

Вписанные и описанные окружности в правильных многоугольниках

Откроем связь сторон, вершин и окружностей в правильных фигурах.



Зачем изучать правильные многоугольники и окружности

Эти фигуры часто встречаются
в узорах, знаках и чертежах,
а их окружности помогают быстро
находить радиусы, стороны
и площади без лишних построений.



Что такое правильный многоугольник

Равные стороны

У правильного многоугольника все стороны имеют одинаковую длину, поэтому фигура выглядит симметрично и удобно для построений.

Равные углы

Все внутренние углы тоже равны, из-за чего вершины распределены вокруг центра одинаково и без перекосов.

Примеры фигур

К этой группе относятся равносторонний треугольник, квадрат, правильный пятиугольник и правильный шестиугольник.

Единый центр

У такой фигуры есть один общий центр: он одинаково удалён и от вершин, и от сторон, что делает свойства окружностей особенно удобными.



Описанная окружность вокруг правильного многоугольника

1

Проходит через вершины

Описанная окружность проходит через все вершины правильного многоугольника, поэтому каждая вершина лежит на одной и той же линии окружности.

3

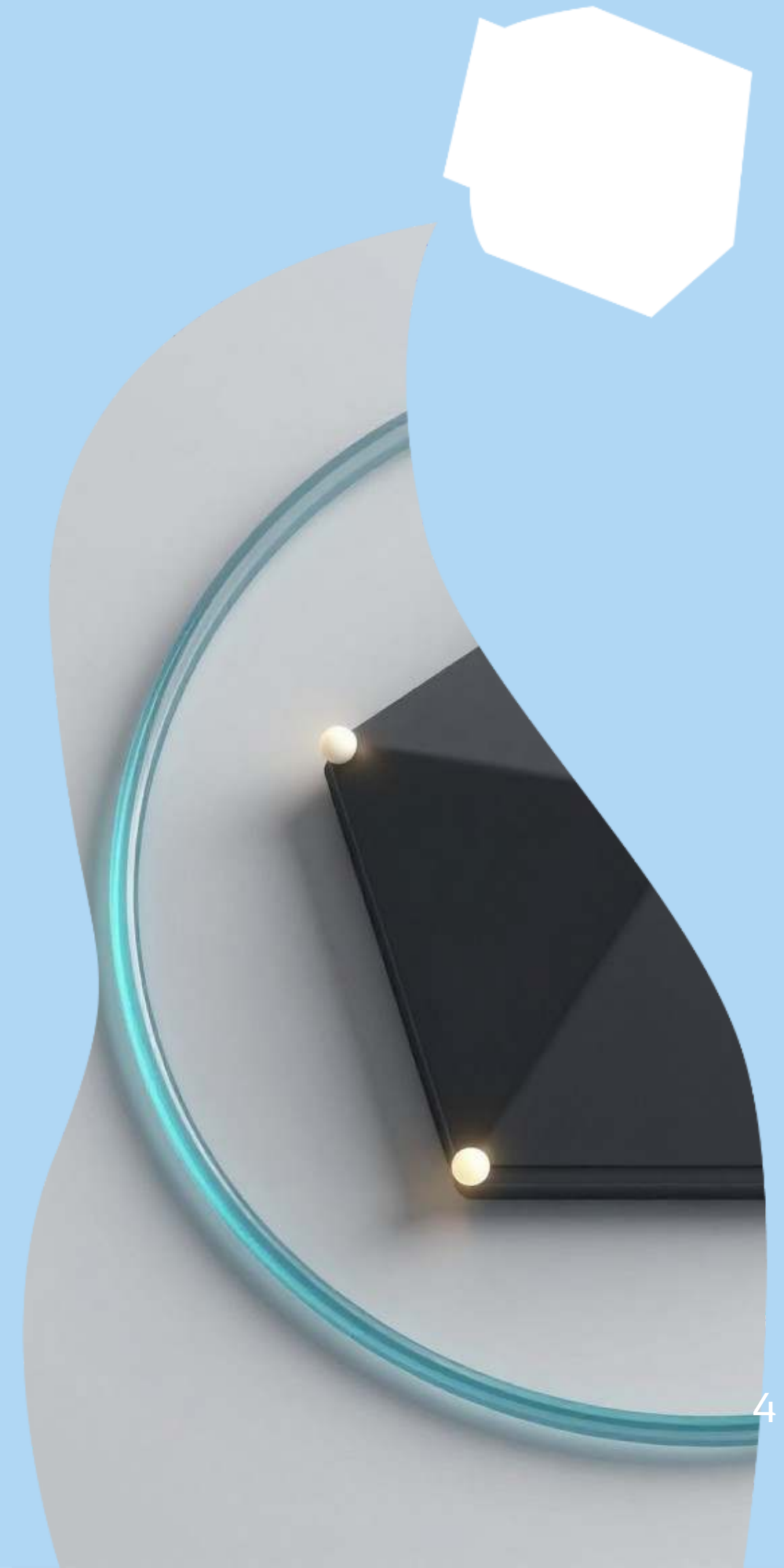
Фигура внутри окружности

Для правильного многоугольника можно сказать, что сама фигура как бы вписана в окружность, потому что все её вершины лежат на ней.

2

Центр совпадает

Её центр совпадает с центром фигуры, а радиус равен расстоянию от этого центра до любой вершины.



Вписанная окружность внутри правильного многоугольника

Касание сторон

Вписанная окружность касается каждой стороны правильного многоугольника, причём точка касания оказывается в середине стороны.

Общий центр

Центр этой окружности совпадает с центром фигуры, поэтому одна точка одновременно связана и со сторонами, и с вершинами.

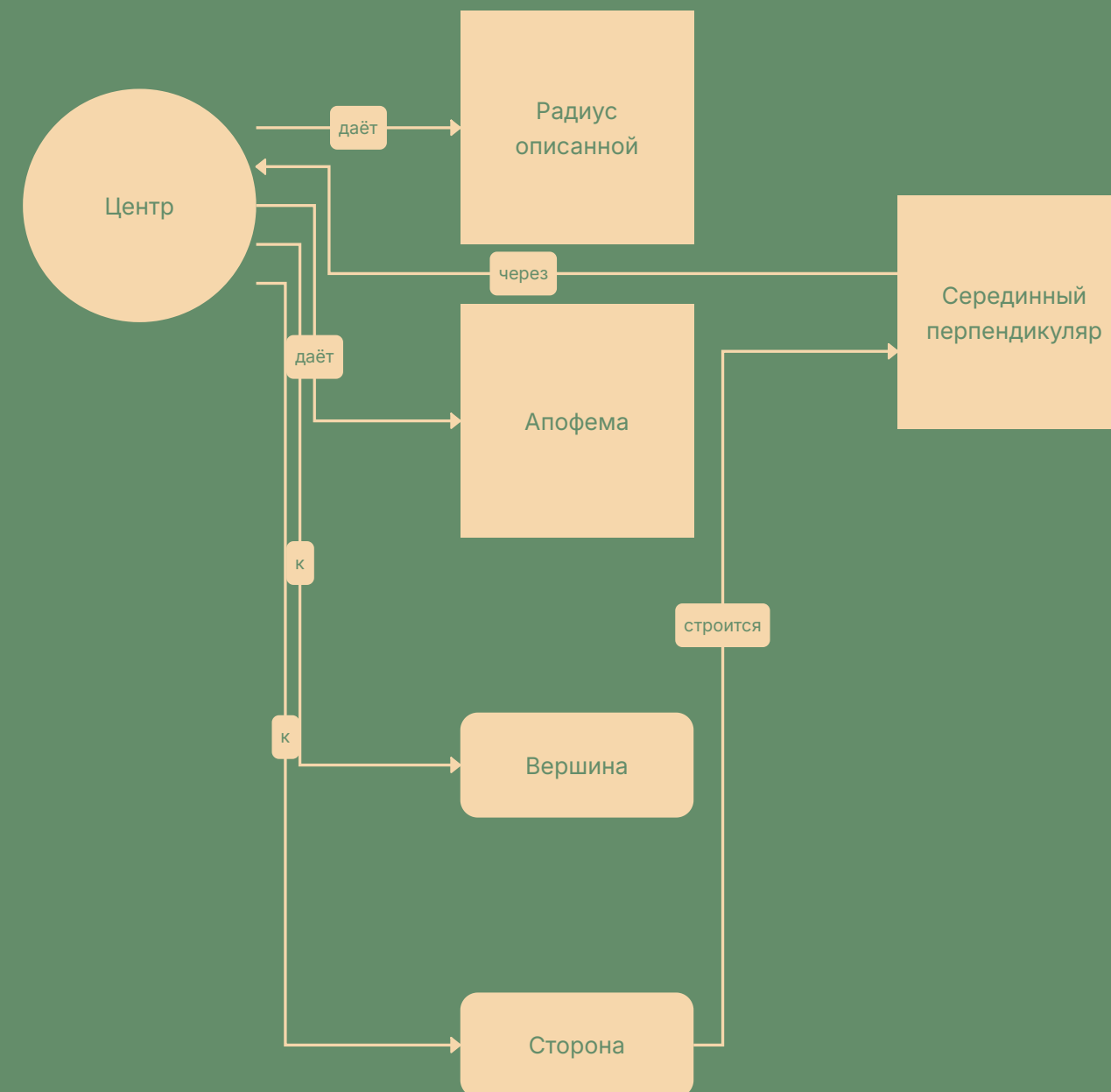
Апофема фигуры

Радиус вписанной окружности равен расстоянию от центра до стороны и называется апофемой, что особенно полезно при вычислении площади.



Центр как общая опора всех построений

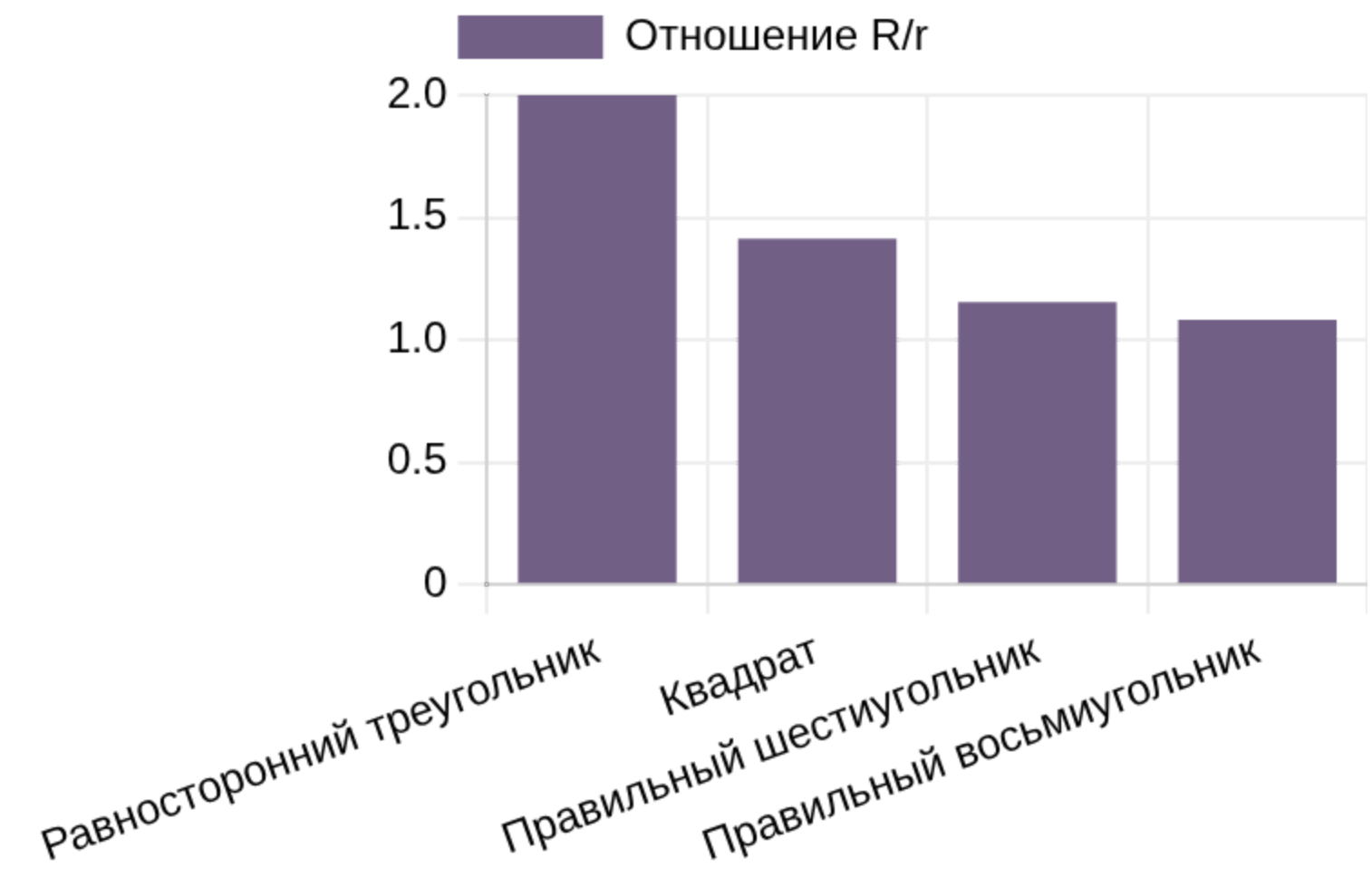
Схема показывает, как связаны центр, вершины, стороны и серединные перпендикуляры в правильном многоугольнике.



Сравнение радиуса описанной окружности и апофемы

Чем больше сторон, тем меньше различие между двумя радиусами и тем «круглее» становится фигура.

У треугольника разница максимальна, а у восьмиугольника уже невелика; рост числа сторон приближает многоугольник к окружности.



Школьные формулы для правильных многоугольников; вычисления по соотношению $R/r = 1/\cos(\pi/n)$.

Формулы для самых известных правильных многоугольников

Сравним основные формулы для трёх часто изучаемых фигур и увидим, что все они выражаются через сторону.

Во всех трёх случаях сторона задаёт и радиусы, и площадь, поэтому вычисления можно вести от одной известной величины.

Стандартные школьные формулы для равностороннего треугольника, квадрата и правильного шестиугольника.

Фигура	R	r	S
Треугольник	$a/\sqrt{3}$	$a\sqrt{3}/6$	$a^2\sqrt{3}/4$
Квадрат	$a\sqrt{2}/2$	$a/2$	a^2
Шестиугольник	a	$a\sqrt{3}/2$	$3a^2\sqrt{3}/2$

Для равностороннего треугольника это простое соотношение помогает быстро находить радиусы обеих окружностей и проверять построения.

Свойства равностороннего треугольника из школьного курса геометрии.

2/3

высоты составляет
радиус описанной
окружности

Квадрат и окружности

1

Описанная окружность

У квадрата она проходит через все четыре вершины. Её центр совпадает с центром квадрата, а радиус удобно выражается через диагональ.

2

Вписанная окружность

Вписанная окружность касается всех сторон квадрата в их серединах. Её радиус равен половине стороны, поэтому его легко найти без сложных построений.

3

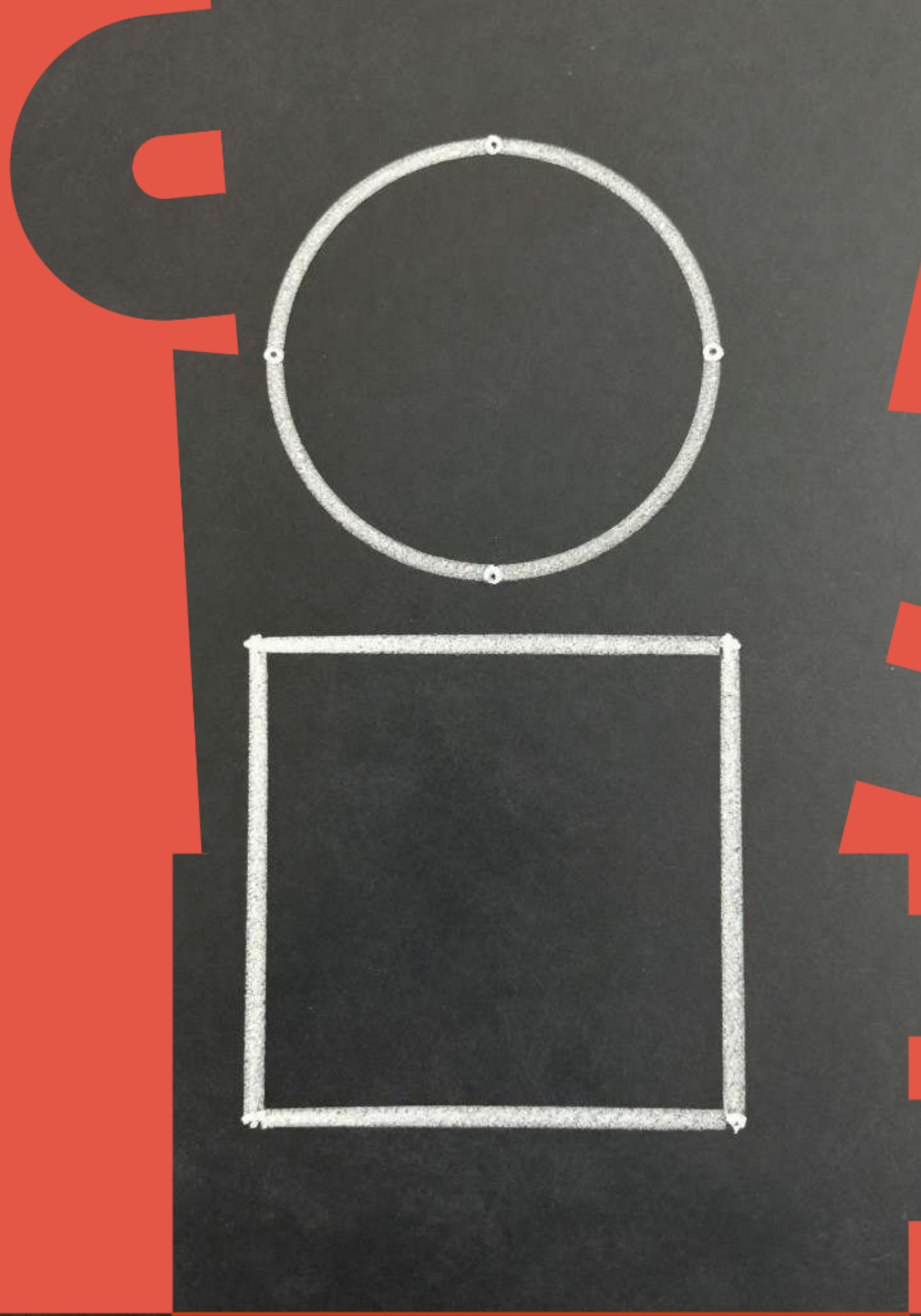
Сравнение размеров

Для квадрата особенно наглядно соотносятся сторона, диагональ и оба радиуса. Это делает фигуру удобной для первых задач на окружности.

4

Простая проверка

Если известна сторона, можно сразу вычислить и радиус вписанной окружности, и радиус описанной. Это помогает быстро проверять ответы в задачах.



Что важно знать о правильном шестиугольнике



Сторона и радиус

У правильного шестиугольника длина стороны совпадает с радиусом описанной окружности. Поэтому, если известна одна сторона, сразу можно восстановить расстояние от центра до любой вершины.



Вписанная окружность

Радиус вписанной окружности меньше радиуса описанной. Его находят через сторону и угол 30° , используя тригонометрическое соотношение. Это помогает связать фигуру с её внутренним расстоянием до сторон.



Шестикратная симметрия

Шестиугольник удобно делится на шесть равных треугольников с общей вершиной в центре. Такая симметрия делает построения понятными и помогает быстро вычислять нужные элементы фигуры.

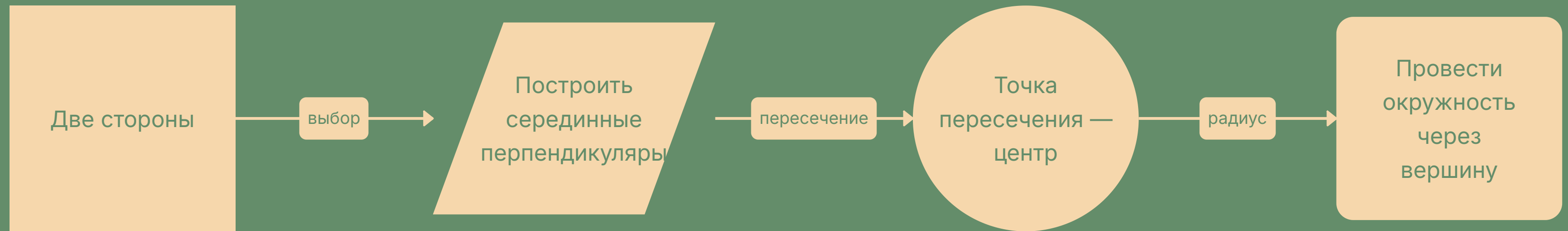


Где встречается

Правильный шестиугольник часто виден в сотах, мозаиках и орнаментах. Его форма экономно заполняет плоскость, поэтому она широко используется там, где важны прочность, красота и порядок.

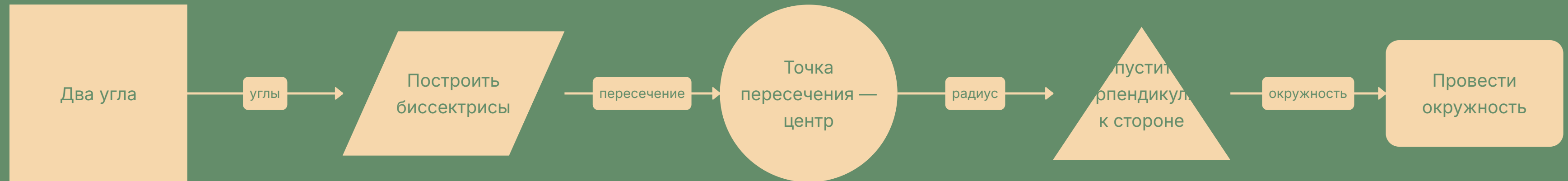
Построение описанной окружности

Последовательность опирается на серединные перпендикуляры к сторонам правильного многоугольника и свойство их пересечения в центре окружности.



Построение вписанной окружности

Диаграмма показывает, как биссектрисы углов и перпендикуляр к стороне помогают найти центр и радиус вписанной окружности.



Апофема как ключ к площади

Что такое апофема

Апофема — это кратчайшее расстояние от центра правильного многоугольника до его стороны. В правильной фигуре она всегда перпендикулярна стороне и совпадает с радиусом вписанной окружности.

Формула площади

Площадь удобно находить по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$, где P — периметр, а r — радиус вписанной окружности. Так площадь выражается через измеряемые элементы без лишних построений.

Почему это удобно

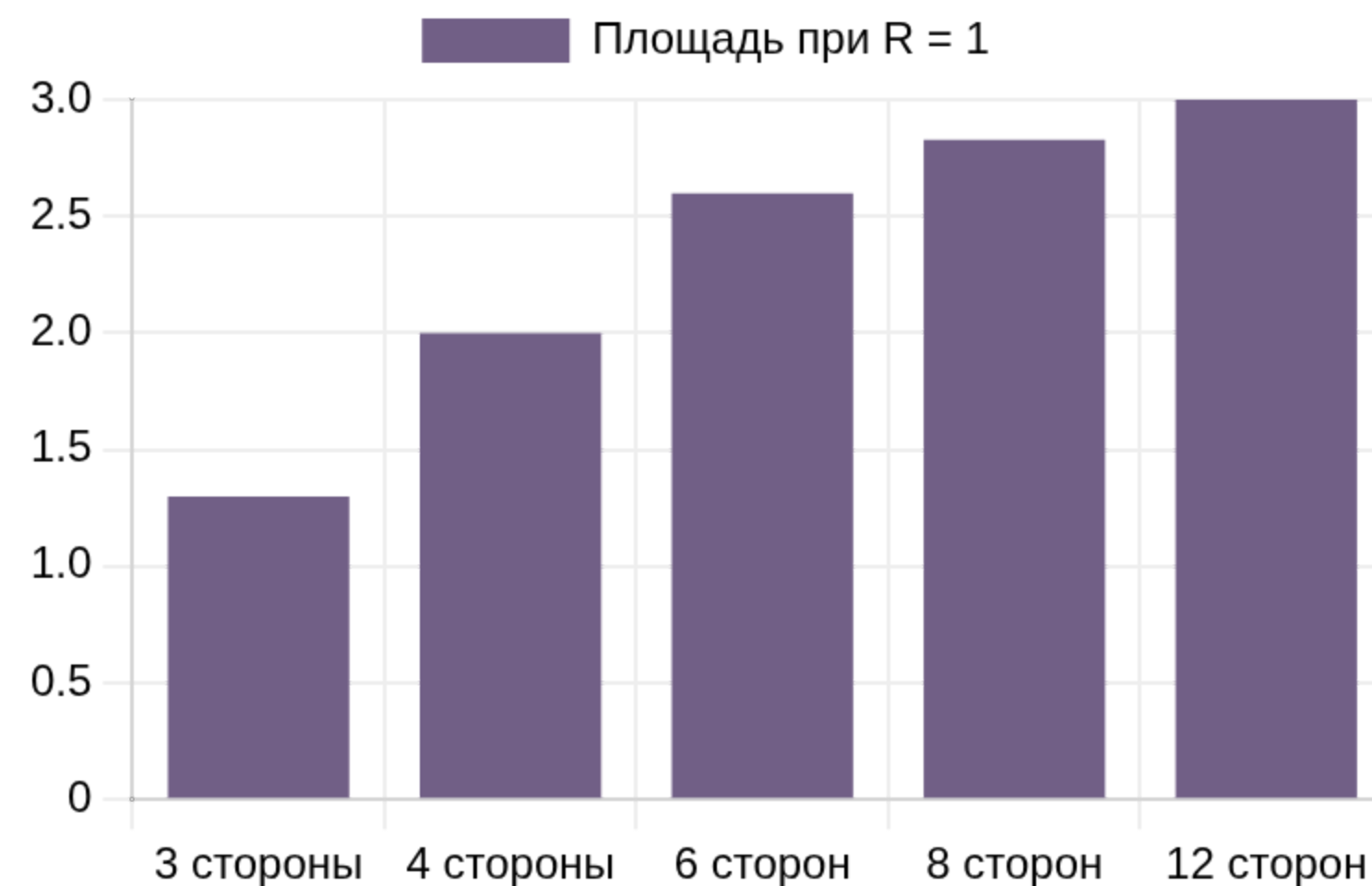
Если известны сторона и апофема, можно быстро найти площадь всей фигуры. Для задач это особенно полезно, потому что не нужно разбирать много отдельных треугольников и углов.



Как меняется фигура при росте числа сторон

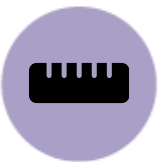
При одном и том же радиусе описанной окружности многоугольник с большим числом сторон занимает больше площади и визуально приближается к кругу.

Чем больше сторон, тем меньше различие между вписанной и описанной окружностями и тем ближе фигура к окружности.



Геометрическая зависимость площади правильного n -угольника при фиксированном радиусе описанной окружности, расчёт по формуле $S = n/2 \cdot R^2 \cdot \sin(2\pi/n)$.

Какие задачи встречаются чаще всего



Найти радиус

По длине стороны можно определить радиус описанной окружности или апофему. Для этого используют свойства равных треугольников, возникающих при соединении центра с вершинами и сторонами.



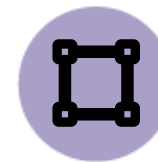
Найти сторону

Если известен радиус, сторону находят через геометрические связи внутри правильного многоугольника. Особенно удобно это делать для квадрата, треугольника и шестиугольника.



Найти площадь

Часто требуется площадь по периметру и апофеме. Тогда применяют формулу $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$ и подставляют значения без дополнительных чертежей и длинных вычислений.



Определить число сторон

По величине центрального или внутреннего угла можно выяснить, сколько сторон у фигуры. Такой способ особенно полезен, когда дано только угловое условие задачи.



Работать с частью фигуры

Многие задачи решаются через один равнобедренный треугольник, на который делится весь многоугольник. Это упрощает доказательства и делает построение более наглядным.

Типичные ошибки при решении задач



Сравнение показывает, какие неточности чаще всего мешают получить правильный ответ.



Самые частые ошибки связаны не с формулами, а с построением и выбором нужного радиуса. Если помнить общий центр и различать окружности, большинство задач решается верно.



Типовые построения и свойства правильных многоугольников

Ошибка	Что путают	Как исправить
Радиусы	Описанный и вписанный	Проверить, что именно измеряется
Центр	Точка пересечения	Использовать свойства биссектрис
Построение	Нет перпендикуляра	Проводить строго к стороне

Применение в реальной жизни

Архитектура и фасады

Правильные многоугольники используют в куполах, декоративных элементах и планировке помещений. Симметрия делает конструкции зрительно уравновешенными, а окружности помогают точно задать размеры и пропорции.

Знаки и графика

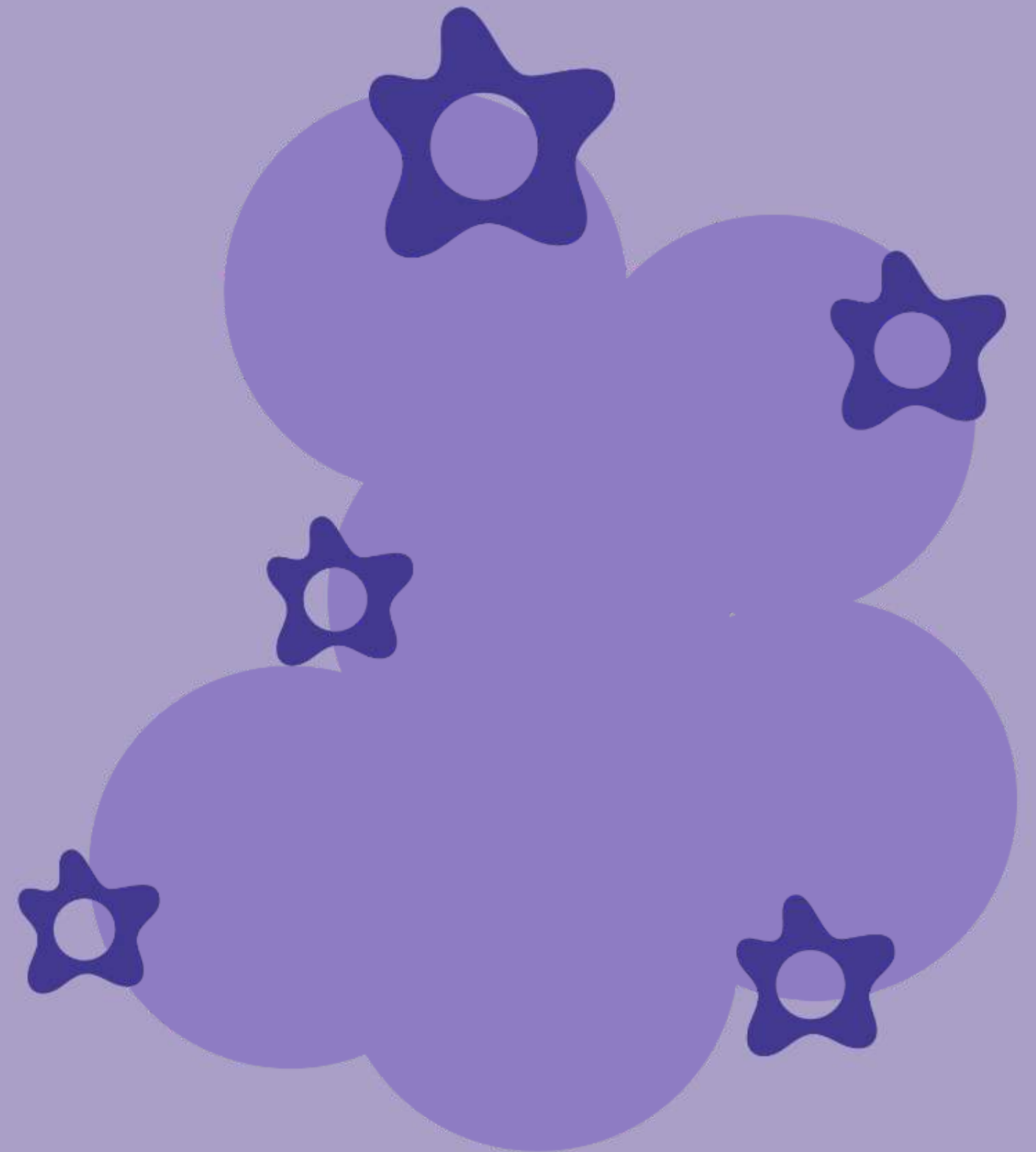
В дорожных знаках, пиктограммах и компьютерной графике правильные фигуры легко узнаются и быстро строятся. Окружности упрощают масштабирование без потери симметрии и точности.

Плитка и орнаменты

Шестиугольные и другие регулярные формы часто встречаются в мозаике и напольной плитке. Они удобно повторяются, плотно заполняют поверхность и создают аккуратный узор без промежутков.

Чертежи и моделирование

В инженерных чертежах правильные многоугольники помогают задать точные контуры деталей. Описанные и вписанные окружности облегчают проверку размеров и построение симметричных элементов.



Связь с другими темами геометрии



1

1. Треугольники

Правильный многоугольник удобно разбивать на равные треугольники. Поэтому знания о равнобедренных и равносторонних треугольниках помогают находить высоты, углы и стороны без лишних шагов.



2

2. Окружности

Тема показывает, как работают радиус, хорда и касательная. На примере правильных фигур хорошо видно, почему одна окружность проходит через вершины, а другая касается сторон.



3

3. Построения

Биссектрисы и серединные перпендикуляры помогают находить центр фигуры. Эти линии часто встречаются в задачах на построение и показывают связь между углами и расстояниями.



4

4. Площади и вычисления

Апофема связывает окружности с площадью правильного многоугольника. Благодаря этому многие задачи сводятся к одной формуле и нескольким точным измерениям.

Что запомнить о правильных многоугольниках

У правильного многоугольника один общий центр для обеих окружностей. Описанная окружность проходит через вершины, а вписанная касается сторон. Эти свойства делают построения, вычисления и проверки очень удобными.

