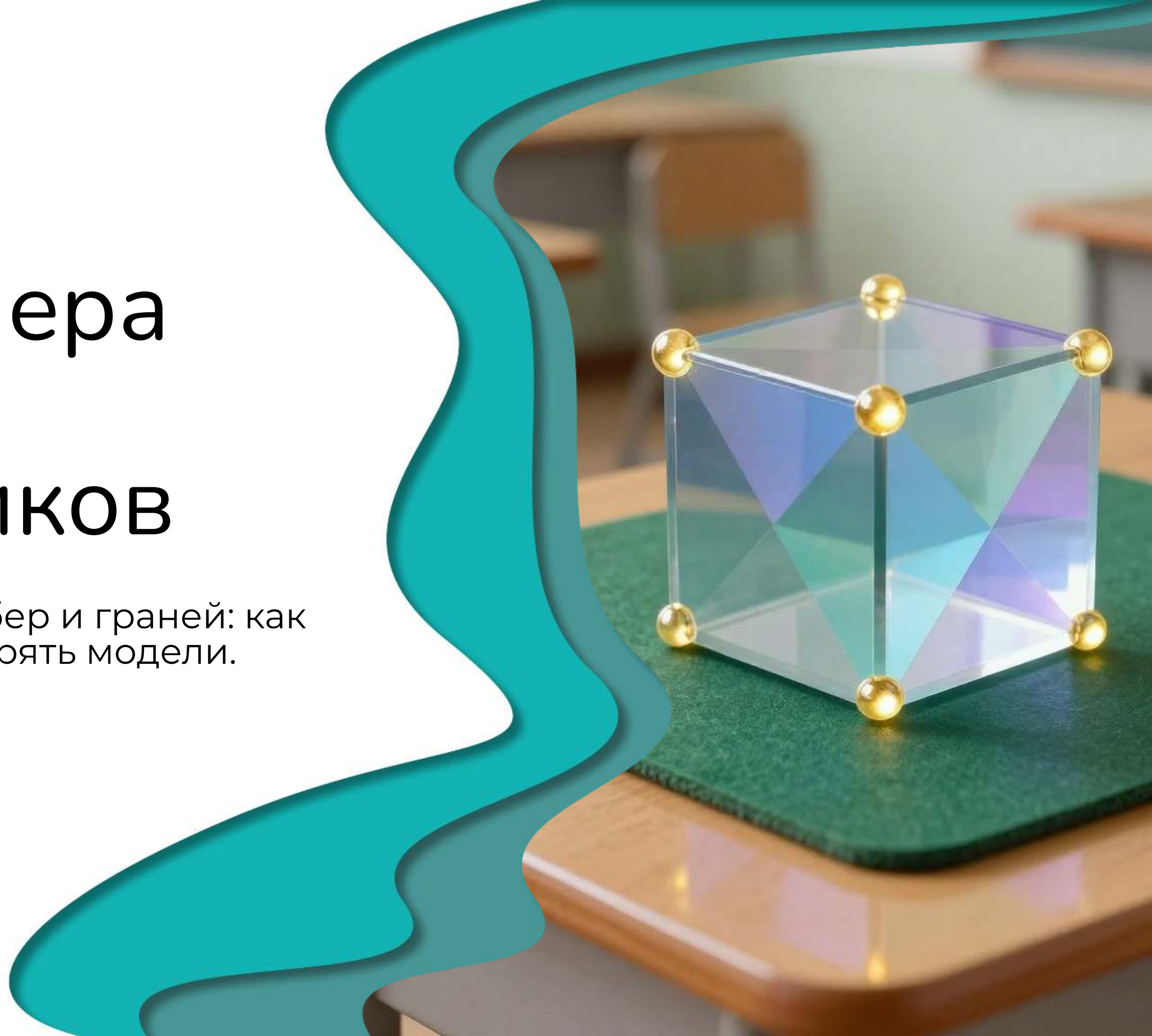


# Теорема Эйлера для многогранников

Понимание связи вершин, рёбер и граней: как одна формула помогает проверять модели.



# Зачем изучать теорему Эйлера и где она встречается

Многогранники окружают нас: от коробок и учебных наборов до 3D-моделей. В школе рассматривают куб, призму, пирамиду, тетраэдр и октаэдр. Теорема Эйлера помогает находить неизвестные элементы и проверять подсчёты.



# Основные элементы многогранника

- Вершина — это точка, где сходятся несколько рёбер. Обычно, чем сложнее форма, тем больше вершин нужно учесть при подсчёте элементов.
- Ребро — отрезок, который соединяет две вершины и является «границей» между двумя гранями. Именно по рёбрам удобно проверять каркас многогранника.
- Грань — плоская часть многогранника, например квадрат, треугольник или прямоугольник. У куба ровно 6 граней и 12 рёбер, соединённых симметрично.

# Примеры выпуклых многогранников

Для каждого примера выполняется равенство  $V - E + F = 2$ , если считать только вершины, рёбра и грани.

Разные фигуры имеют разные значения  $V$ ,  $E$  и  $F$ , но их «суммарный баланс» по формуле всегда даёт 2.

*Материалы школьного курса геометрии (табличные данные для выпуклых многогранников).*

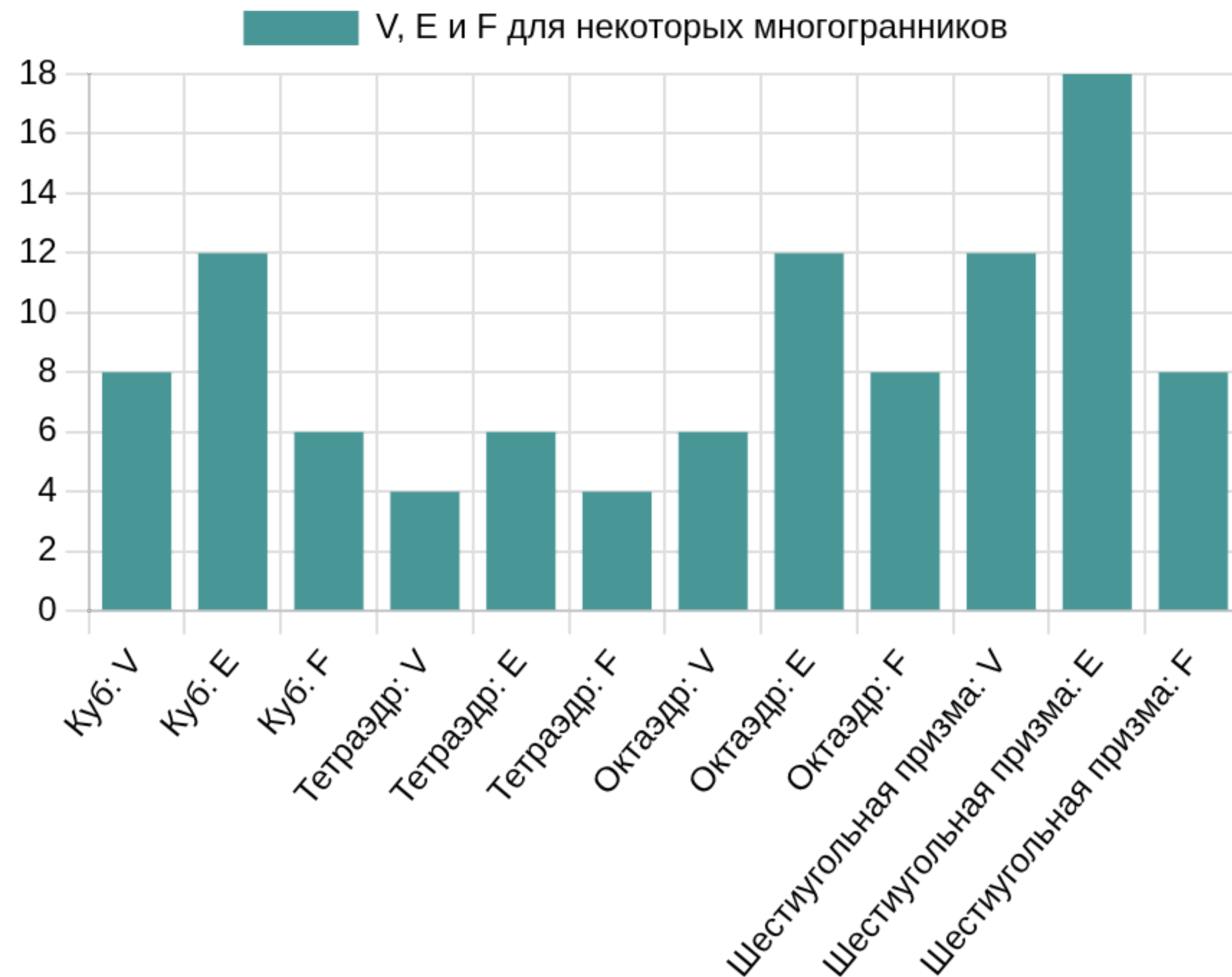
| Многогранник         | V  | E  | F |
|----------------------|----|----|---|
| Куб                  | 8  | 12 | 6 |
| Тетраэдр             | 4  | 6  | 4 |
| Октаэдр              | 6  | 12 | 8 |
| Шестиугольная призма | 12 | 18 | 8 |

# Сравнение числа вершин, рёбер и граней

Даже при заметной разнице в размерах и количестве элементов разность  $V - E + F$  остаётся постоянной.

Если при проверке получается не 2, значит где-то ошиблись в подсчёте вершин, рёбер или граней.

*Расчёты по данным таблицы, без привлечения внешних источников.*



Значение 2 — это «контрольная метка» теоремы: она работает для выпуклых многогранников без отверстий.

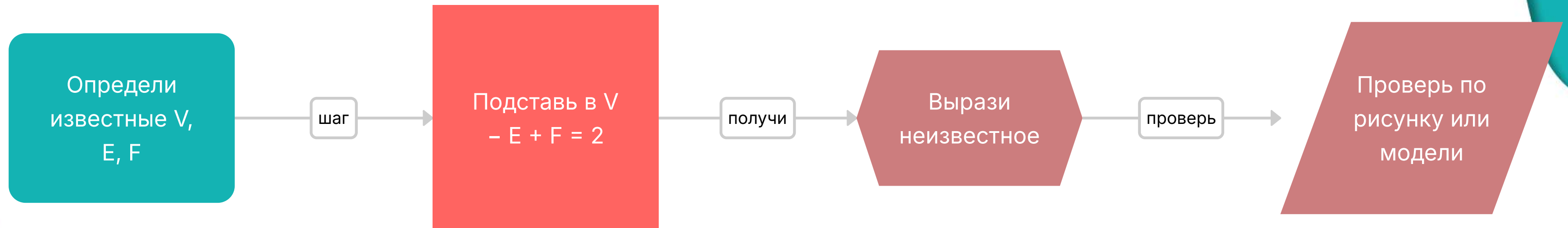
*Классическая теорема Эйлера (школьная геометрия).*

2

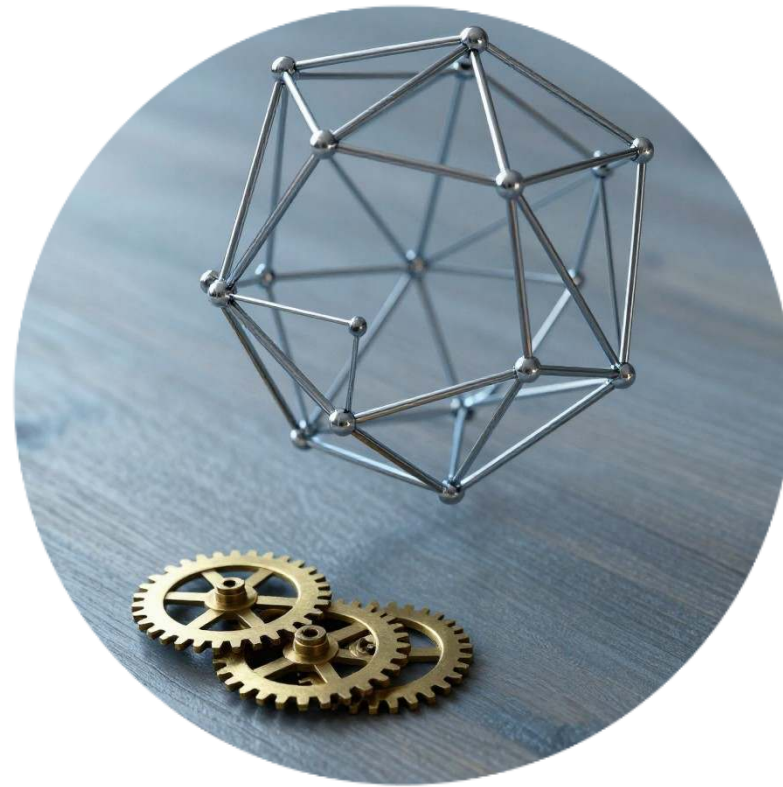
При правильном подсчёте элементов выпуклого многогранника разность вершин и рёбер с учётом граней даёт единый результат.

# Как найти неизвестный элемент многогранника

Схема решения опирается на формулу  $V - E + F = 2$  и подсчёт известных элементов на модели.



# Леонард Эйлер и история открытия



## Математик, который «посчитал» форму

Леонард Эйлер жил в 1707–1783 годах и работал в математике, механике и астрономии. Он помог увидеть, что даже сложная фигура подчиняется простому правилу. Поэтому его имя часто связывают с «геометрическими вычислениями».



## Почему формула стала известной

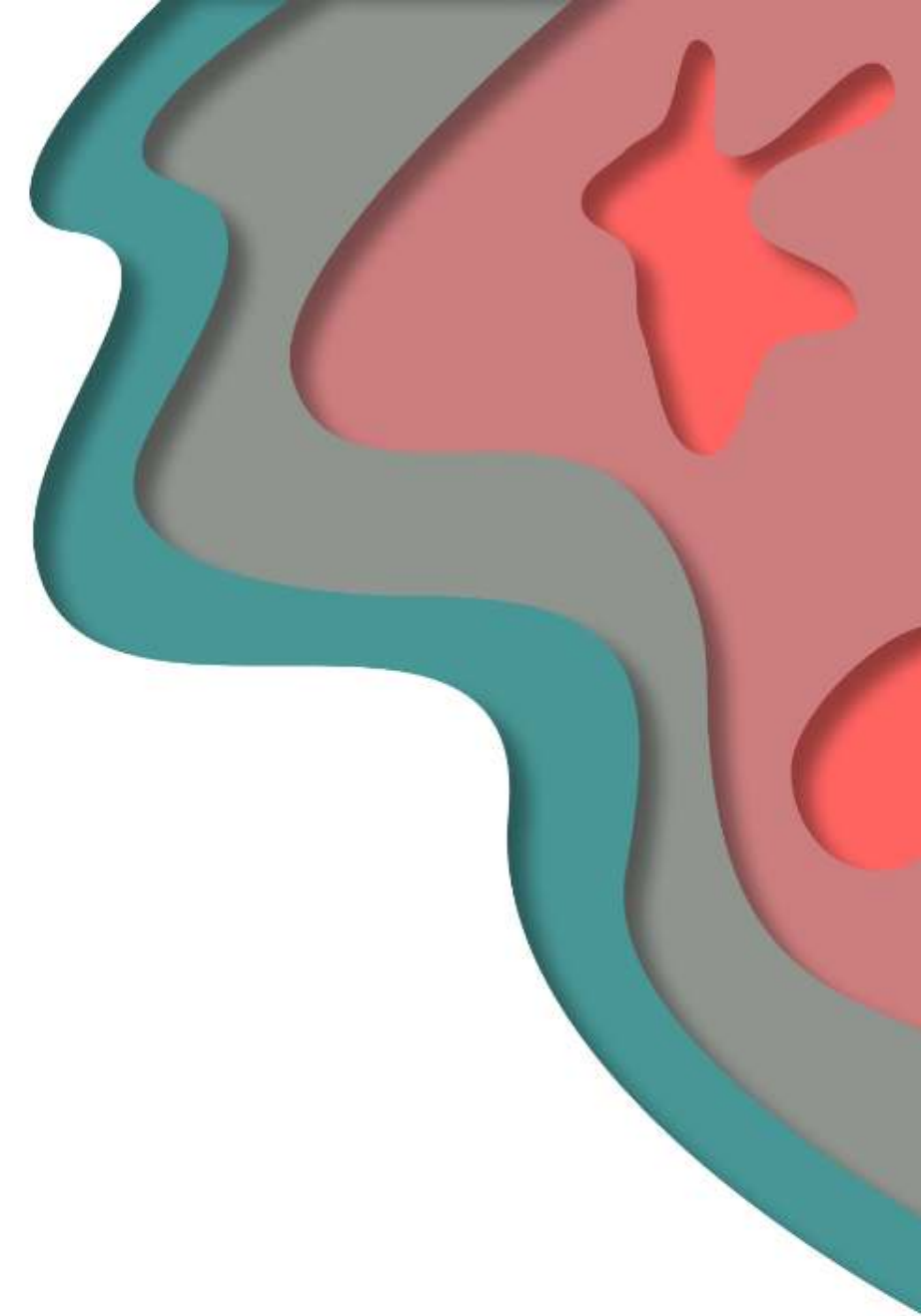
В XVIII веке для многогранников появилась формула, ставшая одним из знаменитых результатов геометрии. Она связала число вершин, рёбер и граней в единое равенство. На слайде хорошо смотрятся портрет Эйлера и каркас многогранника.

# Почему условие выпуклости важно

Теорема Эйлера верна для выпуклых многогранников: все их части «смотрят наружу» и нет вогнутых участков. Тогда подсчёт вершин, рёбер и граней работает по единому закону.

Если у фигуры есть «дырка» или она похожа на кольцо, число элементов уже не складывается в постоянную разность. В таких случаях равенство  $V - E + F = 2$  может не выполняться.

Перед вычислениями полезно проверить, действительно ли модель подходит под условие теоремы. Это снижает риск ошибки и делает результат более надёжным.

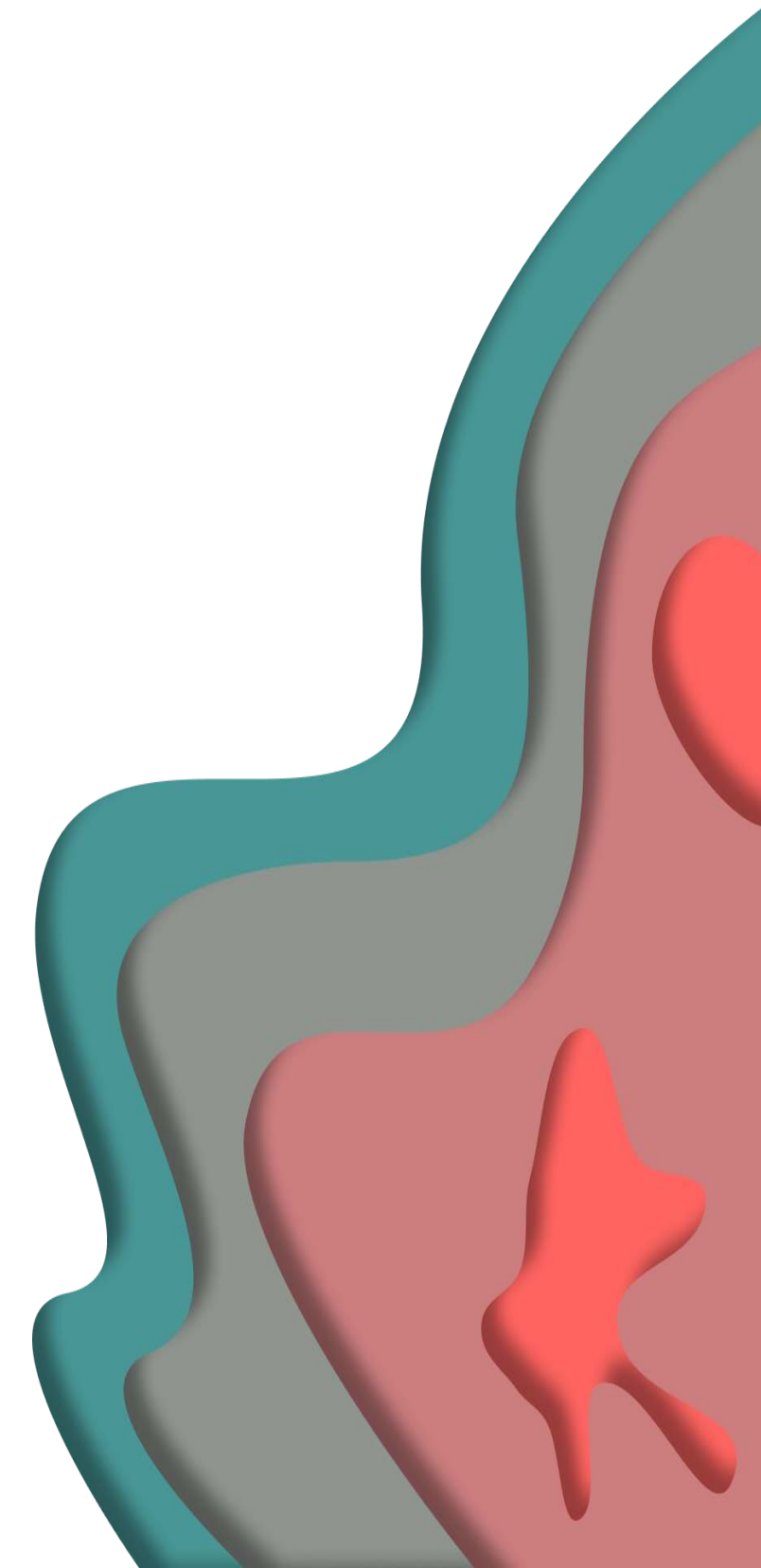
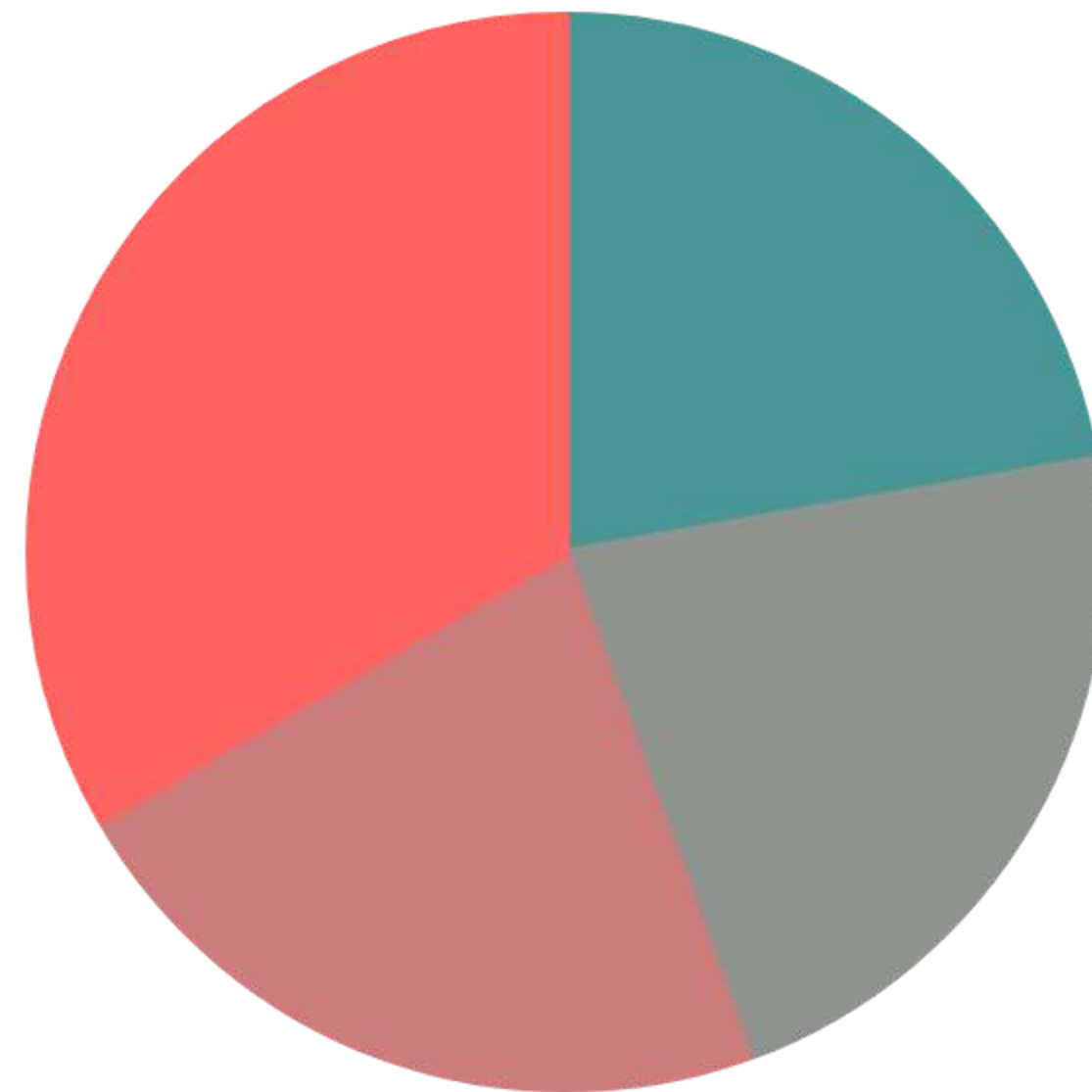
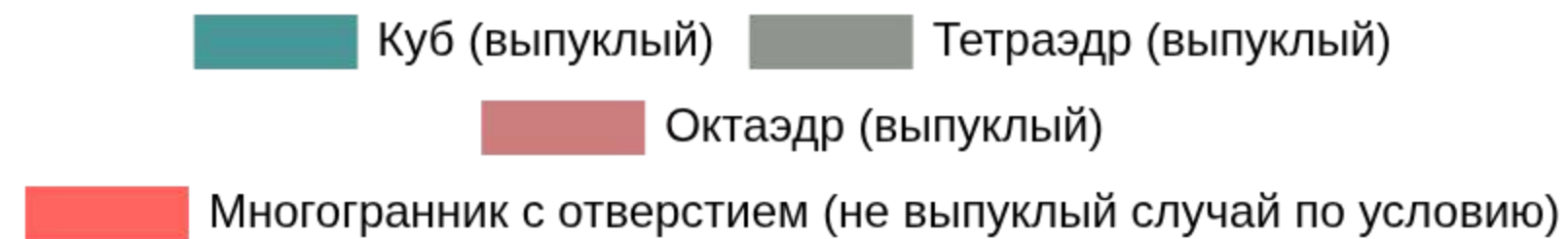


# Что происходит с формулой у разных фигур

Выпуклые многогранники дают один и тот же результат, а «особые» формы — другой.

Это показывает: теорема Эйлера применима не к любым пространственным телам, а только к нужным случаям.

*Иллюстративное сравнение: выпуклые многогранники — по теореме, пример с отверстием — для демонстрации отличия условий.*



# Какие многогранники чаще всего изучают в школе

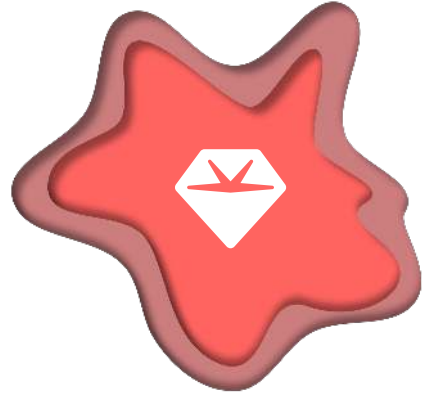
| Фигура                | Грани (F)             | Вершины (V) | Пример         |
|-----------------------|-----------------------|-------------|----------------|
| Куб                   | 6 квадратов           | 8           | кубики         |
| Квадратная призма     | 6 прямоугольников     | 8           | коробка        |
| Треугольная пирамида  | 4 треугольника        | 4           | шатёр          |
| Тетраэдр (правильный) | 4 равных треугольника | 4           | игрушка-модель |

Таблица помогает сопоставить самые распространённые фигуры: сколько у них граней, какие формы имеют эти грани, сколько вершин образуют каркас, и где такие формы встречаются.

Хотя формы граней различаются, все эти тела устроены по «каркасным» правилам: вершины и рёбра однозначно задают структуру. Поэтому для них удобно проверять вычисления по формуле Эйлера.

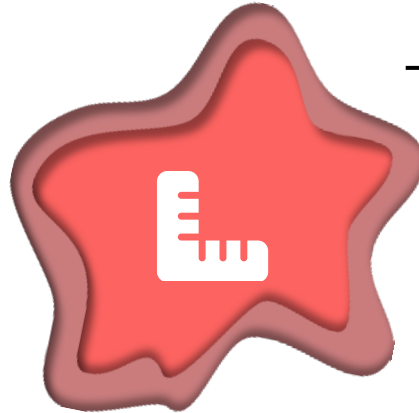
*Учебные школьные наборы и стандартные сведения о правильных и простых многогранниках.*

# Правильные многогранники



## Одинаковые грани

У правильных многогранников все грани имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Благодаря этому каркас выглядит симметрично, а подсчёт вершин и рёбер становится очень удобным при решении задач.



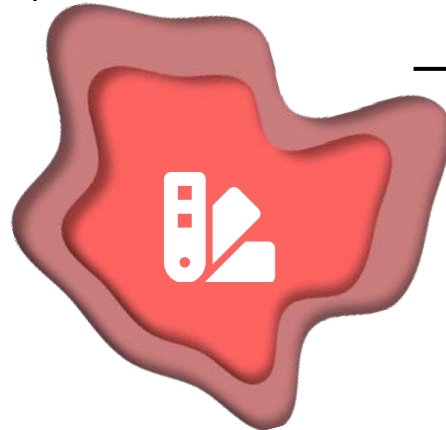
## Одинаковые рёбра

У каждого правильного многогранника все рёбра имеют одинаковую длину. Это означает, что геометрия «повторяется» вокруг каждой вершины, а фигура остаётся целостной и легко проверяемой по формулам.



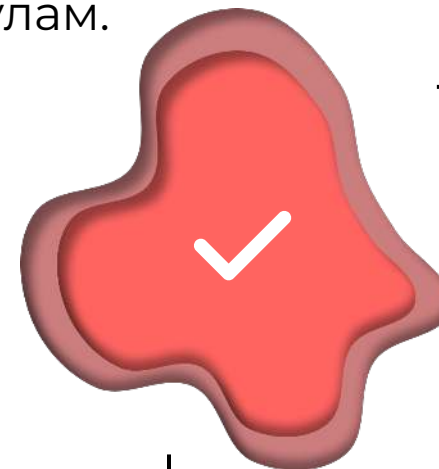
## Какие фигуры входят

К правильным многогранникам относят тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Это не просто примеры: существует только такой набор, который соответствует требованиям правильности и симметрии.



## Почему удобны на уроках

Поскольку строение одинаковое по всей поверхности, эти тела хорошо подходят для наглядных моделей. На практических работах проще считать элементы, сравнивать фигуры и тренировать проверку ответов.

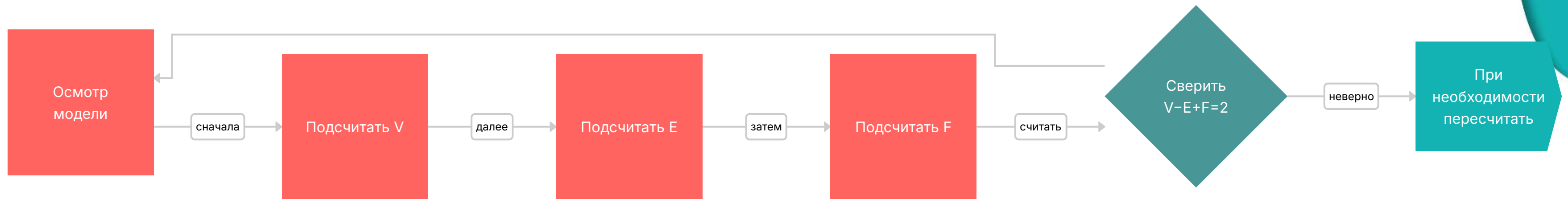


## Формула Эйлера работает

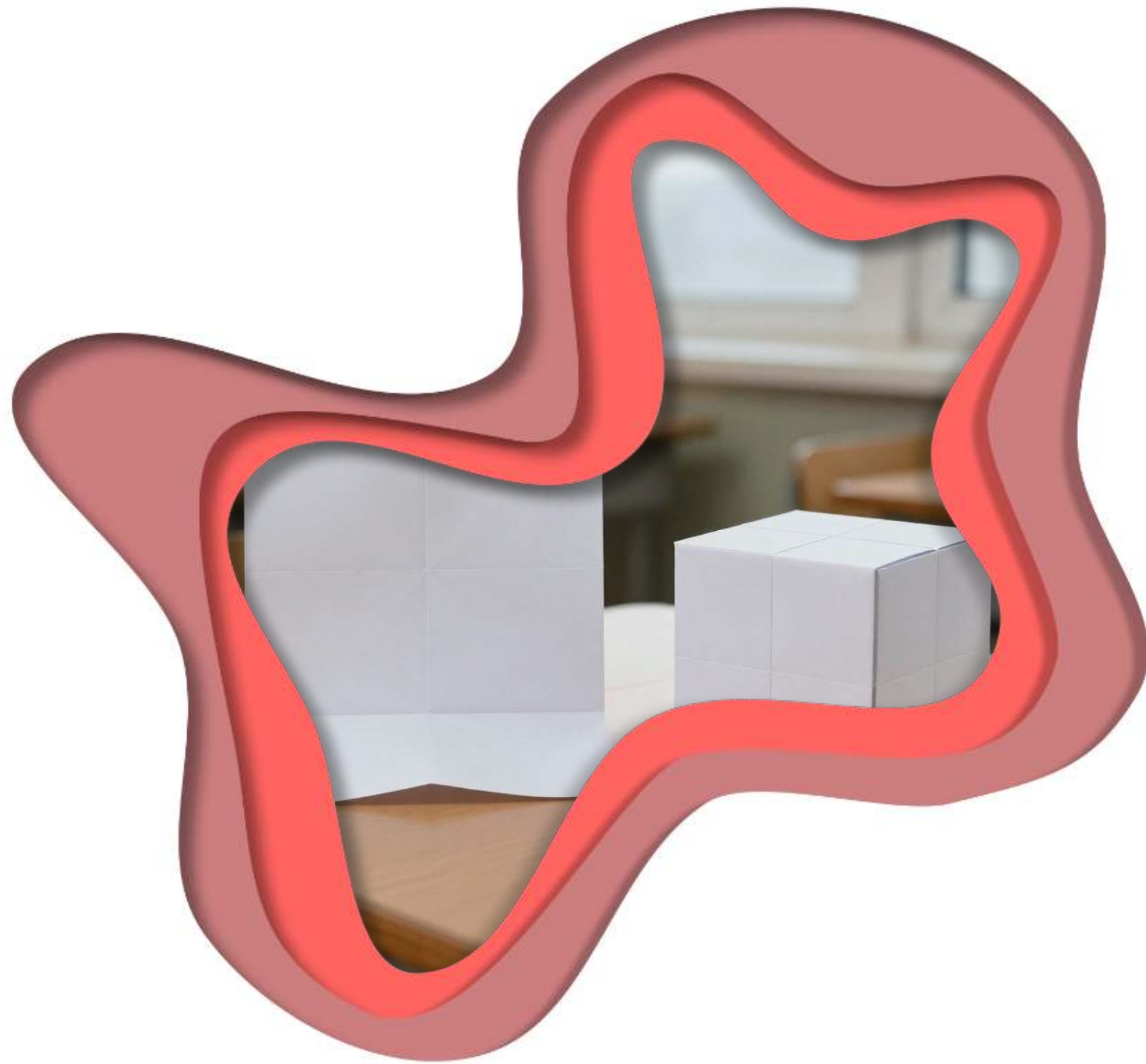
Для всех перечисленных правильных многогранников выполняется равенство  $V - E + F = 2$ . Поэтому после подсчёта вершин, рёбер и граней можно быстро проверить, не допущена ли ошибка.

# Проверяем элементы многогранника по шагам

Схема помогает избежать ошибок при подсчёте  $V$ ,  $E$  и  $F$  для выпуклых многогранников.



# Модель из бумаги как проверка формулы



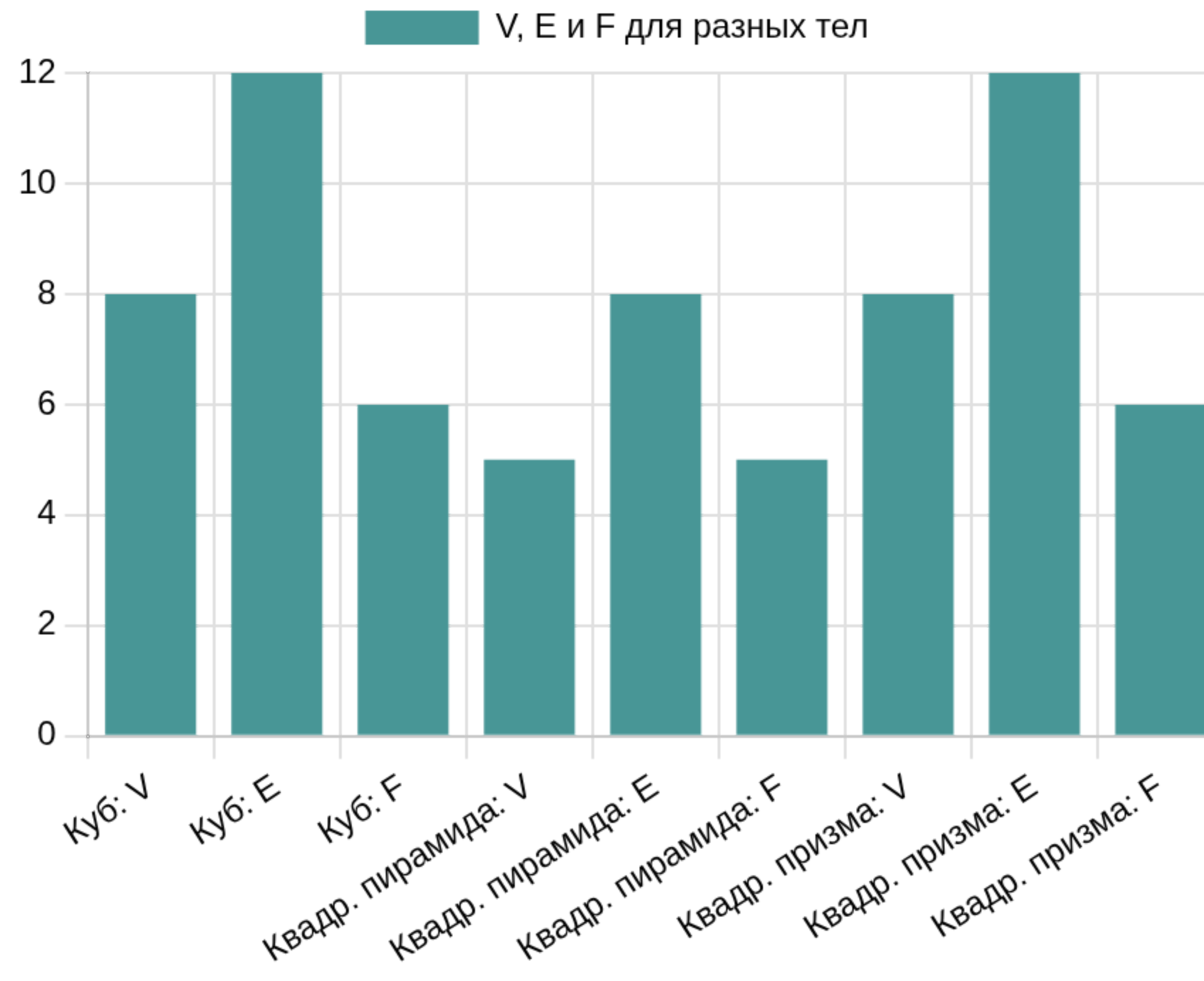
- Развёртка куба состоит из 6 одинаковых квадратов. Сначала ученики собирают бумажную конструкцию и видят, как из плоских частей рождаются вершины, рёбра и грани, когда куб «закрывается».
- После сборки обычно получают 8 вершин, 12 рёбер и 6 граней. Такая модель делает связь между чертежом и объёмной фигурой наглядной и позволяет проверить равенство  $V - E + F = 2$  на практике.

# Сравнение простых тел по числу элементов

У каждой фигуры количество рёбер и граней меняется, но разность  $V - E + F$  остаётся постоянной для выпуклых многогранников без «отверстий».

Разные тела дают разные наборы  $(V, E, F)$ , однако общий закон в итоге «собирает» их в одно значение. Значит, формула полезна не только для вычислений, но и для проверки.

*Справочные значения для куба, квадратной пирамиды и квадратной призмы (школьная геометрия).*



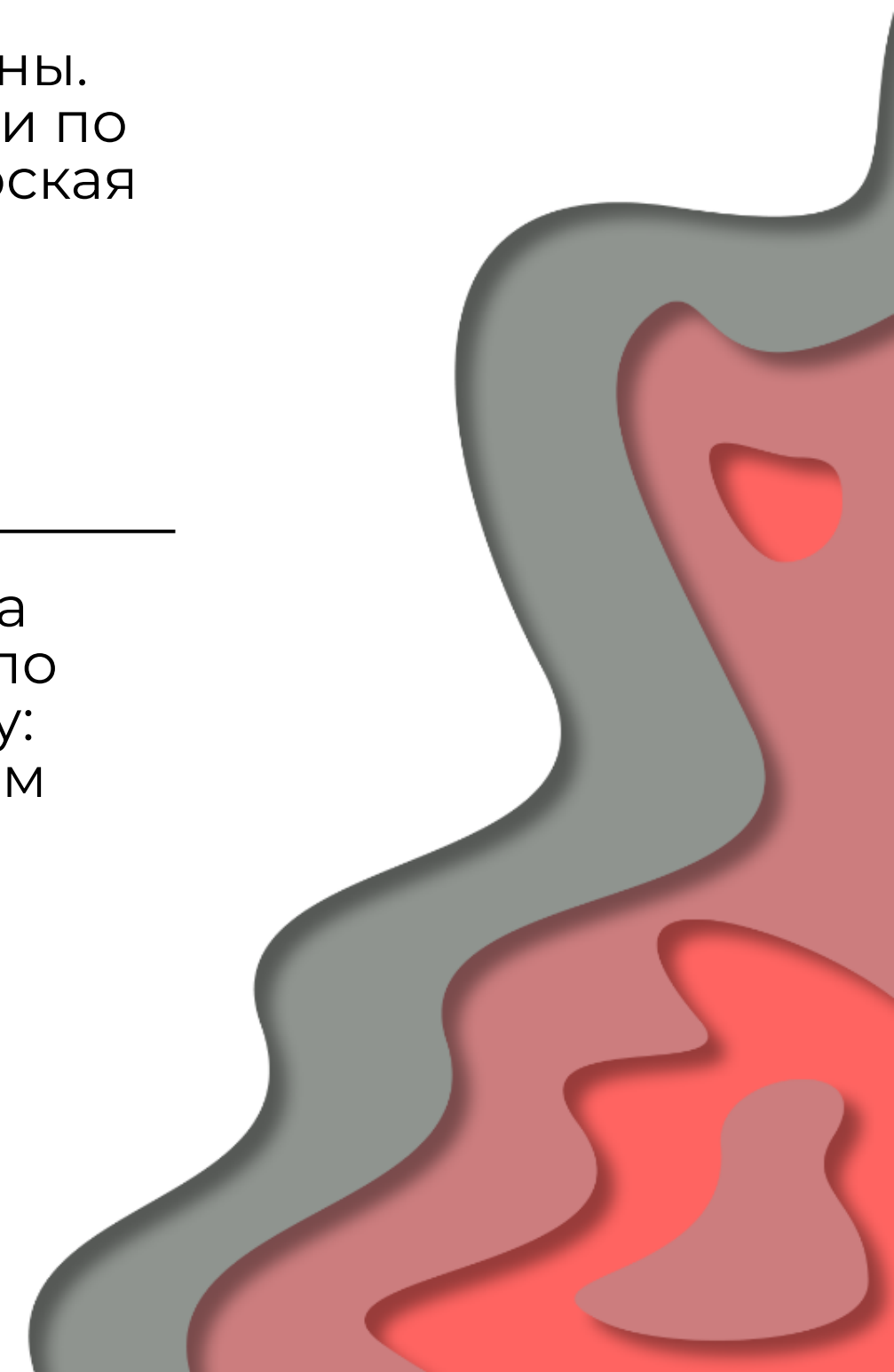
# Типичные ошибки при работе с формулой

Самая частая ошибка — неправильный подсчёт рёбер: часть рёбер считают дважды, потому что они видны с разных сторон. Чтобы избежать этого, ребро фиксируют по двум вершинам.

Встречается и пропуск грани: например, при просмотре модели учитывают только «видимые» стороны. Лучше обойти фигуру мысленно или по макету и проверить, что каждая плоская часть учтена.

Ещё одна проблема — применение формулы к невыпуклой фигуре или телу с «дыркой». Теорема Эйлера в школьной формулировке гарантирует  $V - E + F = 2$  только для выпуклых многогранников без отверстий.

Иногда путают вершины с углами на рисунке. Полезно сверять подсчёт по развёртке или аккуратному чертежу: вершина должна совпадать с местом пересечения рёбер, а не просто с точкой на контуре.



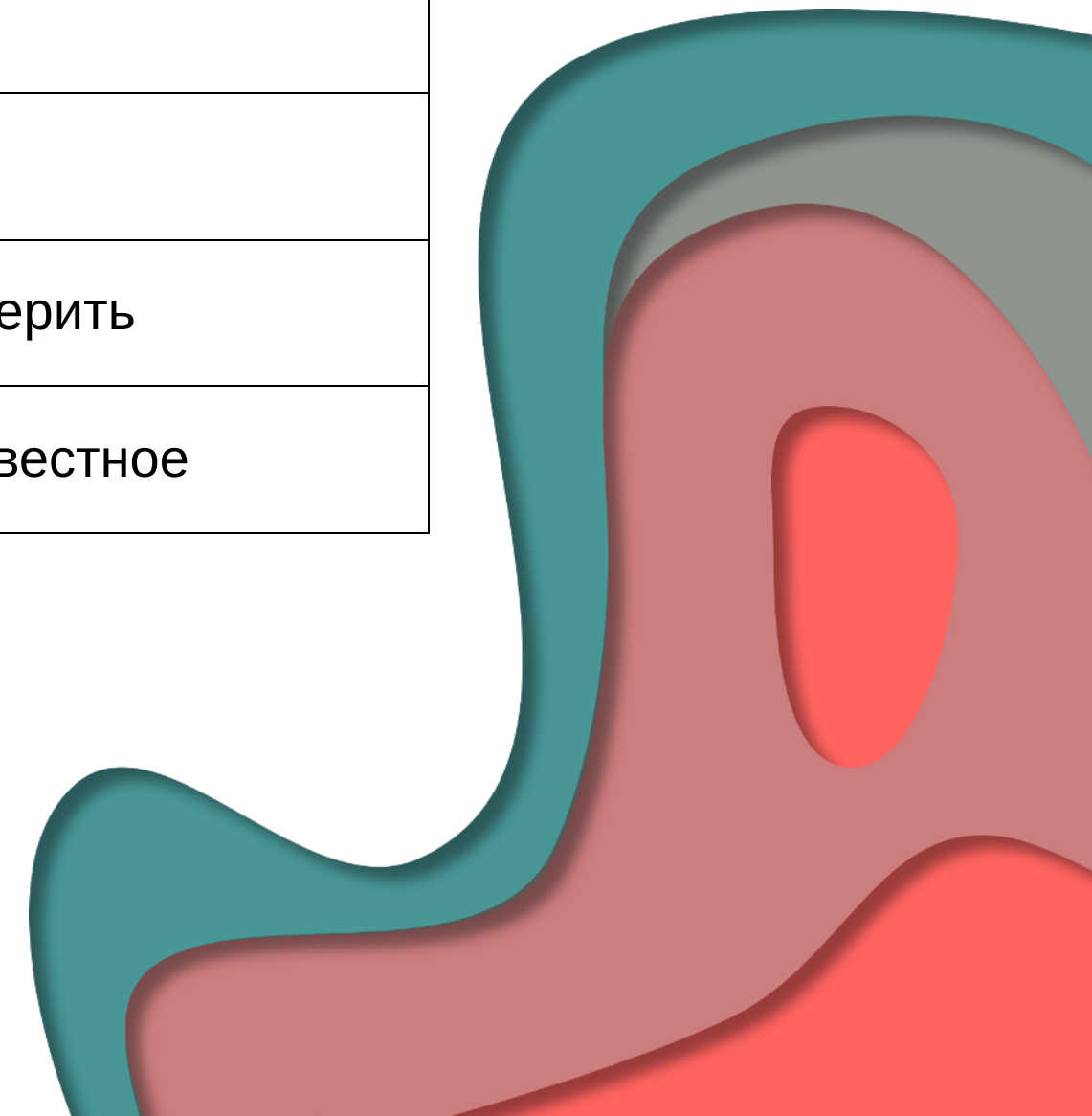
# Тренировочные задания по теореме Эйлера

Короткие задачи на подстановку в  $V - E + F = 2$ . После вычисления стоит мысленно сверить результат с рисунком или моделью.

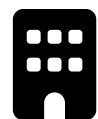
Во всех вариантах используется одна и та же логика: сначала выписывают известные  $V$ ,  $E$  и  $F$ , затем выражают неизвестную величину из равенства  $V - E + F = 2$  и проверяют.

*Учебные задания по теореме Эйлера ( типовые практикумы).*

| Задание | Дано           | Найти       |
|---------|----------------|-------------|
| 1       | $V=8, E=12$    | $F$         |
| 2       | $V=6, F=8$     | $E$         |
| 3       | куб            | проверить   |
| 4       | простая призма | неизвестное |



# Где используется идея многогранников



## Архитектура

В архитектуре многогранные формы встречаются в конструкциях фасадов и павильонов. Понимание вершин, рёбер и граней помогает правильно проектировать каркас и контролировать геометрию деталей.



## Упаковка и детали

Коробки, упаковочные элементы и контейнеры часто имеют форму призм или пирамид. Когда известны элементы фигуры, проще планировать развертки, разрезы и количество необходимых материалов.



## Чертёж и моделирование

На уроках черчения многогранники строят по проекциям и развёрткам. Это тренирует переход от плоского изображения к объёмной форме, а формула помогает проверять правильность подсчётов.



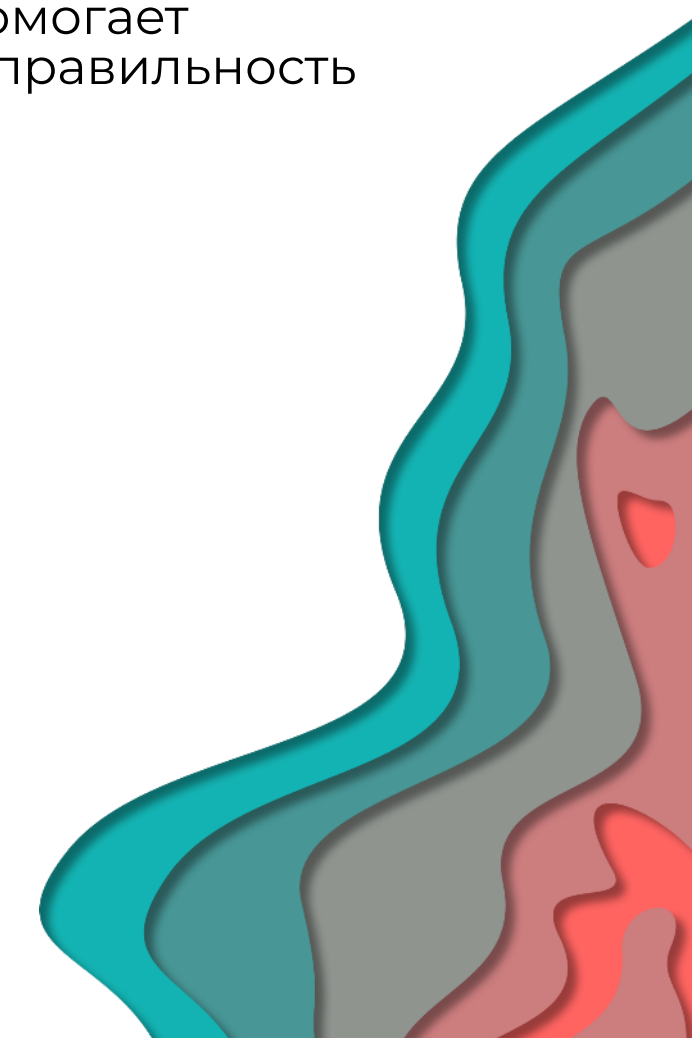
## Учебные макеты

Игровые кубики и учебные модели часто являются каркасами многогранников. По ним легко объяснять, как рёбра соединяют вершины, а грани образуют поверхность тела без «потерь» и пропусков.



## Компьютерная графика

В 3D-графике и моделировании многогранники описывают через списки вершин и связей. Теорема Эйлера служит ориентиром: при корректной структуре элементов получается согласованный счёт.



# Почему эта формула важна в геометрии

## Связь формы и счёта

Формула Эйлера связывает «видимую» часть многогранника — поверхность — с тем, как мы пересчитываем её элементы: вершины, рёбра и грани. Поэтому она превращает геометрию в понятный счёт.

---

## Шаг к более сложным идеям

Равенство  $V - E + F = 2$  стало отправной точкой для дальнейших направлений, где важны не только размеры, но и способ соединения частей. В топологии анализируют ситуации, похожие на «фигуры с отверстиями», где ответ меняется.



# Главный вывод урока

Для любого выпуклого многогранника без отверстий выполняется равенство  $V - E + F = 2$ . Теорема Эйлера помогает считать элементы фигуры, проверять ответы и глубже понимать строение пространственных тел.

