

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ В ГЕОМЕТРИИ

Векторы как направленные отрезки:
складываем, вычитаем, строим и
считаем на плоскости.



МЕСТО ТЕМЫ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ 11 КЛАССА

После освоения координат на плоскости векторы становятся мостом между чертежом и вычислениями. Они нужны для суммарного перемещения, диагоналей параллелограмма, координат середины и расстояний. Здесь особенно важны равенство, противоположность и точные знаки координат.



КЛЮЧЕВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРА



ДЛИНА (МОДУЛЬ)

Модуль вектора – это длина соответствующего направленного отрезка. Он обозначается $|a|$ и равен числу единиц масштаба на отрезке, независимо от его положения на плоскости.



РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ

Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Их можно переносить параллельно самим себе в другое место плоскости, не меняя геометрических свойств.



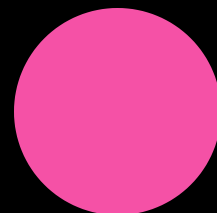
ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ВЕКТОРЫ

Противоположные векторы имеют равные модули, но направлены в разные стороны. Один получается из другого разворотом на 180° , поэтому знаки координат меняются.



НАЧАЛО И НАПРАВЛЕНИЕ

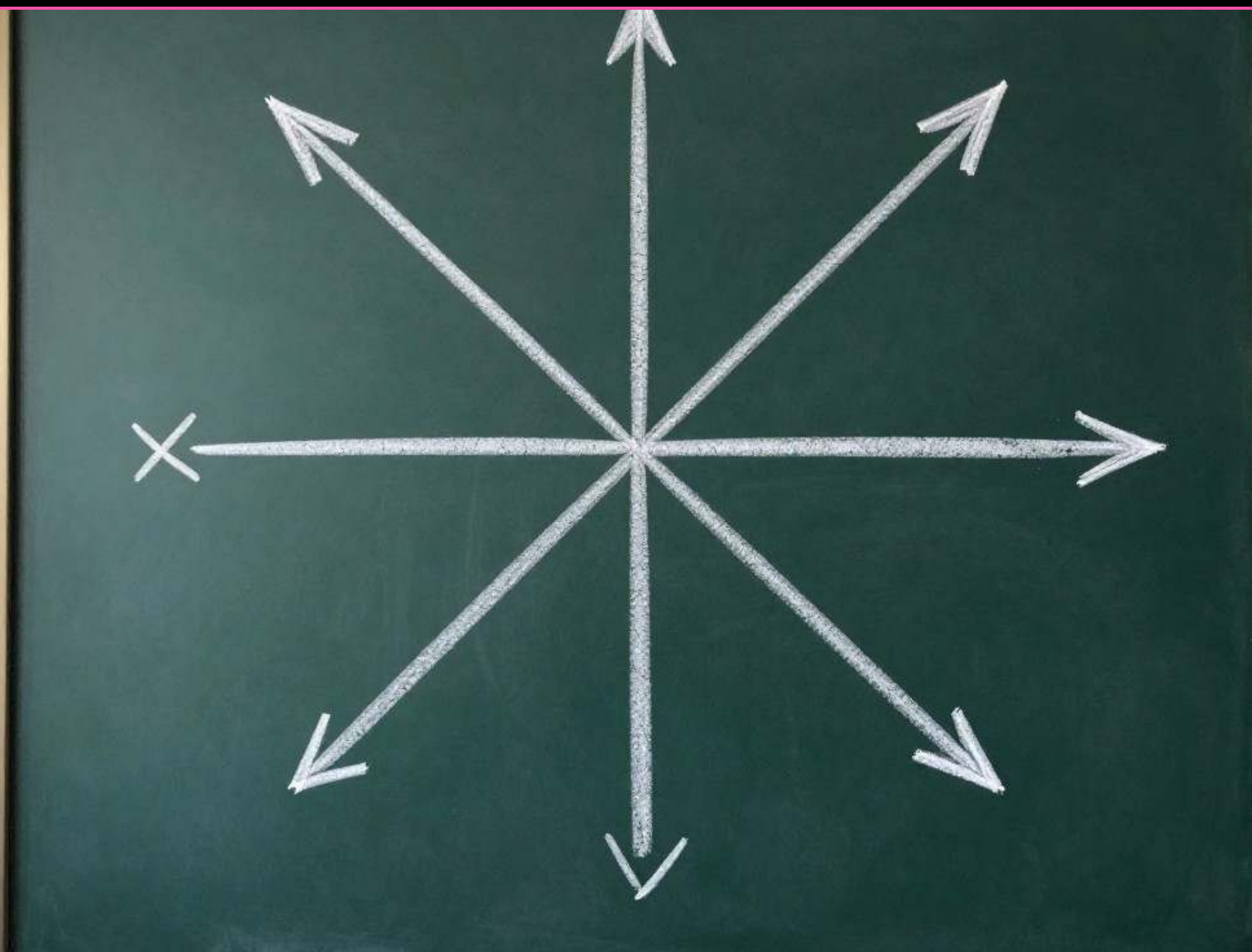
У вектора задано начало: с него начинается стрелка. Направление задаётся кончиком, поэтому два отрезка с одинаковой длиной, но развернутые, не являются одинаковыми векторами.



НУЛЕВОЙ ВЕКТОР

Нулевой вектор имеет модуль 0. У него нет фиксированного направления: геометрически он соответствует «точке» вместо стрелки и используется как нейтральный элемент в сложении.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ



Стрелка как модель вектора

На координатной плоскости вектор изображают стрелкой: её длина соответствует модулю, а наконечник показывает направление. Начальная точка важна, потому что один и тот же отрезок может задавать разные векторы при смене начала.

Перенос без изменения свойств

Один и тот же вектор можно переносить параллельно самому себе: изменится место на рисунке, но не изменятся ни модуль, ни направление. Это помогает отделять «положение» стрелки от её геометрической характеристики.



СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПО ПРАВИЛУ ТРЕУГОЛЬНИКА

Геометрическое построение суммы двух последовательных перемещений





СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПО ПРАВИЛУ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Отложите оба вектора из одной точки как соседние стороны параллелограмма. Важно держать направления: каждая стрелка задаёт «своё» направление совместного действия.

01

Диагональ, выходящая из общей начальной точки, и будет суммой векторов. По сути, она заменяет два последовательных сдвига одним итоговым перемещением.

02

Если векторы перпендикулярны, диагональ наглядно выражает результат без формул. В задачах про силы и скорости это часто позволяет обойтись построением и получить вектор равнодействующей.

03



СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ В КООРДИНАТАХ

Здесь $a=(3;2)$, $b=(-1;4)$,
поэтому $a+b=(2;6)$: x и y
считаются независимо по
СВОИМ ОСЯМ.

Совпадение итогового вектора
с построением следует из
того, что направление
задаётся знаками компонент, а
модуль определяется их
сочетанием.

Пример из школьного курса ($a=(3;2)$, $b=(-1;4)$).



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ОПЕРАЦИЙ С ВЕКТОРАМИ

Координатные операции выполняются покомпонентно: сумма, разность, противоположный вектор и модуль задаются прямыми формулами.

Таблица показывает: для сложения и вычитания достаточно работать с каждой координатой отдельно, а модуль берётся через теорему Пифагора.

Операция	Запись по координатам	Смысл
$a+b$	$(ax+bx; ay+by)$	общее перемещение
$a-b$	$(ax-bx; ay-by)$	разность направлений
$-a$	$(-ax; -ay)$	разворот на 180°
$ a $	$\sqrt{ax^2+ay^2}$	длина вектора



ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ КАК СЛОЖЕНИЕ ПРОТИВОПОЛОЖНОГО

Разность $a-b$ можно заменить на сумму: $a-b = a + (-b)$. Иначе говоря, сначала мы «меняем направление» вычитаемого вектора, а затем складываем.

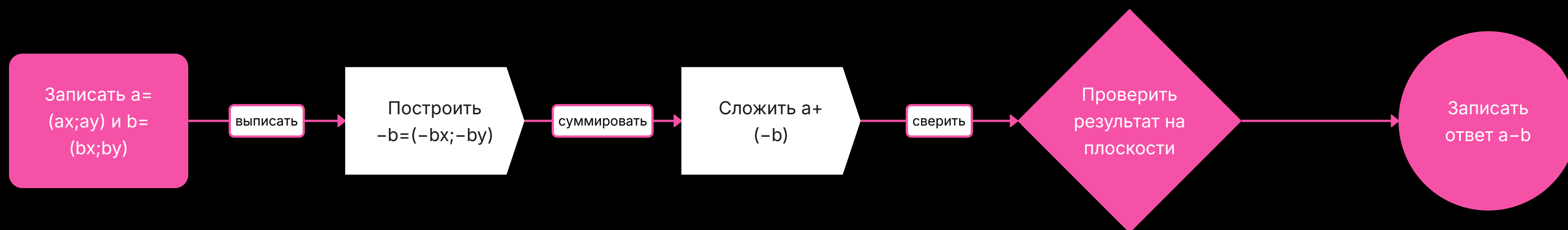
Противоположные векторы равны по модулю и направлены строго в разные стороны. Геометрически это похоже на разворот стрелки на 180° , который переводит направление вычитания в направление сложения.

В координатной записи меняется знак у каждой компоненты вектора b . Поэтому разность получается поэлементно: вычитаем x -компоненты и отдельно вычитаем y -компоненты.



АЛГОРИТМ ВЫЧИТАНИЯ ВЕКТОРОВ ПО КООРДИНАТАМ

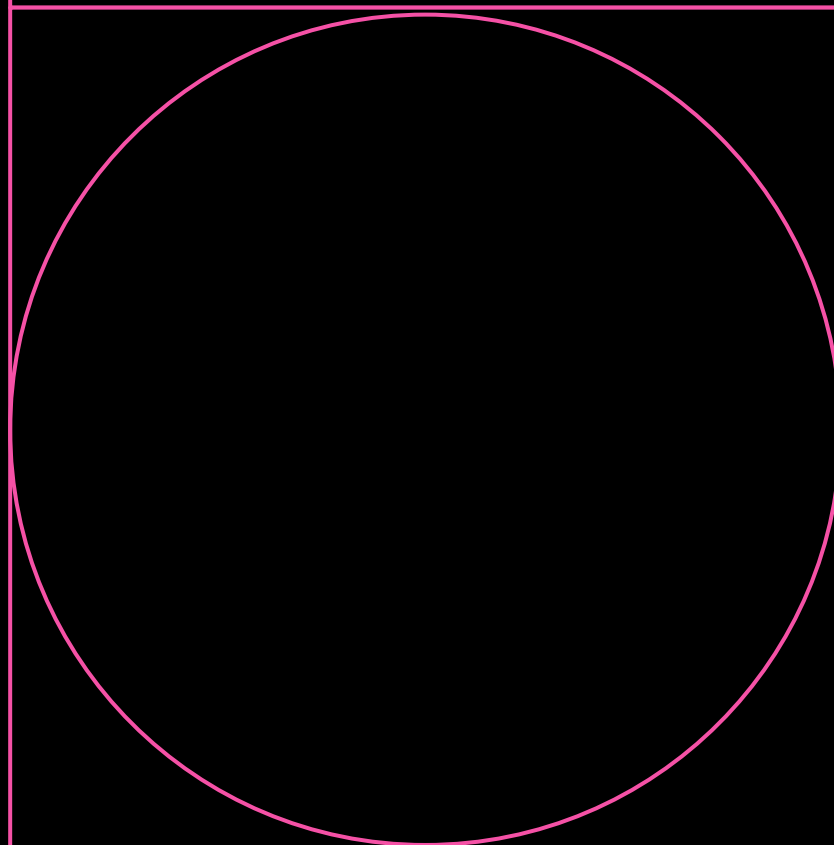
Пошаговое выполнение выражения вида $(ax - bx; ay - by)$ с проверкой направления



ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ЖИЗНЕННЫХ И УЧЕБНЫХ ЗАДАЧАХ

Сложение векторов описывает последовательное перемещение: сначала проходит один участок пути по заданному направлению, затем выполняется второй этап. В результате получается один общий вектор, соответствующий суммарному смещению.

Вычитание векторов применяют, когда нужно найти разность перемещений или сравнить два направления. Графическая модель «вектор минус вектор» помогает увидеть, как меняется ориентация результата на плоскости.



КАК МЕНЯЕТСЯ РЕЗУЛЬТАТ СЛОЖЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

На одной и той же диаграмме сравните сценарии: чем ближе направления к совпадающим, тем больше модуль суммы; при развороте на 180° итог может исчезнуть.

График показывает, что модуль суммы определяется не только длинами, но и углом: направление меняет вклад компонент и способно как усиливать, так и компенсировать движение.

Обобщение школьного курса: для одинаковых модулей $|a|=|b|$ используется $|a+b|=2|a|\cos(\theta/2)$.

Типичные ошибки при сложении и вычитании векторов

Иногда ученики складывают только модули, забывая о направлениях. В результате получаются неверные итоговые длины: одинаковые по величине, но разнонаправленные векторы могут дать частичную компенсацию.

01

Частая проблема – неправильный знак у координат при построении противоположного вектора. Тогда вместо $-b$ выходит вектор с неверной ориентацией, и вычисления превращаются в «смешивание» направлений.

02

Нередко путают равные и противоположные векторы: равные имеют одинаковое направление, а противоположные – разные. Ошибка проявляется в задачах на перенос и в чтении условий, где важен угол или разворот.

03

При вычитании забывают, что порядок принципиален: $a-b$ не равно $b-a$. Дополнительно влияет неверное «копирование» вектора с изменением длины: перенос допускается без смены модуля и направления.

04



ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В КООРДИНАТАХ

Вычисления по координатам переводят арифметику в геометрию: найденный вектор должен совпасть по направлению и по длине с построением на координатной плоскости.

Примеры демонстрируют правило покомпонентного сложения и то, что при смене порядка вычитания меняется ориентация результата.

Векторы	Сумма	Разность	Проверка
$a=(2;-1), b=(-3;5)$	$a+b=(-1;4)$	$a-b=(5;-6)$	$b-a=(-5;6)$

Типовые задания школьного курса геометрии (векторы на плоскости), учебные упражнения на покомпонентные формулы.

ВКЛАД КООРДИНАТНЫХ КОМПОНЕНТ В ИТОГОВЫЙ ВЕКТОР

Проверяйте направление результата по знакам координат: именно они определяют, в какую сторону от начала осей откладывается суммарная «стрелка».

Поскольку x - и y -компоненты складываются независимо, итоговый вектор можно строить как сумму горизонтального и вертикального смещений, не теряя геометрического смысла.

Учебная иллюстрация по примеру $a=(4;1)$ и $b=(-2;3)$, сложение компонент: $(2;4)$.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ В ЗАДАЧАХ ФИЗИКИ И ГЕОМЕТРИИ



МАРШРУТ КАК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СМЕЩЕНИЙ

Сумма векторов описывает движение по этапам: сначала перемещение вдоль одного направления, затем вдоль другого. Такой подход упрощает составление маршрутов и помогает находить итоговое смещение.



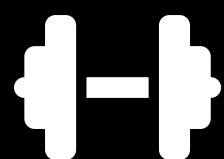
КОМПЕНСАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ: ВЫЧИТАНИЕ

Когда одну причину «погашают» другой, удобно рассматривать разность векторов. Геометрически это переход от одного направления к другому через прибавление противоположного вектора.



СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ КАК ВЕКТОРЫ

Векторные операции применяют к скорости и ускорению: равнодействующая и итоговое движение задаются суммой подходящих составляющих. Это делает задачи на движение более наглядными.



РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СИЛ

Две силы заменяют одной равнодействующей, которая соответствует сумме векторов. При этом направление результирующей определяется геометрией: модуль уменьшается или возрастает в зависимости от угла между силами.

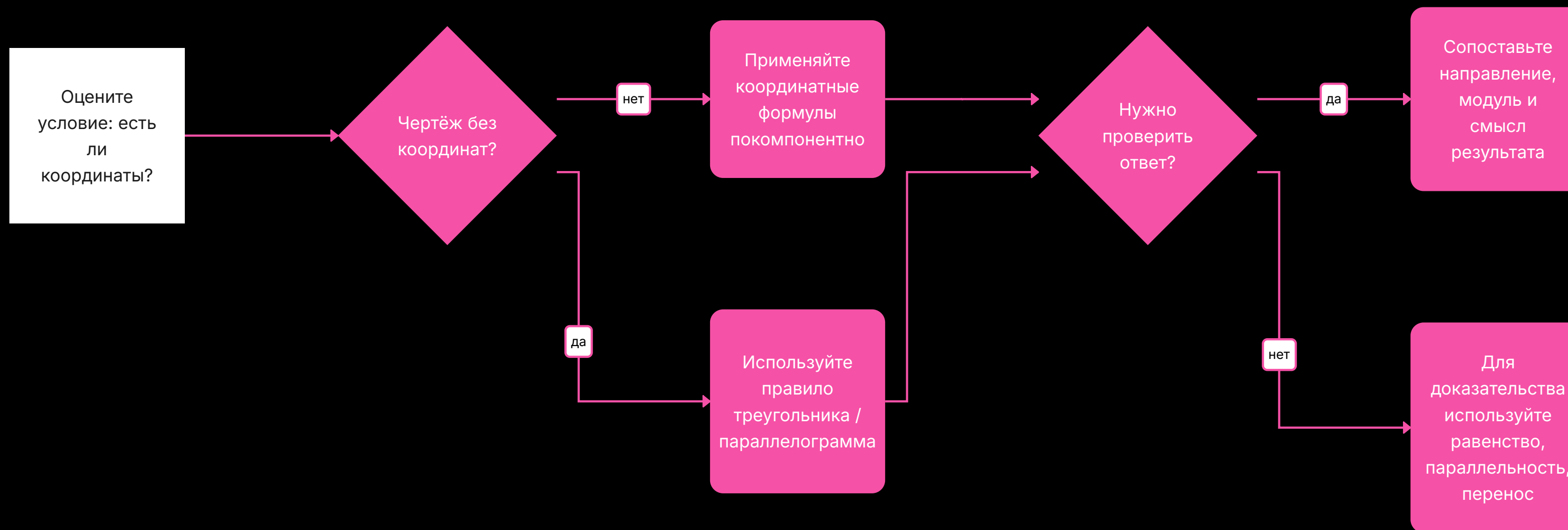


ДВИЖЕНИЕ ПО РЕКЕ

При решении задач учитывают скорость лодки относительно воды и скорость течения. Итоговая скорость относительно берега получается сложением соответствующих векторов с учётом их направлений.

ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ

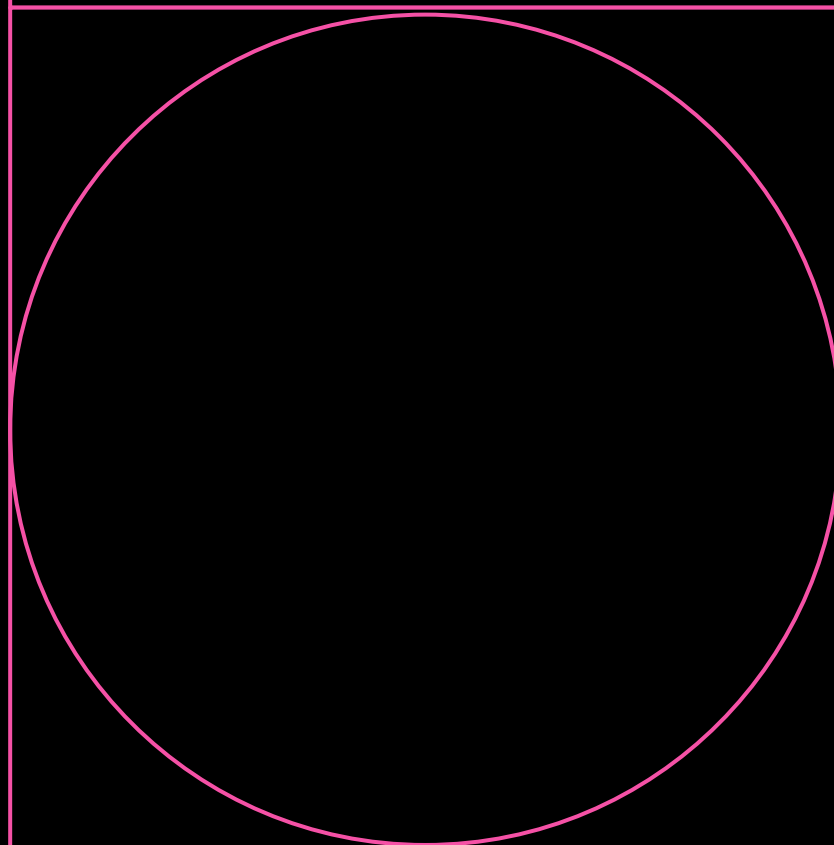
Логика подбора метода: наличие координат и цель проверки ответа.



ПРОТИВОПОЛОЖНЫЙ ВЕКТОР И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Противоположный вектор имеет ту же длину, что и исходный, но направлен в обратную сторону. Его обозначают как $-a$, чтобы подчеркнуть разворот на 180° относительно направления исходного движения.

Этот образ помогает понимать формулу $a-b=a+(-b)$: вычитание превращается в добавление противоположного вектора. На схеме удобно видеть две равные стрелки на одной линии, но противоположной ориентации.



СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ С ВЕКТОРАМИ

Сложение векторов обладает переместительным свойством: $a+b=b+a$. Поэтому порядок слагаемых при сложении не влияет на итоговый вектор, если неизменны направления и модули.

Также верно сочетательное свойство: $(a+b)+c=a+(b+c)$. Это позволяет группировать выражения так, чтобы удобнее выполнять вычисления по координатам или по геометрии.

Для вычитания порядок принципиален: обычно $a-b$ не равно $b-a$. Геометрически меняется итоговое направление, потому что знак у второй компоненты вычитаемого вектора «работает» по-разному.

Нулевой вектор выступает нейтральным элементом при сложении: $a+0=a$. Используйте эти свойства как инструмент для преобразований выражений и для быстрой проверки результата.

***ИТОГИ ТЕМЫ: ЧТО
НУЖНО ЗНАТЬ И
УМЕТЬ***



Сложение и вычитание векторов объединяют геометрические построения и координатные вычисления. Уверенно используйте правило треугольника, параллелограмма и формулы покомпонентного сложения. Помните понятия модуля, направления, равных, противоположных и нулевого вектора.