

Системы линейных уравнений с двумя переменными

Научимся находить две неизвестные по двум условиям.



Почему это важно



Такие системы помогают находить цену, количество, возраст и другие величины, если известно сразу два условия. Их удобно понимать через прямые на координатной плоскости: решение видно в точке пересечения линий.

Линейное уравнение с двумя переменными



Общий вид

Линейное уравнение с двумя переменными записывают в виде $ax + by = c$, где x и y — неизвестные, а a , b , c — числа.



Примеры записей

Подходящими примерами являются $2x + y = 7$, $x - 3y = 4$ и $5x + 2y = 16$. Все они содержат две переменные и числа.



Только первая степень

В таком уравнении переменные не возводятся в квадрат и не входят в сложные выражения. Именно это делает его линейным и удобным для построения прямой.



Множество решений

Каждому уравнению соответствует целый набор пар чисел. Все эти пары делают равенство верным, если подставить x и y вместо переменных.

Что называют системой двух линейных уравнений

I

Два условия

Система состоит из двух линейных уравнений с одними и теми же переменными. Оба уравнения должны выполняться одновременно, поэтому они рассматриваются вместе.

2

Что считается решением

Решением системы называют пару чисел $(x; y)$, которая подходит сразу для обоих уравнений. Такая пара называется общей для всей системы.

3

Что не подходит

Если пара чисел верна только для одного уравнения, но не для другого, она не является решением системы. Проверять нужно оба условия.

4

Порядок записи

При записи ответа сначала указывают значение x , затем значение y . Порядок важен, потому что перестановка чисел может изменить смысл ответа.

Графический смысл системы

Каждое уравнение — прямая

На координатной плоскости каждое линейное уравнение с двумя переменными изображается прямой линией. Поэтому систему удобно рассматривать как встречу двух прямых.

Одна точка пересечения

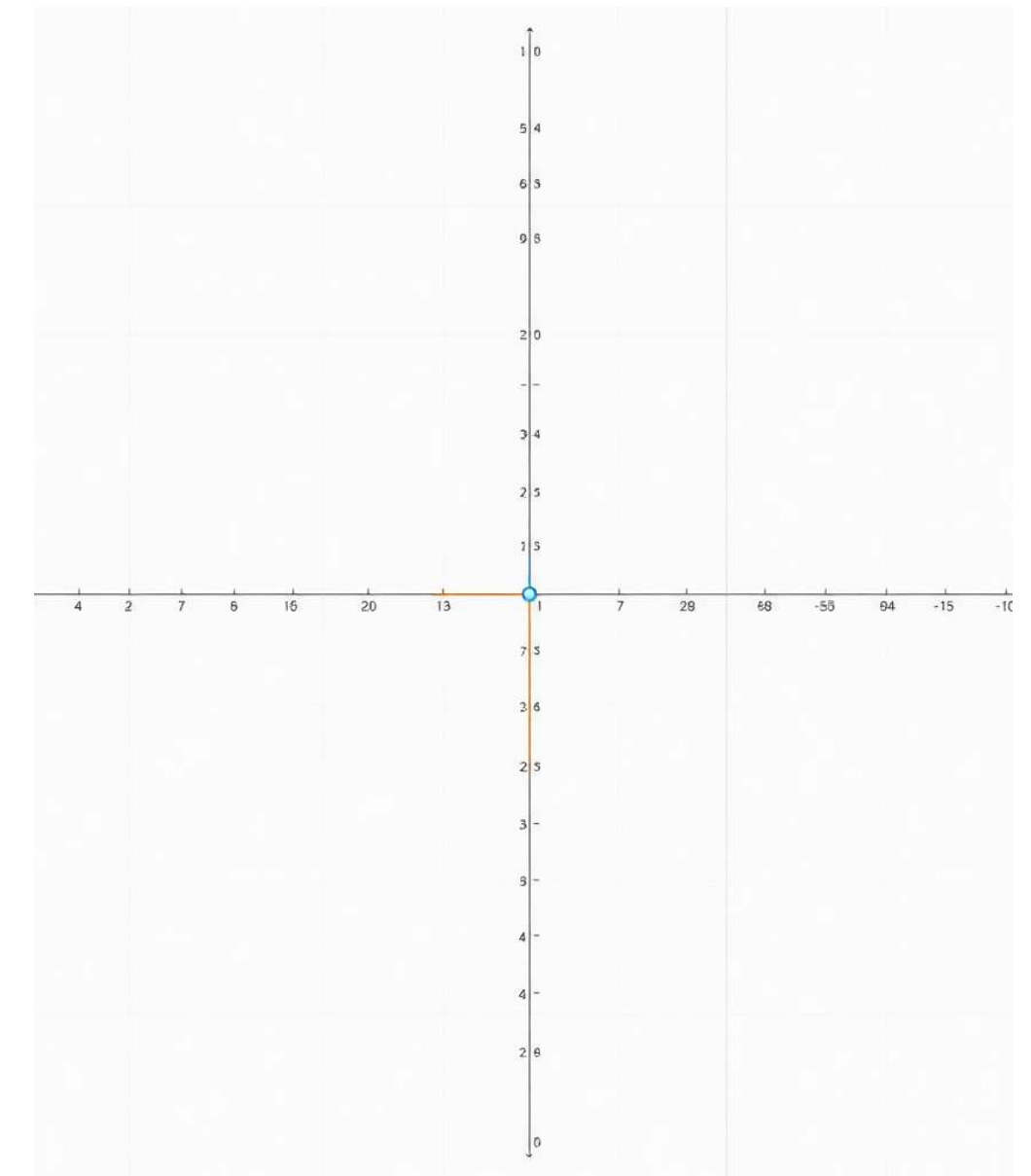
Если прямые пересекаются, общая точка только одна. Ей соответствует единственная пара чисел, которая подходит обоим уравнениям, значит решение одно.

Параллельные прямые

Если прямые параллельны, они никогда не встречаются. Тогда у системы нет общих точек, а значит, решений нет вовсе.

Совпадающие прямые

Если две прямые совпадают, каждая их точка общая. В этом случае система имеет бесконечно много решений, потому что подходит любая точка линии.



Три возможных результата системы

Одинаковые доли на диаграмме показывают три равноправных случая, которые нужно уметь различать по виду уравнений и графику.

Число решений зависит от взаимного положения прямых: пересечение, параллельность или совпадение.

Учебный материал по теме «Системы линейных уравнений с двумя переменными»

Способ подстановки

1

Выразить переменную

Сначала в одном из уравнений выражают одну переменную через другую. Это удобно, если коэффициент равен 1 или -1 , либо выражение уже почти готово.

2

Подставить во второе

Полученное выражение заменяют во втором уравнении. Так система превращается в одно уравнение с одной переменной, которое уже легче решить.

3

Найти первую величину

После решения нового уравнения находят значение одной переменной. Этот шаг завершает основную часть вычислений и приближает к ответу.

4

Вычислить и проверить

Затем подставляют найденное число обратно и вычисляют вторую переменную. В конце обязательно проверяют пару чисел в обоих исходных уравнениях.

Способ сложения (исключения)

I

Подготовить уравнения

Сначала смотрят, можно ли быстро сделать коэффициенты при одной переменной одинаковыми или противоположными. Для этого иногда нужно умножить одно или оба уравнения.

2

Убрать переменную

После подготовки уравнения складывают или вычитают. Одна из переменных исчезает, и система превращается в более простое уравнение с одной неизвестной.

3

Найти вторую величину

Когда значение одной переменной найдено, его подставляют в любое исходное уравнение. Так получают вторую неизвестную и составляют ответ.

4

Сделать проверку

Последний шаг — подставить пару чисел в оба уравнения. Проверка особенно полезна, потому что помогает заметить ошибку в знаках или вычислениях.

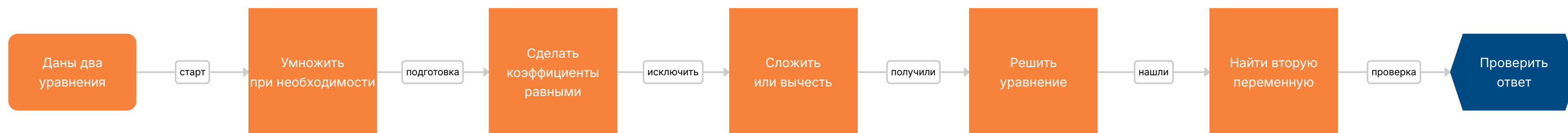
Подстановка: шаг за шагом

Алгоритм решения системы способом подстановки



Сложение: шаг за шагом

Алгоритм решения системы способом сложения



Сравнение способов решения системы

Способ	Когда удобен	Плюсы	Трудности
Подстановка	Одна переменная выражена	Понятный ход	Могут быть дроби
Сложение	Коэффициенты легко уравнивать	Быстрое решение	Нужно следить за знаками
Графический	Нужно увидеть смысл	Наглядность	Не всегда точный ответ

Три основных способа помогают решать одну и ту же систему, но выбираются по-разному в зависимости от записи уравнений и удобства вычислений.

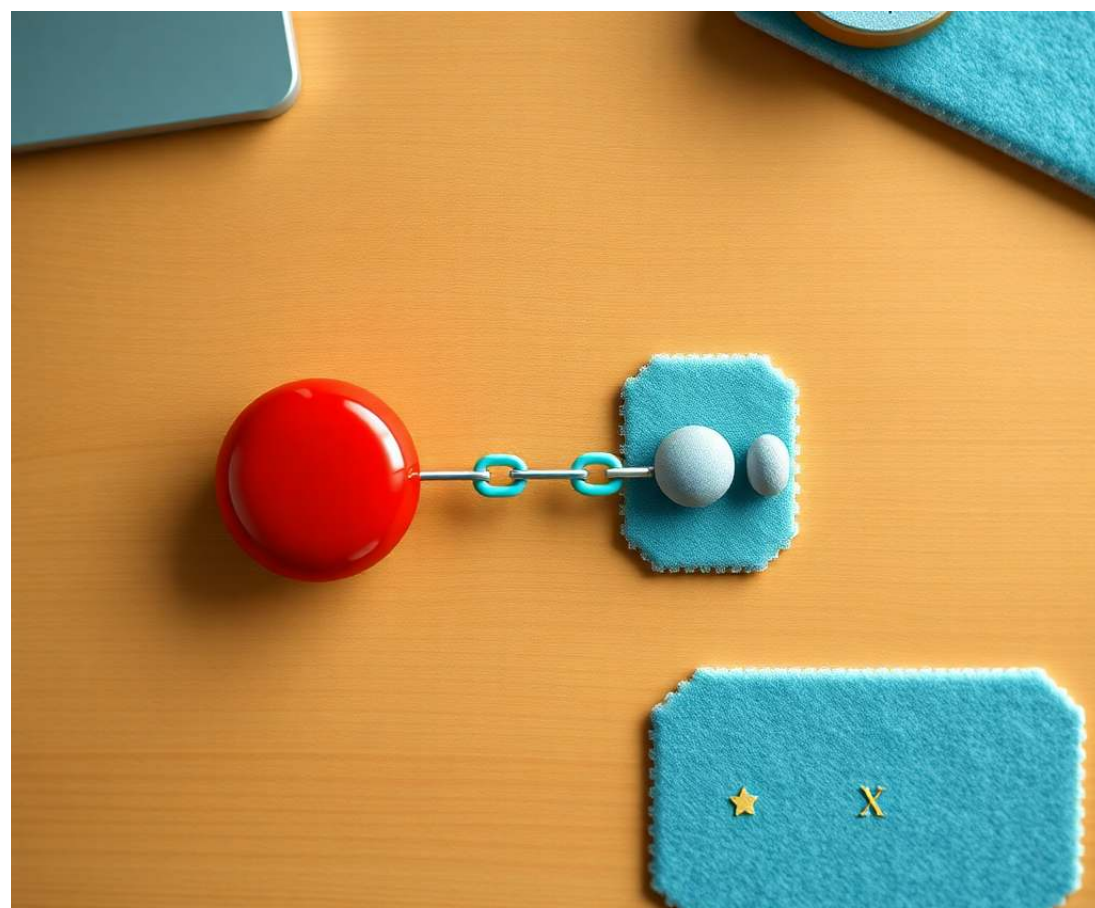
Способ решения выбирают по виду уравнений: подстановка удобна при готовом выражении, сложение — при похожих коэффициентах, график — для наглядности.

Материал урока по теме «Системы линейных уравнений с двумя переменными»

Пример решения подстановкой

Шаг 1. Выбираем удобное уравнение

Сначала берём запись $y = 2x + 1$, потому что здесь y уже выражена через x . Это позволяет сразу перейти к подстановке и не тратить время на лишние преобразования.



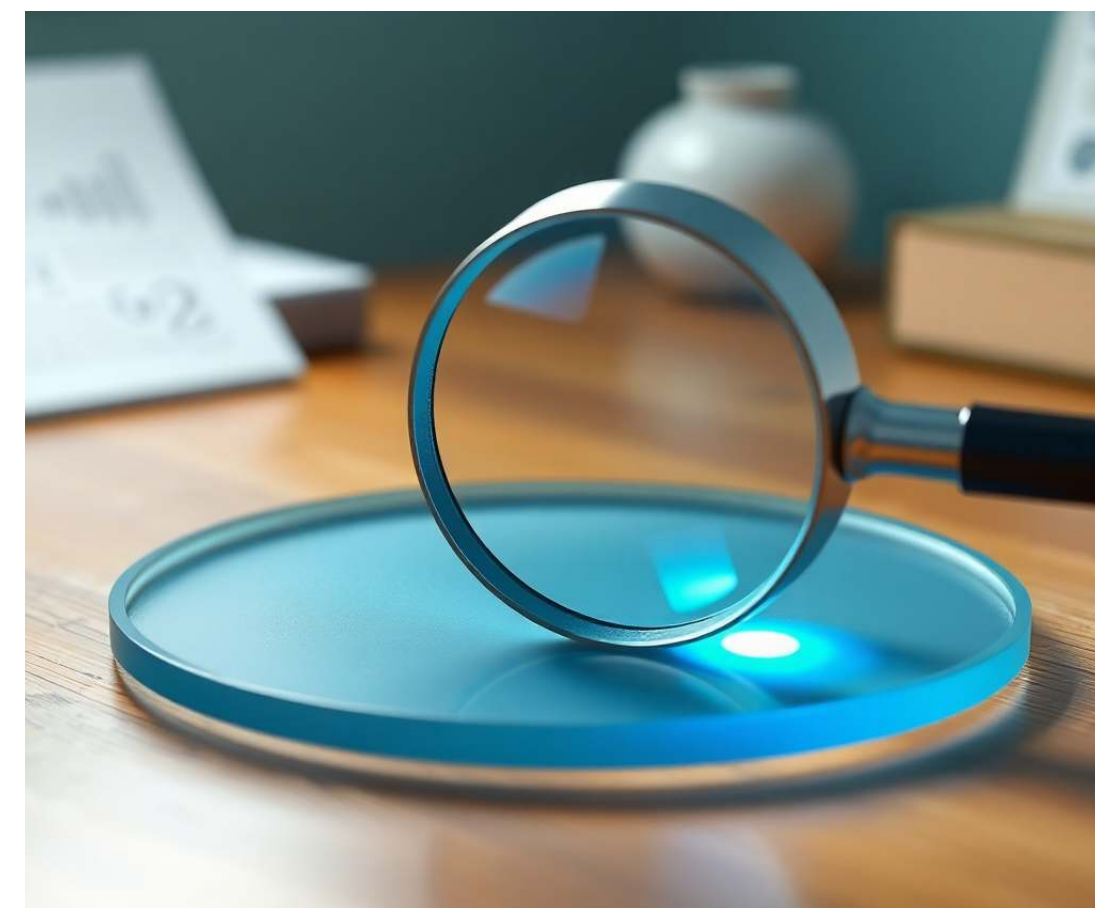
Шаг 2. Находим x

Подставляем выражение во второе уравнение: $x + (2x + 1) = 10$. После упрощения получаем $3x = 9$, значит $x = 3$. На листе это можно показать короткой цепочкой равенств.



Шаг 3. Проверяем ответ

Теперь находим y : $y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Пара $(3; 7)$ подходит обоим уравнениям, поэтому ответ верен. На иллюстрации удобно выделить итог и проверку цветом.



Пример решения сложением

I

Складываем уравнения

Записываем систему $2x + y = 11$ и $2x - y = 3$. При сложении y исчезает, и остаётся $4x = 14$, что сразу упрощает поиск неизвестной.

2

Находим x

Делим 14 на 4 и получаем $x = 3,5$. Здесь удобно заметить, что одинаковые коэффициенты при x помогли быстро перейти к одному уравнению.

3

Подставляем значение

Теперь подставляем $x = 3,5$ в первое уравнение: $2 \cdot 3,5 + y = 11$. Получаем $7 + y = 11$, значит $y = 4$.

4

Записываем ответ

Итоговая пара чисел — $(3,5; 4)$. Этот пример показывает, как противоположные коэффициенты при y делают способ сложения особенно удобным и быстрым.



Как связаны число решений и расположение прямых

Геометрический рисунок сразу показывает, есть ли у системы общая точка, и помогает понять смысл решения без длинных вычислений.

Чем ближе линии к совпадению или пересечению, тем яснее число решений: одна точка, ни одной или бесконечно много.

Схема по теме урока; дата не требуется

Признаки числа решений по коэффициентам

Сравнение коэффициентов помогает определить число решений системы ещё до построения графика или подробных вычислений.

Отношения коэффициентов позволяют заранее узнать взаимное положение прямых и число общих точек.

Алгебра, тема «Системы линейных уравнений с двумя переменными»

Условие	Сравнение	Результат	Смысл
1	$a_1/a_2 \neq b_1/b_2$	Одно	Прямые пересекаются
2	$a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$	Нет решений	Прямые параллельны
3	$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$	Бесконечно много	Прямые совпадают

Типичные ошибки при решении систем



Ошибки со знаками

При переносе слагаемых легко изменить знак неправильно. Из-за этого все дальнейшие вычисления становятся неверными, поэтому каждый переход стоит проверять отдельно.



Неверное умножение

Если нужно уравнивать коэффициенты, иногда умножают только один член или путают число множителей. Важно умножать всё уравнение целиком, без пропусков.



Путаница в координатах

Ответ записывают как $(x; y)$, а не наоборот. Если перепутать порядок, даже верно найденная пара будет оформлена как неправильный ответ.



Нет проверки

После нахождения пары чисел нужно подставить её в оба уравнения. Проверка быстро показывает ошибку и помогает не допустить неверной итоговой записи.

Задача из реальной ситуации

Покупка в магазине

В магазине 2 тетради и 1 ручка стоят 70 рублей. Если обозначить цену тетради через x , а цену ручки через y , получается первое уравнение системы. Такая запись переводит обычную покупку на язык математики.



Как узнать цены

Во втором условии сказано, что 1 тетрадь и 2 ручки стоят 50 рублей. Вместе с первым условием это позволяет найти обе цены сразу. Решение показывает, сколько стоит каждый предмет без догадок и проб.



Где встречаются системы линейных уравнений

Одна и та же идея помогает решать задачи о цене, расстоянии, возрасте и количестве предметов, если неизвестных ровно две.

Системы особенно часто появляются в задачах про покупки и движение, но подходят и для других жизненных сюжетов.

Обобщение по учебным примерам; дата не требуется

Проверка ответа и запись решения

I

Правильная запись

Ответ записывают парой чисел в скобках: $(x; y)$. Важно соблюдать порядок координат, потому что сначала указывают значение первой переменной, затем второй.

2

Подстановка в уравнения

После нахождения пары её подставляют в оба исходных уравнения. Если в каждом случае получается верное равенство, решение можно считать подтверждённым.

3

Внимание к ошибкам

Если хотя бы одно уравнение не выполняется, значит, где-то допущена ошибка. Тогда нужно пересмотреть вычисления, а не сразу записывать окончательный ответ.

4

Зачем нужна проверка

Проверка помогает заметить неверные знаки, деление с остатком, перепутанные координаты и другие неточности. Это обязательный шаг, который защищает от случайной ошибки.

Что важно запомнить

Системы линейных уравнений помогают найти две неизвестные по двум условиям. Подстановка, сложение и графический способ дают разные пути к ответу, а число решений зависит от расположения прямых.