

Тригонометрические функции углового аргумента



Синус, косинус, тангенс и котангенс задаются углом и описываются через единичную окружность.

Почему тригонометрия нужна именно в 10 классе

01

В 10 классе тригонометрия связывает угол с координатами точки и длиной дуги. Радианы делают формулы компактными, а периодичность удобной для графиков и дальнейших тем. Истоки — измерения в астрономии и навигации, сегодня же это язык колебаний и вращений.

Единичная окружность: что именно «читаем» по углу



Угол на окружности

Берём единичную окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Луч, образующий угол φ с осью Ox , задаёт положение точки и тем самым «включает» тригонометрию.



Координаты точки

Для угла φ точка на окружности имеет координаты $(\cos \varphi; \sin \varphi)$. Это означает: абсцисса — косинус, ордината — синус, и оба значения читаются прямо по графику.



Синус как ордината

Синус равен ординате точки на единичной окружности. Поэтому его знак зависит от того, выше или ниже оси Ox расположен луч, образующий угол φ .



Тангенс как отношение

Тангенс определяется как $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$. Он использует ту же информацию о точке, но превращает её в «наклон», и потому не везде существует.



Котангенс как обратное отношение

Котангенс задаётся через $\operatorname{ctg} \varphi = \cos \varphi / \sin \varphi$. Его знак определяется положением точки относительно осей, а главное — он тоже требует ненулевого знаменателя.

Значения тригонометрических функций для основных углов

Для углов 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ и $\pi/2$ значения $\sin$, $\cos$, tg , ctg берутся с единичной окружности. Невозможные значения отмечены как «не определён».

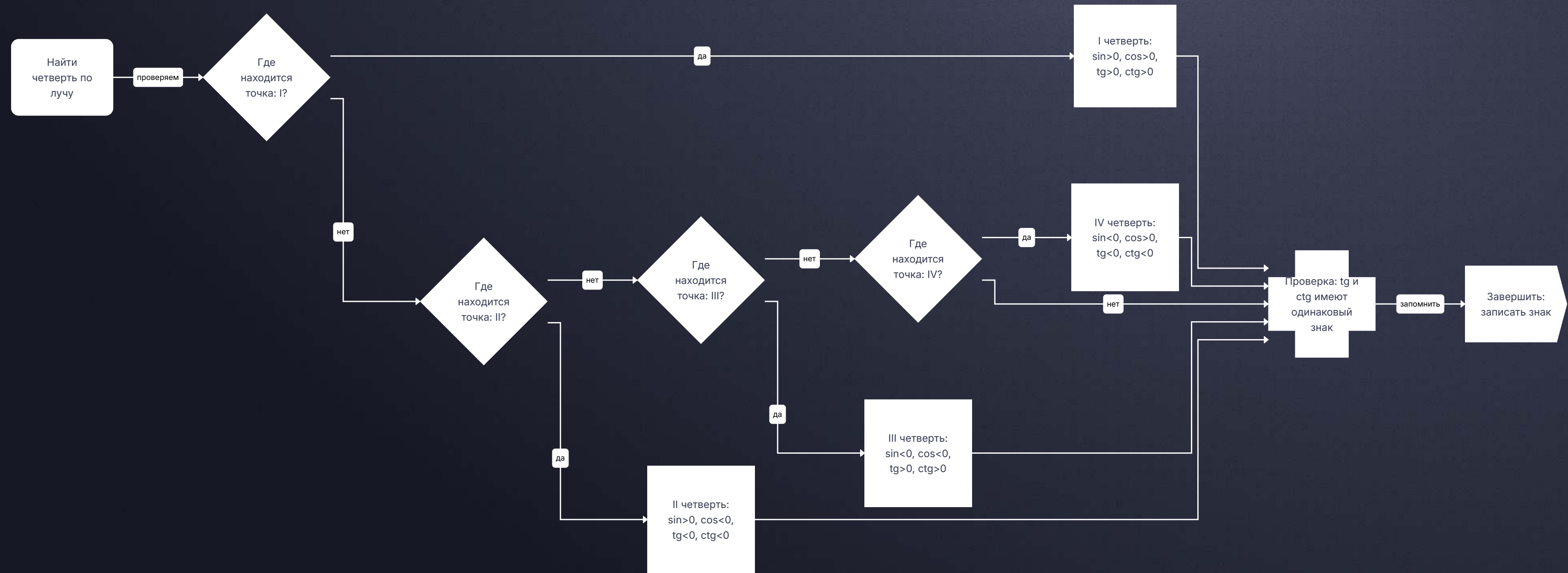
Точки при «красивых» углах дают точные значения; главное различие — где tg и ctg становятся не определены из-за нулевого знаменателя.

Угол	$\sin$; $\cos$; tg ; ctg
0	0; 1; 0; не требуется
$\pi/6$	$1/2$; $\sqrt{3}/2$; $1/\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$; $\sqrt{2}/2$; 1; 1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$; $1/2$; $\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	1; 0; не определён; 0

Стандартная таблица значений единичной окружности.

Как определить знак функции по четверти

Знак берётся из координат точки на единичной окружности и из отношений $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$, $\operatorname{ctg} \varphi = \cos \varphi / \sin \varphi$.



Периодичность и чётность: зачем это нужно

01

После полного оборота на единичной окружности значения $\sin x$ и $\cos x$ повторяются, поэтому их период равен 2π . Это помогает быстро восстанавливать значения без полного перерисовывания графика.

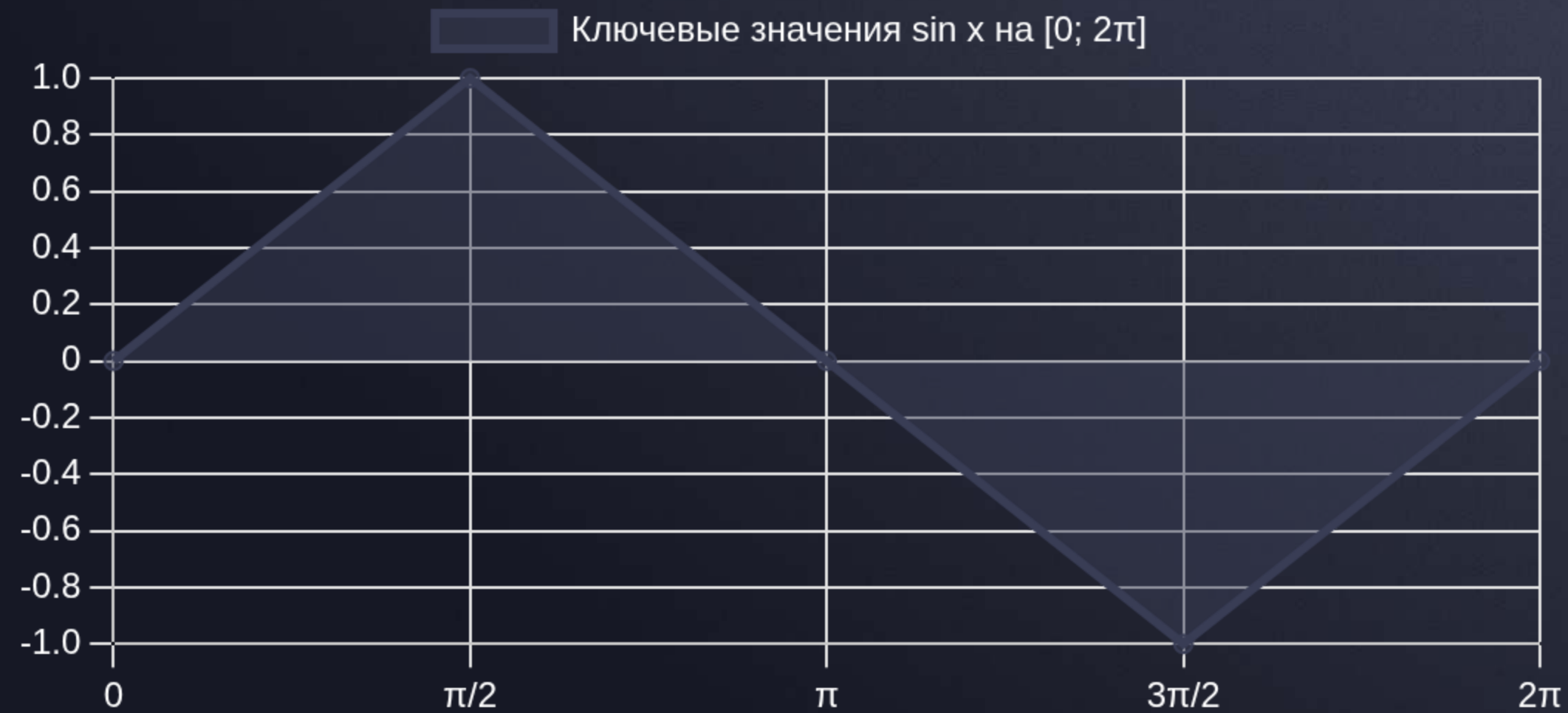
02

Для $\tan x$ и $\cot x$ период меньше: поворот на π возвращает «наклон» к исходному, так как отношения $\sin$ и $\cos$ сохраняются. Практически это ускоряет поиск значений и характерных точек.

03

Свойства симметрии дают экономию вычислений: $\sin(-x) = -\sin x$ (нечётная), $\cos(-x) = \cos x$ (чётная). Тангенс и котангенс тоже нечётные, поэтому знаки при замене аргумента меняются.

Графики синуса и косинуса на одном периоде

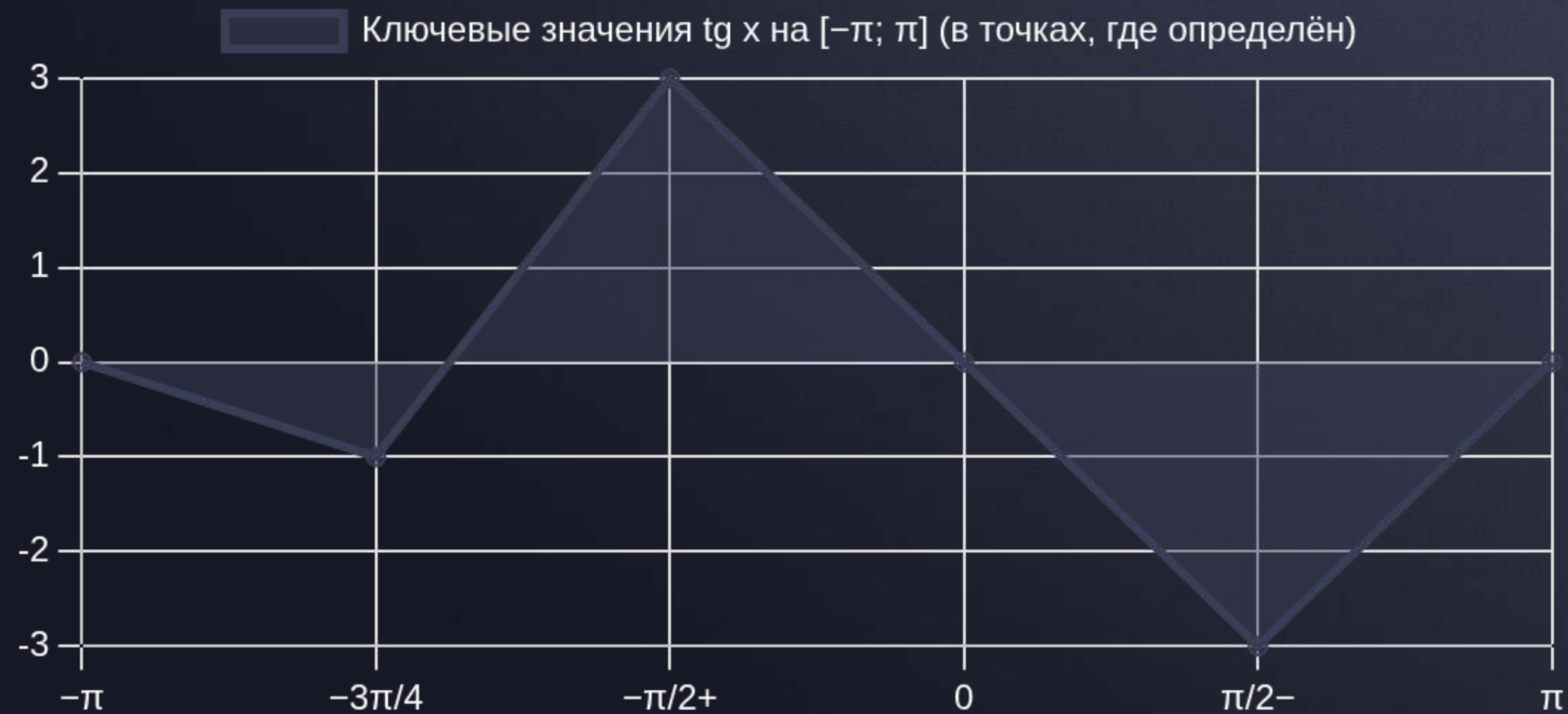


У $\cos x$ нули в точках $\pi/2$ и $3\pi/2$, а форма сдвинута относительно $\sin x$ на $\pi/2$, поэтому кривые повторяют друг друга по волне.

Совпадение форм и фазовый сдвиг объясняют, почему достаточно одной «волны»: остальные точки находятся по сдвигу на $\pi/2$.

Построение по значениям единичной окружности (стандартные соотношения $\sin$ и $\cos$).

График тангенса и его вертикальные асимптоты



Вертикальные асимптоты при $x = -\pi/2$ и $x = \pi/2$ означают, что $\operatorname{tg} x$ «уходит» к бесконечности, когда $\cos x$ стремится к нулю.

Непрерывность нарушается в точках, где меняется знаменатель; поэтому в графике появляются разрывы и чередуются возрастающие ветви.

Карта поведения $\operatorname{tg} x$ следует из $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ и свойств единичной окружности (конспектные построения).

Область определения и область значений

01

Синус и косинус определены при любом действительном аргументе: любая точка единичной окружности соответствует некоторому углу. Поэтому их область определения — $\mathbb{R}$, без исключений.

02

Так как координаты на окружности по модулю не превышают 1, то $\sin x$ и $\cos x$ принимают только значения из отрезка $[-1; 1]$. Это ограничение напрямую видно по геометрическому смыслу координат.

03

Тангенс не определён там, где $\cos x = 0$, то есть при $x = \pi/2 + \pi k$. Котангенс не определён, когда $\sin x = 0$, то есть при $x = \pi k$; в знаменателе появляется ноль.

04

Диапазон $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — все действительные числа: между вертикальными асимптотами график проходит от $-\infty$ до $+\infty$. Эти различия критичны при решении уравнений и анализе графиков.

Формулы приведения для углов вида $\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$

Симметрия относительно осей для $\pi - \alpha$

Формулы приведения опираются на симметрии единичной окружности относительно осей и начала координат. Например, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Переход через полный оборот для $2\pi - \alpha$

Для углов $2\pi - \alpha$ значения повторяются с учётом знака, потому что полный оборот возвращает точку в исходную позицию по окружности. Поэтому нужные значения часто выводятся из уже знакомых для α .



Основные тригонометрические тождества

01

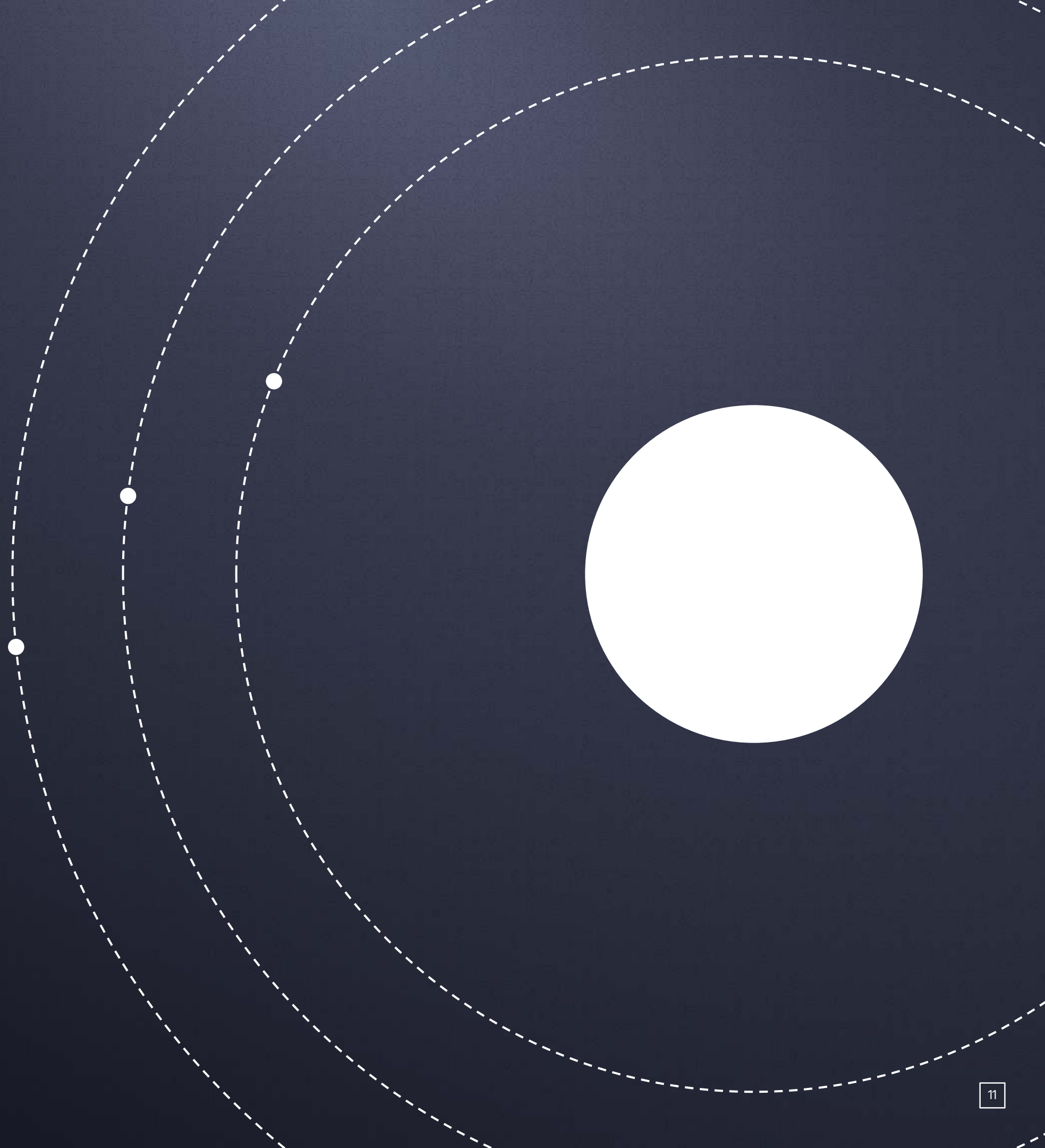
На единичной окружности действует базовое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Оно связывает синус и косинус и позволяет проверять вычисления: если равенство нарушено, значит где-то допущена ошибка.

02

Из тождества получаются полезные формы для тангенса и котангенса: $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 x = 1/\sin^2 x$. Эти равенства особенно удобны, когда выражения содержат дроби и степени.

03

Определения через отношения: $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ и $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$. Их применяют в преобразованиях, чтобы заменить тангенс на синус и косинус, сократить дроби и быстрее упростить выражение.



Градусы и радианы: два способа измерения угла

Градусы: полный оборот

В градусной мере полный оборот равен 360° , пол-оборота — 180° , четверть — 90° . Удобно для наглядности, но в формулах тригонометрии часто появляются лишние множители.

Радианы: полный оборот

В радианах полный оборот равен 2π , пол-оборота — π , четверть — $\pi/2$. Радианная мера естественнее связывается с длиной дуги на окружности.

Связь мер угла

Связь между мерами записывается так: $\alpha^\circ = \alpha \cdot \pi / 180$. Это правило помогает переводить заданный угол к той системе, которая требуется в задаче.

Почему важно не смешивать

Радианная мера используется в формулах тригонометрии, потому что она напрямую выражает период и частоту. В школьных задачах критично не перепутать единицы при подстановке и построении графиков.

Как меняется график при изменении коэффициентов



Сравнение показывает два разных механизма: коэффициент перед функцией отвечает за вертикальный масштаб, а коэффициент при аргументе задаёт частоту повторения через период.

Если коэффициент изменяет амплитуду, график «высится» сильнее или меньше, но не меняет длину цикла. При изменении аргумента период сжимается или растягивается пропорционально.

Схематическая иллюстрация по формулам для $y = A \cdot \sin(Bx)$ ($A=1,2$; $B=1,2$).

Сравнение свойств четырёх тригонометрических функций

Функция	Период	Область значений	Чётность	Нули
$\sin x$	2π	$[-1;1]$	нечётная	$x=\pi k$
$\cos x$	2π	$[-1;1]$	чётная	$x=\pi/2+\pi k$
$\operatorname{tg} x$	π	$\mathbb{R}$	нечётная	$x=\pi k$
$\operatorname{ctg} x$	π	$\mathbb{R}$	нечётная	$x=\pi/2+\pi k$

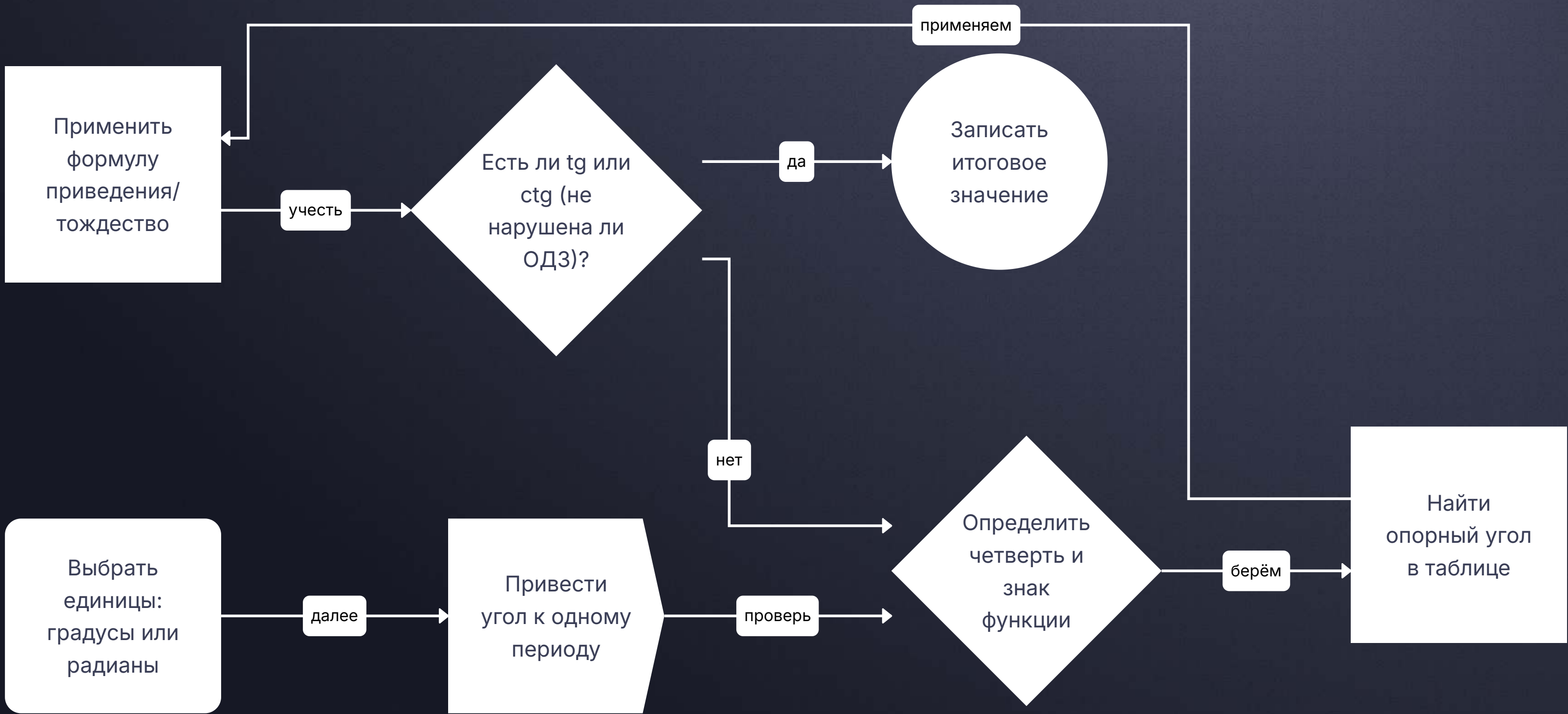
Обобщение свойств по определению на единичной окружности и по свойствам периодов.

Таблица суммирует ключевые характеристики: период, область определения и значений, чётность и нули. Она помогает быстро выбрать нужную функцию при решении задач на графики и уравнения.

Различие между ограниченными ($\sin$, $\cos$) и неограниченными (tg , ctg) функциями особенно заметно по области значений: у tg и ctg нет границ.

Алгоритм вычисления значений тригонометрической функции

Порядок действий опирается на единичную окружность, таблицу опорных углов и формулы приведения.



Уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

01

Уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решения только при $-1 \leq a \leq 1$, потому что синус и косинус ограничены и принимают значения только из отрезка $[-1; 1]$.

03

Общий ответ записывают параметром k — целым числом, учитывая соответствующий период и знак. Для школьных задач полезно сверять найденный вид решения с графиком и ОДЗ функции.

02

Уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$, напротив, имеют бесконечно много решений: графики повторяются через период π . При этом нужно помнить об ограничениях области определения.

Где в жизни встречаются тригонометрические функции

Музыка и звук: волна как модель

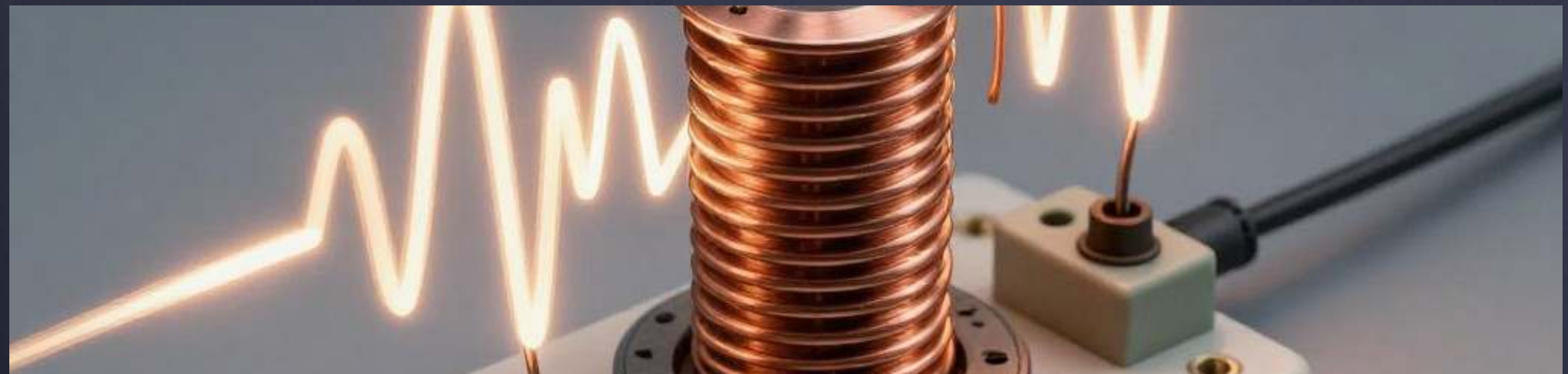
Колебания воздуха при звуке часто описывают синусоидой: максимум соответствует наибольшей громкости, минимум — ослаблению. Амплитуда показывает силу отклонения, период — «время цикла», а фаза — момент, с которого стартует колебание. Поэтому тригонометрия помогает понимать форму сигнала.

Электричество: переменный ток и его ритм

Переменный ток меняется периодически, поэтому его удобнее всего записывать через синус и косинус. При изменении частоты меняется период, а при смене режима — «высота» колебаний. Тригонометрическая модель позволяет анализировать повторяемость и планировать измерения в быту и технике.

Приливы и сезонность: регулярность в наблюдениях

Уровень моря в течение дня и месяца колеблется предсказуемо, хотя реальность может немного «отклоняться» от идеала. Синусоида выделяет регулярный рисунок в данных и упрощает прогноз. На практике это помогает сравнивать периоды и искать закономерности без сложных вычислений.



Периодический процесс и его приближённая синусоида



Точки изображают наблюдения, а сглаженная кривая — синусоидальную модель. Видно совпадение основных максимумов и минимумов, но реальные значения немного «гуляют» вокруг идеала.

По графику видно: тригонометрическая функция не обязана совпадать с каждым измерением, но хорошо выделяет регулярность и ключевые параметры цикла. Это делает её практичной моделью.

Схематическая демонстрация: сравнение периодических данных с синусоидой (пример для визуального понимания, не конкретный источник).

Типичные ошибки при изучении темы

01

Первая ошибка — смешение градусов и радианов: при неверных единицах меняются значения синуса и косинуса, а график «съезжает». Всегда проверяйте, что в формулы подставлены именно те единицы, что заданы в задаче.

02

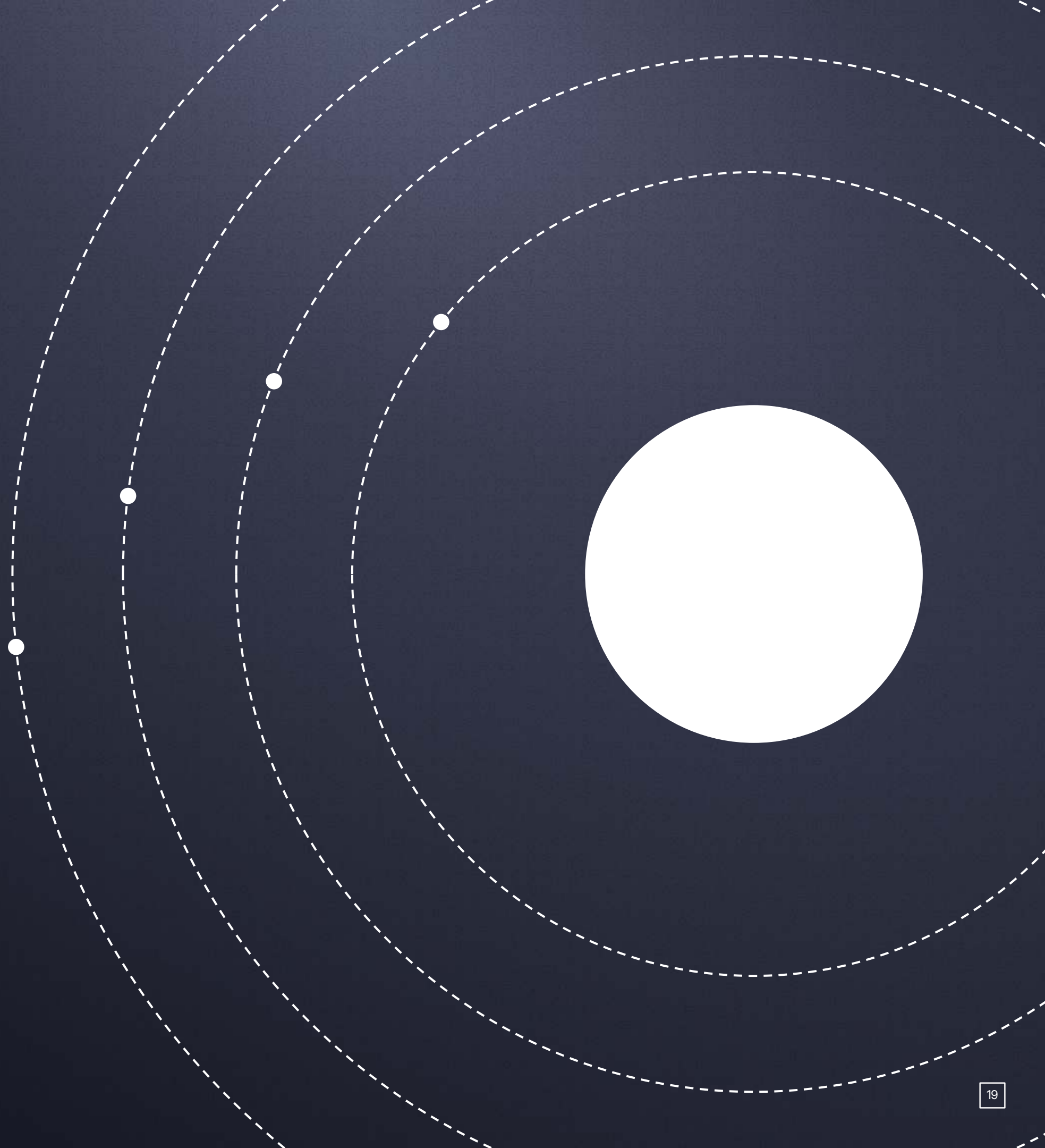
Вторая ошибка — знак функции по четверти. Нужно связывать знак с координатами точки на единичной окружности: $\sin$ и $\cos$ могут быть разных знаков, а tg и ctg зависят от отношения этих координат.

03

Третья ошибка — забывание точек, где $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ не определены. Если $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$, дробь превращается в деление на ноль, и уравнение с $\operatorname{tg}/\operatorname{ctg}$ требует ограничения ОДЗ.

04

Четвёртая ошибка — механическое применение формул приведения без проверки четверти и опорного угла, а также путаница между $\sin$ и $\cos$ при углах $\pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$. Причина — недостаточная опора на единичную окружность и таблицу.



Итоги изучения тригонометрических функций углового аргумента

Тригонометрические функции связывают геометрию окружности, координаты точки и периодические зависимости. Единичная окружность задаёт определения, таблица ускоряет расчёты, а тождества и приведение упрощают преобразования. Свойства периодичности и чётности объясняют графики, а тема готовит к уравнениям, их анализу и применению к реальным повторяющимся процессам.

