

Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости

Поймём, как по признаку построить перпендикуляр и уверенно доказывать в пространстве.

1 ÷ 2

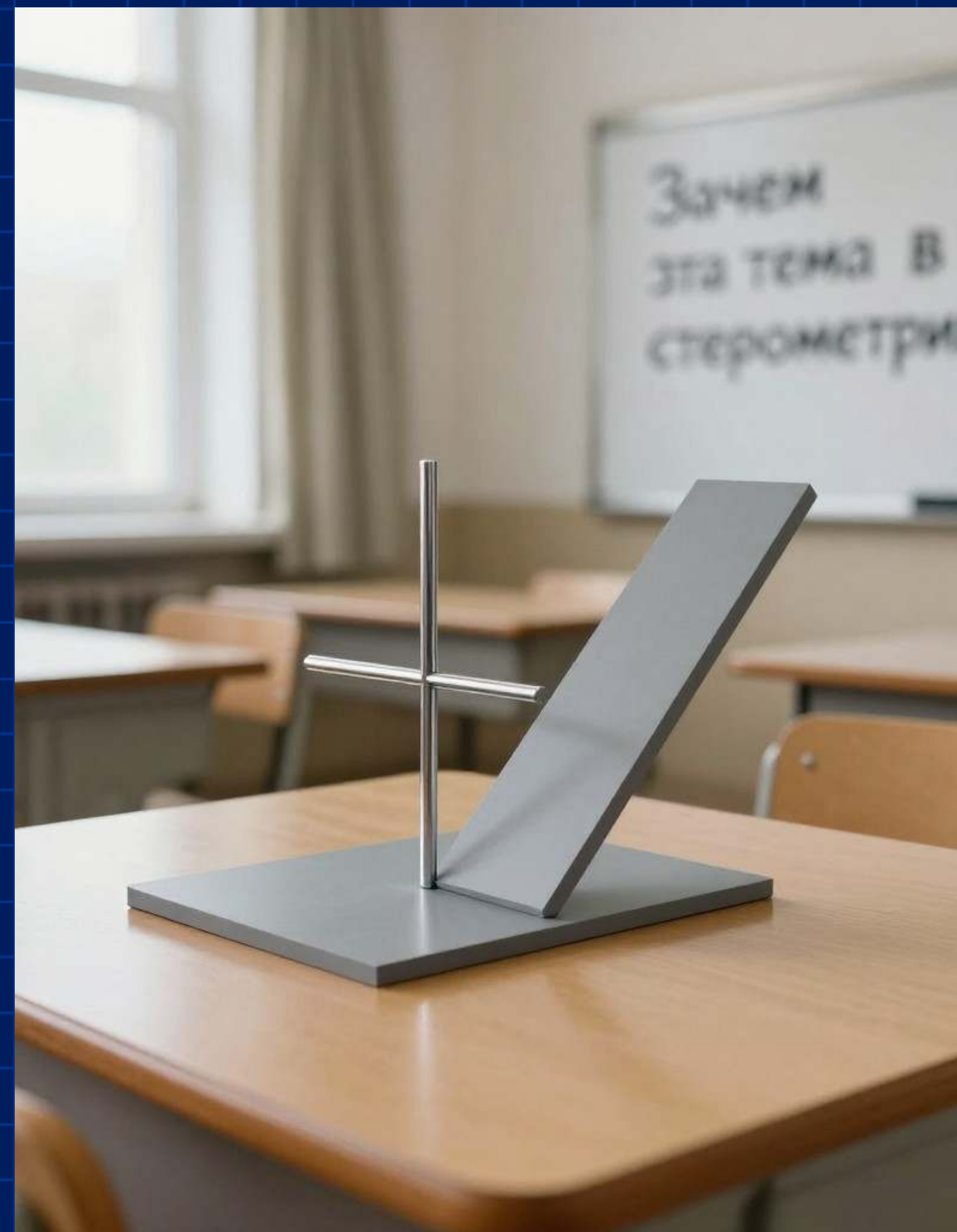
109

8



Зачем эта тема в стереометрии?

Перпендикулярность прямой и плоскости связывает рисунок на бумаге с реальными пространственными измерениями. Она помогает находить высоты многогранников, расстояния от точки до плоскости и углы, а затем становится опорой для пирамид, призм и правильных многогранников.



Определение взаимной перпендикулярности

Прямая a перпендикулярна плоскости α , если она пересекает плоскость в точке O и перпендикулярна любой прямой этой плоскости, проходящей через O . Тогда O – основание перпендикуляра.

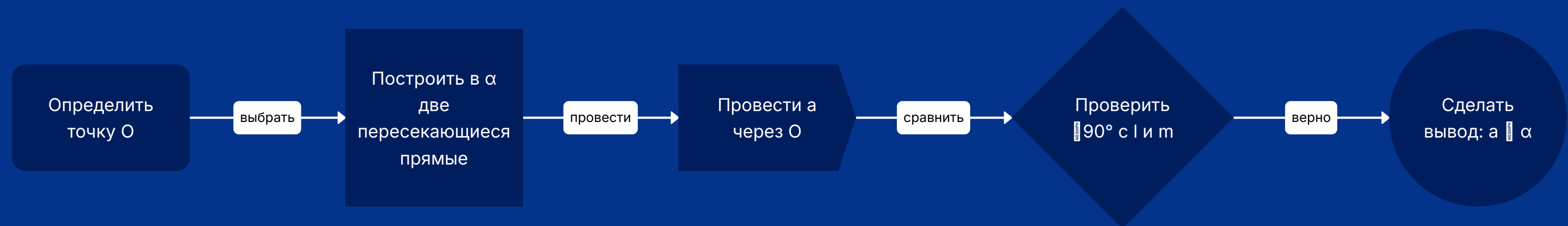
Перпендикулярность понимается как «жёсткое» направление: сколько бы ни проводили прямые в плоскости α через O , прямая a всегда образует с ними угол 90° . Это и есть проверяемая геометрическая идея.

Если $a \perp \alpha$, то любой отрезок прямой a от точки O до другой точки плоскости составляет с плоскостью прямой угол. Так определение превращается в наглядный ориентир для построений.



Логика построения перпендикуляра к плоскости

Дано: прямая и плоскость или точка, через которую нужно провести перпендикуляр.



Наглядная модель: вертикаль и плоскость основания

1

2

Что изображает схема

Плоскость удобно представлять как горизонтальную поверхность: по ней «раскладывается» чертёж. Прямая рассматривается как вертикальный отрезок, который пересекает плоскость в одной точке — это и есть основание перпендикуляра O .

Как «читать» признак

Чтобы проверить перпендикулярность, в самой плоскости проводят две пересекающиеся прямые через O . Тогда прямой угол между выбранной прямой и обеими линиями показывает, что прямая действительно перпендикулярна плоскости.



Основные элементы определения и их смысл

Элемент	Геометрический смысл	Роль в построении
Прямая a	Линия в пространстве	Становится перпендикуляром к плоскости
Плоскость α	Поверхность	Задаёт область проверки
Точка O	Точка пересечения	Основание перпендикуляра
Две прямые	Пересекаются в O	Позволяют применить признак
Запись $a \perp \alpha$	Обозначение	Нужна в выводе

Содержание определения и признака из школьной стереометрии 10 класса.

Терминология превращает определение и признак в чёткий алгоритм действий на чертеже.

Ключевой вывод: чтобы доказать $a \perp \alpha$, достаточно показать перпендикулярность прямой двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости α .



Когда прямая через точку O образует прямой угол с двумя пересекающимися прямыми плоскости α , она перпендикулярна всей плоскости.

2

**достаточно рассмотреть две
пересекающиеся прямые в
плоскости вместо
«бесконечного множества»
направлений.**

Текст признака перпендикулярности для прямой и плоскости (стереометрия, 10 класс).



Вспомогательная схема для проверки перпендикулярности

- На схеме две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку O . Через O проводится третья прямая так, что с каждой из двух линий получается угол 90° .
- Такое построение фиксирует достаточное условие: если одна прямая одновременно перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости целиком. Именно поэтому схемы такого вида часто встречаются в доказательствах.



Пошаговое построение на чертеже

Процедура повторяет логику признака перпендикулярности.



Основные типы задач на перпендикуляр к плоскости

Ситуация	Что дано	Что требуется
Через точку в плоскости	O, α	Построить перпендикуляр в точке O
Через точку вне плоскости	A, α	Найти основание и провести перпендикуляр
По двум прямым плоскости	$l, m \text{ в } \alpha$	Построить прямую, перпендикулярную плоскости
В пространственной фигуре	Пирамида/призма/параллелепипед	Найти высоту или расстояние

Типология задач школьного курса по теме перпендикулярности прямой и плоскости.

Разные условия задачи требуют одного и того же «ядра»: выбрать основание и применить признак через две пересекающиеся прямые.

Во всех случаях доказательство и построение сводятся к выбору точки (основания) и проверке перпендикулярности через две пересекающиеся прямые плоскости α .

Построение перпендикуляра через точку вне плоскости

1

Если точка A не принадлежит плоскости α , сначала находят основание перпендикуляра O на плоскости. Для этого используют признак: перпендикулярность доказывают через две пересекающиеся прямые в α .



2

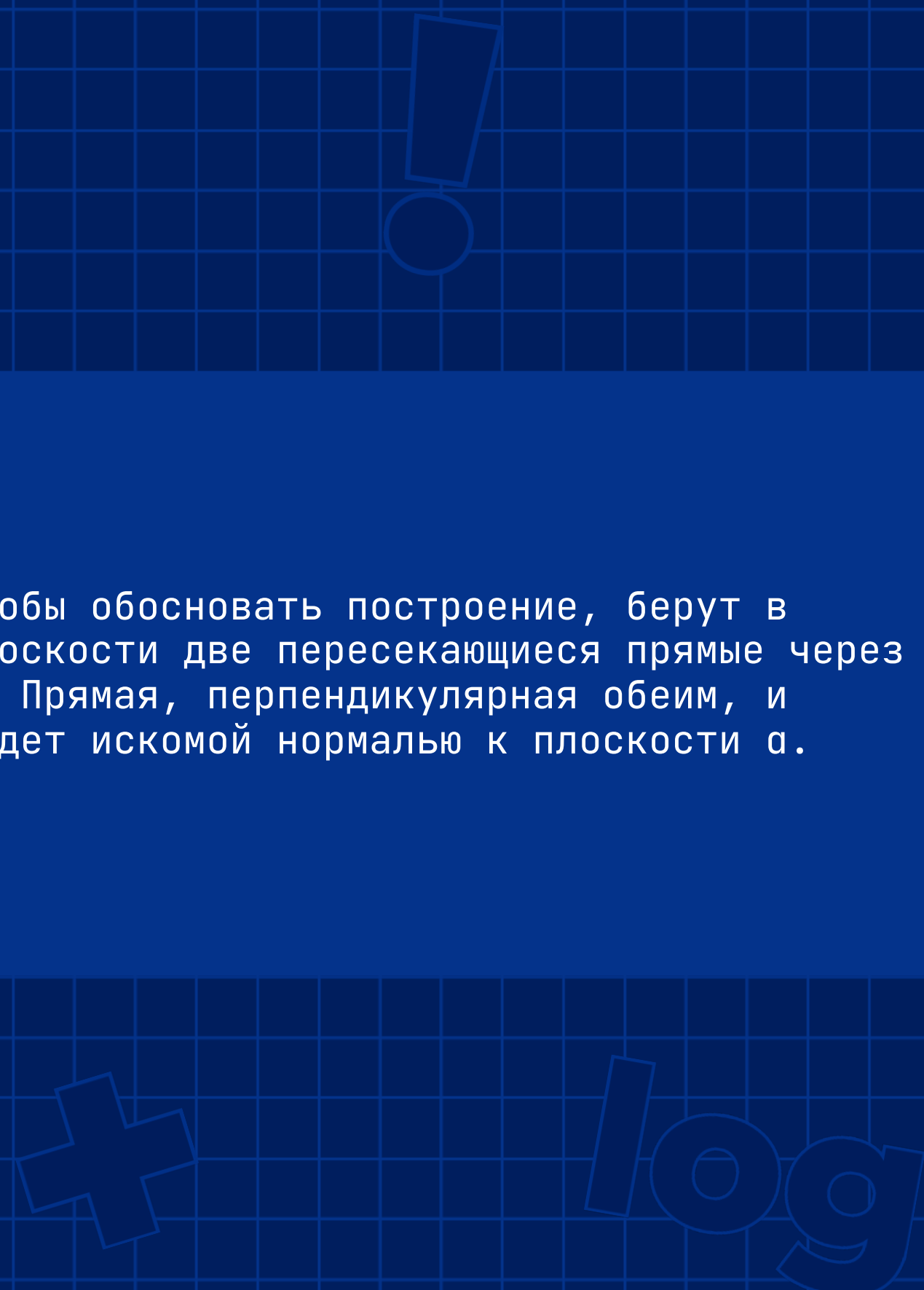
Построенная прямая a проходит через A и через O . В записи удобно фиксировать: $a \perp \alpha$, а отрезок AO становится тем самым перпендикуляром к плоскости, который соединяет точку с плоскостью по кратчайшему пути.



3

Ключевое следствие для задач: длина AO — это расстояние от точки A до плоскости α . Поэтому дальнейшие вычисления сводятся к работе с прямоугольными треугольниками на чертеже, где один угол 90° уже задан.

4



Чтобы обосновать построение, берут в плоскости две пересекающиеся прямые через O . Прямая, перпендикулярная обеим, и будет искомой нормалью к плоскости α .

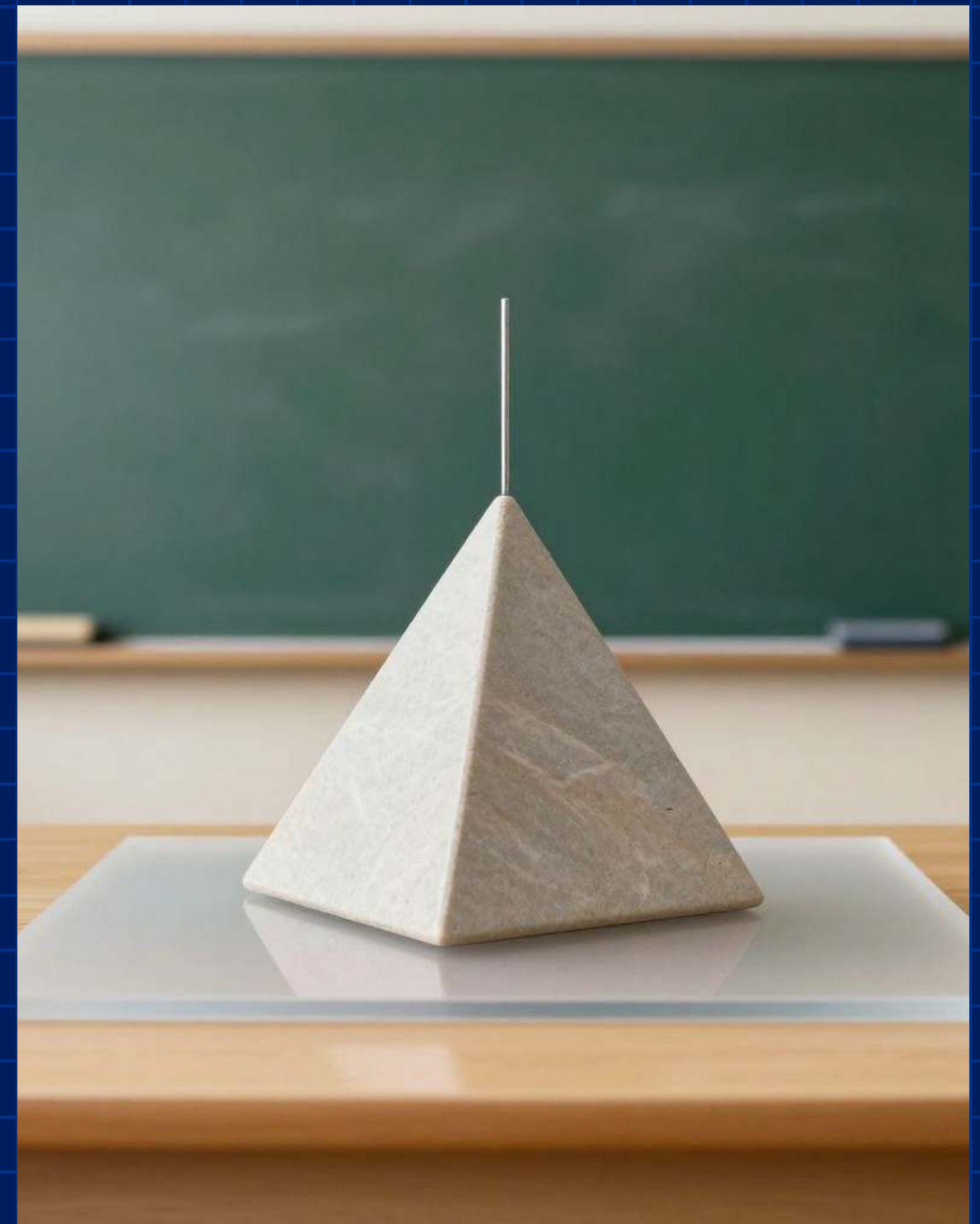
1

**Через точку плоскости
можно провести только
одну прямую,
перпендикулярную
плоскости.**

Свойство взаимной перпендикулярности прямой и плоскости (признак и следствие из него)

Связь с высотой в многогранниках

- Высота пирамиды или призмы — это отрезок, который опущен на плоскость основания под прямым углом. Поэтому он является перпендикуляром к плоскости основания и проходит через её основание.
- Именно это объясняет, почему в вычислениях объёма высота фигурирует вместе с площадью основания: объём равен произведению площади основания на высоту. Без перпендикулярности такая подстановка была бы некорректной.



Типичные ошибки при построении и доказательстве

Частая ошибка 1: пытаться доказать перпендикулярность, проверяя только к одной прямой плоскости. Признак требует двух пересекающихся прямых, лежащих в одной и той же плоскости и через точку O .

Ошибка 2: отсутствует общая точка пересечения прямой и плоскости. Без точки O невозможно говорить о том, что именно в этой точке проводится перпендикуляр к плоскости и какие углы с какими прямыми сравниваются.

Ошибка 3: смешение понятий «перпендикуляр к прямой», «перпендикуляр к отрезку» и «перпендикуляр к плоскости». Перпендикуляр к плоскости задаётся углом между прямой и плоскостью, который получается из прямых углов с двумя линиями.

Ошибка 4: неверно обозначают основание перпендикуляра и точку пересечения. Если перепутать O с другой точкой, то доказательство признака формально рухнет: перестаёт быть выполнено требование «через O лежат две пересекающиеся прямые».

Проверка правильности решения

Этап	Контрольный вопрос	Результат
Выбор точки	Есть ли точка пересечения с плоскостью?	Да
Построение в плоскости	Есть ли две пересекающиеся прямые через эту точку?	Да
Проверка углов	Образует ли искомая прямая прямые углы с обеими прямыми?	Да
Запись вывода	Сделана ли запись $a \perp \alpha$?	Да

Методический алгоритм проверки по признаку перпендикулярности.

Короткий чек-лист помогает убедиться, что построение перпендикуляра выполнено по признаку и вывод сделан обоснованно.

Решение считается строгим, когда: выбрана правильная точка O , построены две пересекающиеся прямые в плоскости α и доказаны прямые углы с обеими, после чего сделана корректная запись $a \perp \alpha$.

Доказательство на основе теоремы о двух пересекающихся прямых

Доказательство признака опирается на теорему: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым некоторой плоскости, то она перпендикулярна всей этой плоскости.

В решении обязательно указывают две прямые, которые лежат в плоскости α , и подчёркивают их пересечение в общей точке O . Именно наличие общей точки связывает построение с геометрией плоскости.

Затем фиксируют: прямая a проходит через O и образует прямой угол с каждой из выбранных прямых. После этого делается вывод $a \perp \alpha$, который не требует дополнительных проверок на «бесконечное число» прямых.

$$x^2 + 4x - 8$$

Использование в задачах школьного курса

1

log



Расстояния

Перпендикуляр к плоскости задаёт расстояние от точки до плоскости: длина перпендикуляра AO . Это позволяет переводить задачу о расстоянии в вычисление в прямоугольном треугольнике.



Высоты многогранников

Когда требуется высота пирамиды или призмы, строят перпендикуляр к плоскости основания. Затем по высоте и площади основания получают параметры тела и находят неизвестные величины.



Углы в пространстве

Чтобы найти угол между прямой и плоскостью, сначала проводят перпендикулярную опору в плоскости и формируют прямоугольную конструкцию. Угол корректно определяют через перпендикулярные прямые.



Вспомогательные построения

Перпендикуляр помогает добавлять «удобные» прямоугольники внутри пространственной фигуры. Так задача сводится к знакомым планиметрическим соотношениям и аккуратным вычислениям.

2

x

Практические приложения геометрической модели

В архитектуре перпендикуляр к горизонтальной плоскости задаёт вертикальность стен, колонн и опорных элементов. Практически это соответствует контролю правильного положения конструкций относительно основания.

В черчении и инженерной графике перпендикуляр используют при построении проекций и разрезов, чтобы сохранять точные взаимные положения деталей. Там, где важна симметрия и прямой угол, без перпендикуляра не обойтись.

В 3D-моделировании и компьютерной графике нормаль к поверхности определяет ориентацию объекта и направление вычислений освещения. По сути, геометрическое « 90° » превращается в основу корректного визуального эффекта.

Минимальный набор обозначений и формулировок



Начало решения

Запишите исходные данные: плоскость α и точка/прямая a . Сразу обозначьте, где проходит прямая a — через точку O или через точку A вне плоскости.

Выбор основания

Если прямая должна быть перпендикулярной плоскости, обозначьте основание перпендикуляра: O — точка пересечения прямой и плоскости α .

Ключевая проверка

В плоскости α через O постройте две пересекающиеся прямые. Проверьте, что прямая a образует прямой угол с каждой из этих двух прямых.

Строгий вывод

Сделайте запись вывода: $a \perp \alpha$. Главная формулировка для обоснования: достаточно прямых углов с двумя пересекающимися прямыми плоскости α .



Итоги урока: что важно запомнить

Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости опирается на выбор точки пересечения O , использование двух пересекающихся прямых в плоскости α и доказательство прямых углов, после чего вывод записывают как $\alpha \perp a$.



cos

sin

1

tg

ctg