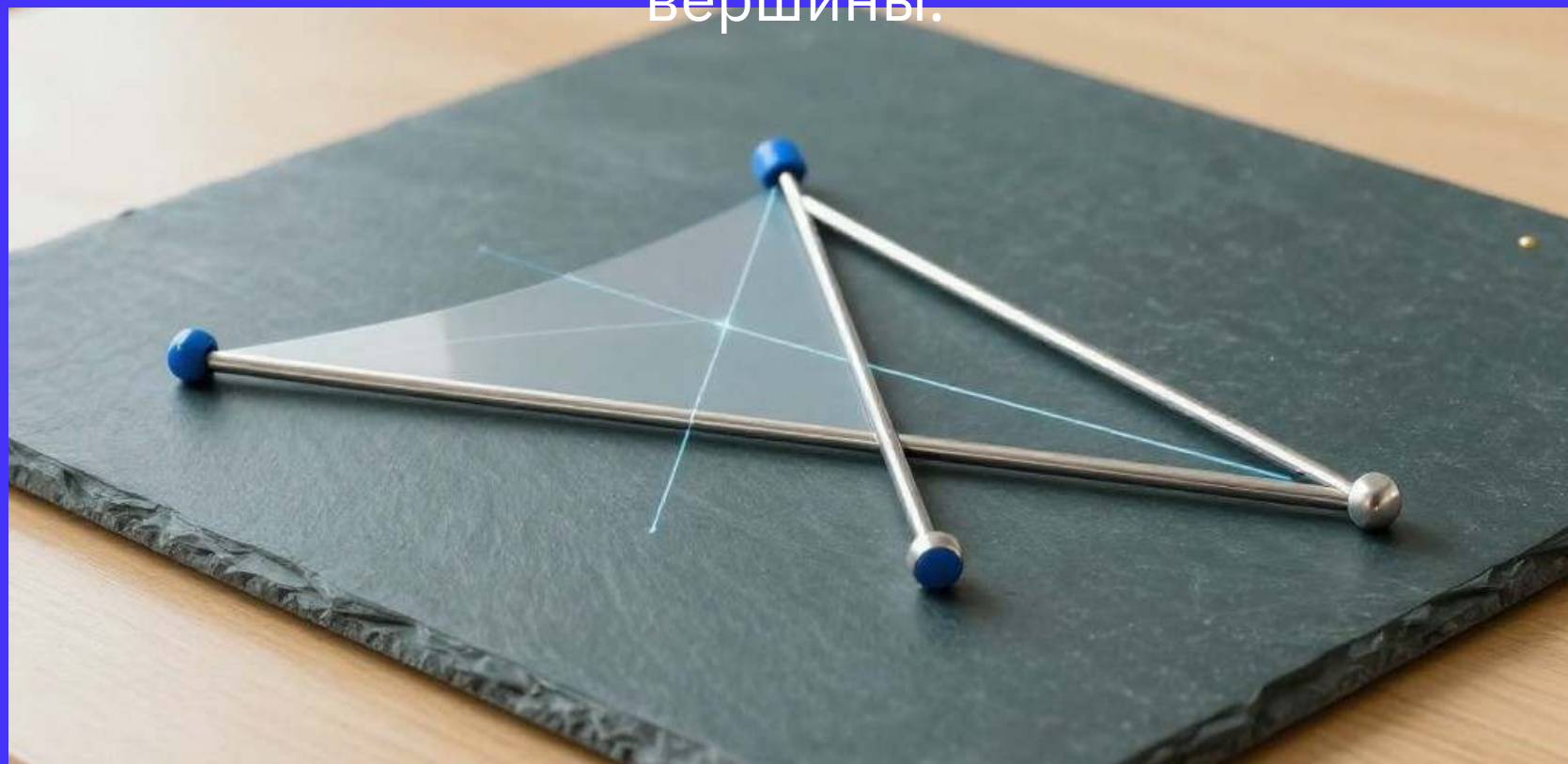
Почему окружность одна

Если точка одинаково удалена от всех вершин, через них можно провести только одну окружность. Именно поэтому описанная окружность для данного треугольника единственна.

Центр описанной окружности и серединные перпендикуляры

Как найти центр без измерений

Чтобы отыскать центр описанной окружности, проводят серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника. Эти прямые пересекаются в одной точке. Она и становится центром окружности, проходящей через все вершины.

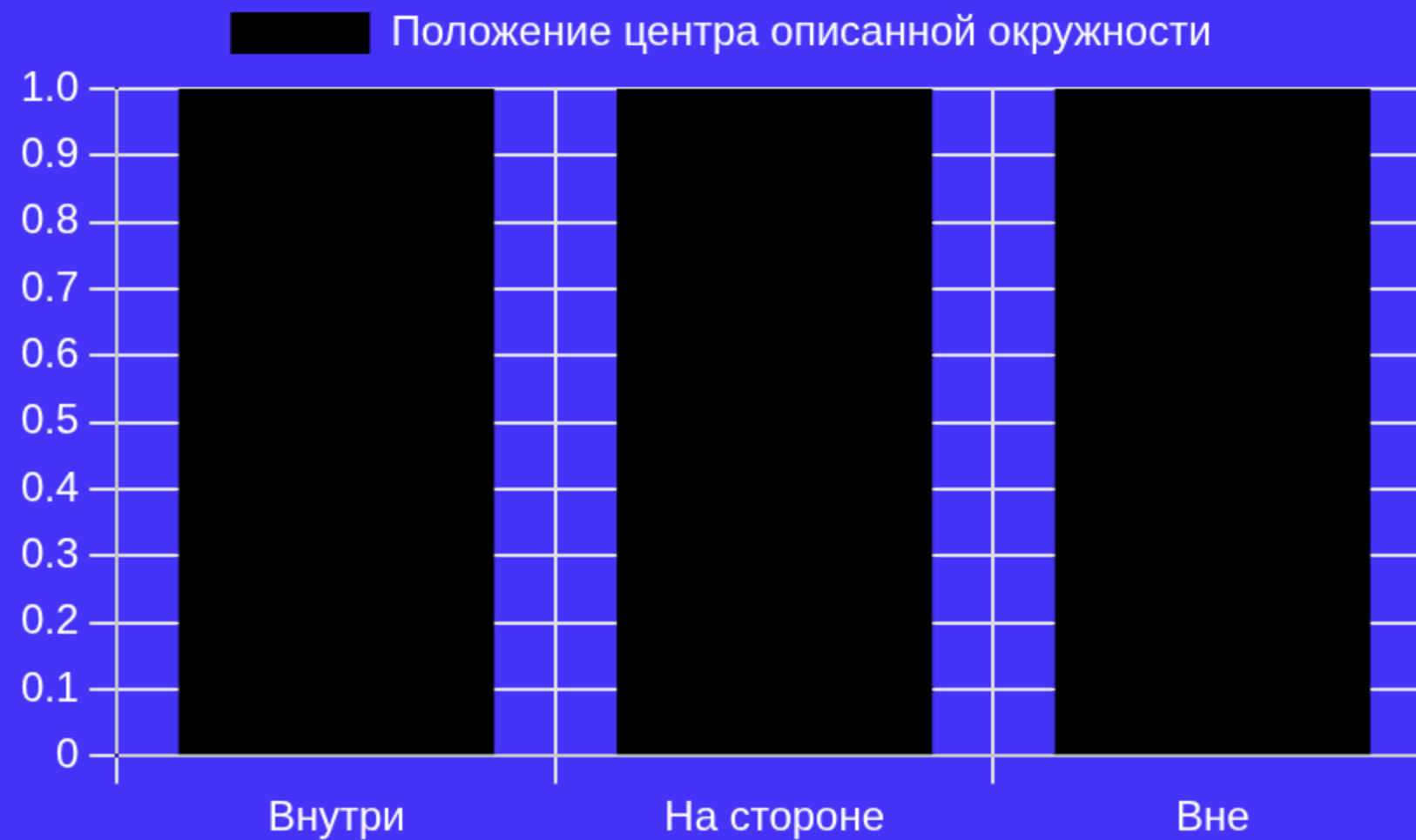


Почему метод работает

Серединный перпендикуляр проходит через середину стороны под прямым углом. Любая точка на нём равноудалена от концов этой стороны. Поэтому пересечение двух таких прямых одинаково удалено от всех вершин треугольника.



Где находится центр описанной окружности в разных треугольниках



Школьный курс геометрии, тема «Описанная окружность треугольника».

Положение центра сразу подсказывает, какой перед вами треугольник и где удобнее искать радиус при построении.

У каждого вида треугольника свой случай расположения центра, поэтому по чертежу можно быстро сделать вывод о типе фигуры.

Свойства описанной окружности

Краткая таблица помогает запомнить, как связаны центр, вершины треугольника и радиус описанной окружности.

Описанная окружность всегда связана с вершинами треугольника, а её центр одинаково удалён от всех трёх вершин.

Свойство	Значение
Центр	циркумцентр
Построение	серединные перпендикуляры
Положение	внутри/на стороне/вне
Проходит через	все вершины
Радиус	R

Школьный курс геометрии, свойства описанной окружности.

Свойства описанной окружности
прямоугольного треугольника, школьная
геометрия.

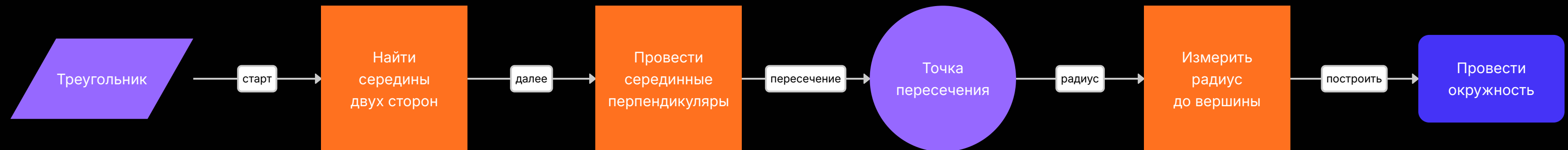
1/2

гипотенузы составляет радиус описанной
окружности прямоугольного треугольника.

Это самый быстрый способ найти R
в прямоугольном треугольнике:
достаточно измерить гипотенузу
и разделить её пополам.

Построение описанной окружности

Последовательность основана на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



Особый случай: равносторонний треугольник

Одна точка для всех центров

В равностороннем треугольнике одна и та же точка одновременно является инцентром, центром описанной окружности, центром тяжести и ортоцентром. Поэтому все основные построения становятся особенно наглядными.

Совпадение линий

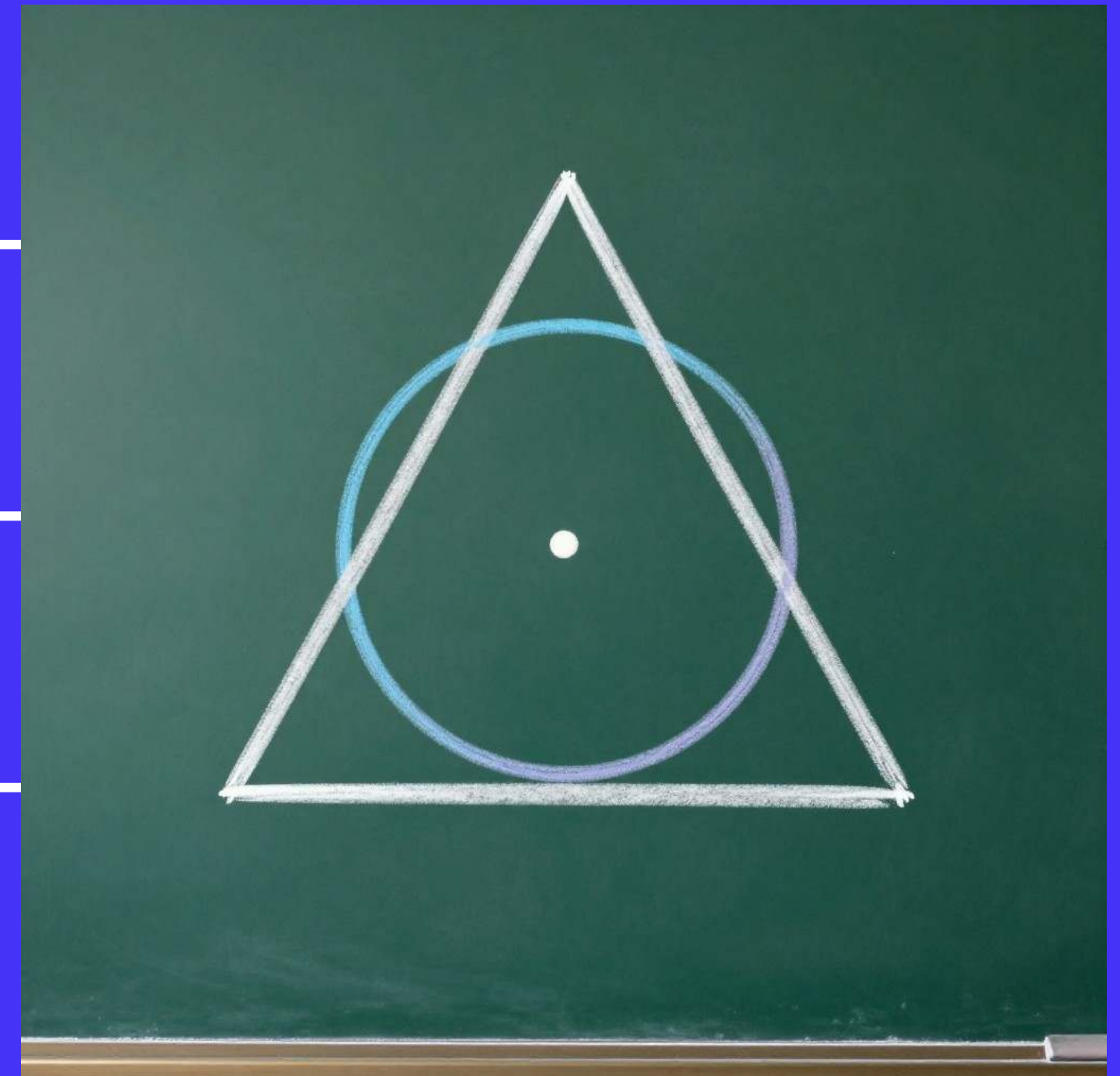
Биссектрисы, медианы и высоты здесь проходят по одним и тем же прямым. Это значит, что на чертеже нужно провести меньше вспомогательных линий, а нужный центр находится почти сразу.

Удобство для задач

Такой треугольник помогает быстро проверять свойства окружностей и сравнивать их центры. Если одна точка подходит для нескольких построений, решение получается короче и понятнее.

Главный вывод

Равносторонний треугольник — самый симметричный случай. Именно в нём вписанная и описанная окружности особенно тесно связаны с одной общей точкой.



Особые случаи: равнобедренный и прямоугольный треугольники

Ось симметрии

В равнобедренном треугольнике центры обеих окружностей лежат на оси симметрии. Это помогает не искать точку вслепую: достаточно использовать одну заметную прямую на чертеже.

Прямой угол и гипотенуза

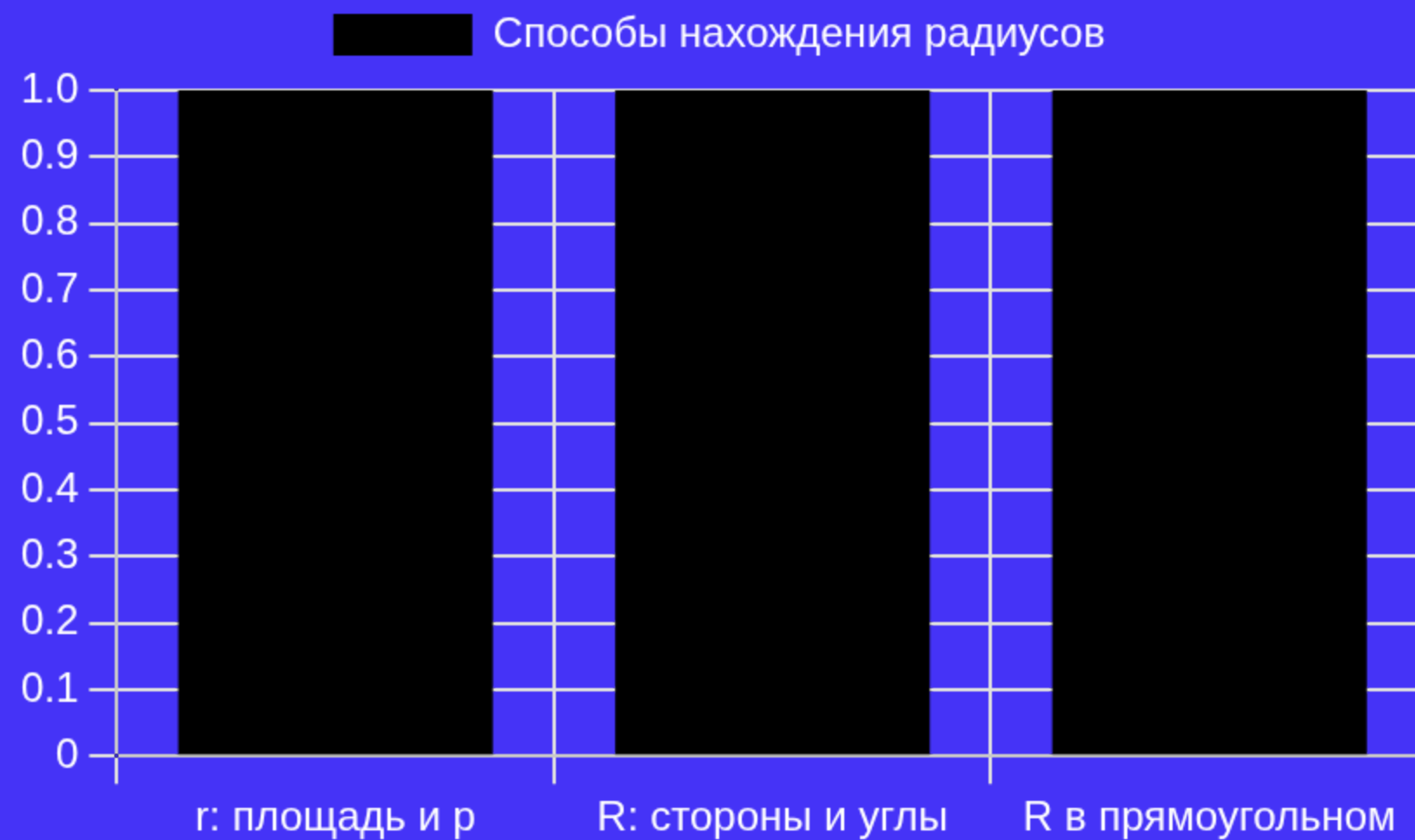
В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности находится в середине гипотенузы. Такое свойство сразу упрощает построение и позволяет быстро проверить правильность ответа.

Вписанная окружность внутри

Внутри прямоугольного треугольника вписанная окружность касается двух катетов и гипотенузы. Её центр ищут пересечением биссектрис, а не по середине какой-либо стороны.



Сравнение радиусов r и R в задачах



Школьный курс геометрии: формулы $S = pr$ и $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

Выбор формулы зависит от того, какие данные даны в задаче: стороны, углы, площадь или тип треугольника.

Радиус вписанной окружности чаще находят через площадь, а радиус описанной — через стороны, углы или гипотенузу в прямоугольном треугольнике.

Типичные ошибки при построении окружностей



Путают две разные линии

Ученик уверенно проводит линию, но выбирает медиану вместо биссектрисы. В результате центр вписанной окружности оказывается не там, где нужно, и окружность уже не касается всех сторон треугольника.



Середина стороны потеряна

Иногда серединный перпендикуляр строят «на глаз» и не попадают точно в середину стороны. Тогда он не пересекает второй перпендикуляр в правильной точке, а окружность не проходит через все вершины.



Неправильный радиус

Ещё одна ошибка появляется при измерении радиуса: его откладывают не от центра, а от случайной точки на чертеже. Тогда построение выглядит аккуратно, но результат не совпадает с условием задачи.

Короткая памятка для решения задач

Эта памятка помогает быстро выбрать нужный инструмент: окружность, центр или формулу площади.

Если вопрос связан со сторонами, вспоминают вписанную окружность; если с вершинами — описанную. Это главное правило выбора способа решения.

Если нужно	Используют
до сторон	вписанную окружность
до вершин	описанную окружность
центр вписанной	биссектрисы
центр описанной	серединные перпендикуляры
площадь через r	$S = pr$

Школьный курс геометрии, темы о вписанной и описанной окружностях.



Вписанная и описанная окружности показывают две разные связи треугольника: со сторонами и с вершинами. Их центры помогают строить фигуры, находить радиусы и уверенно решать геометрические задачи.

Главные выводы по теме