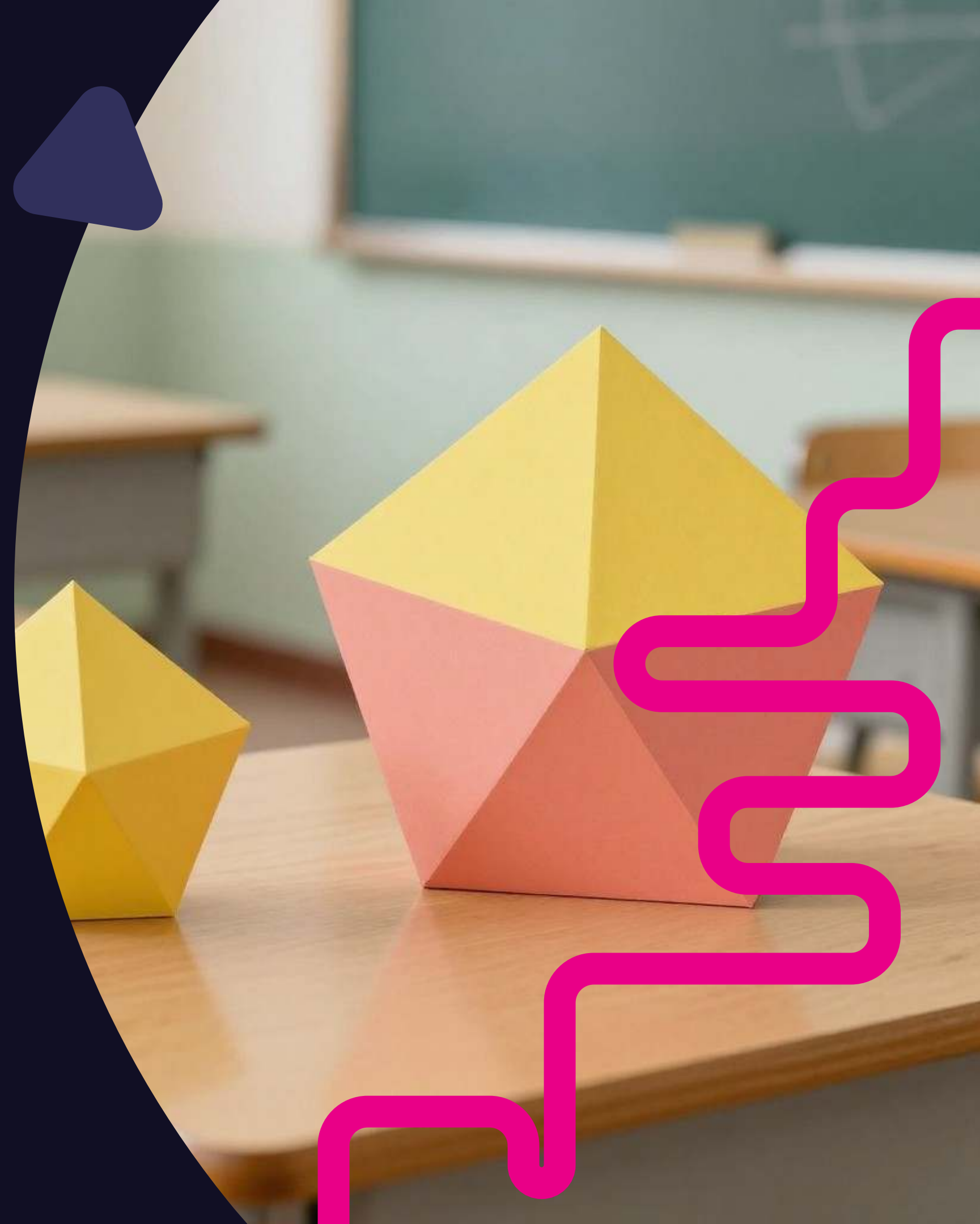
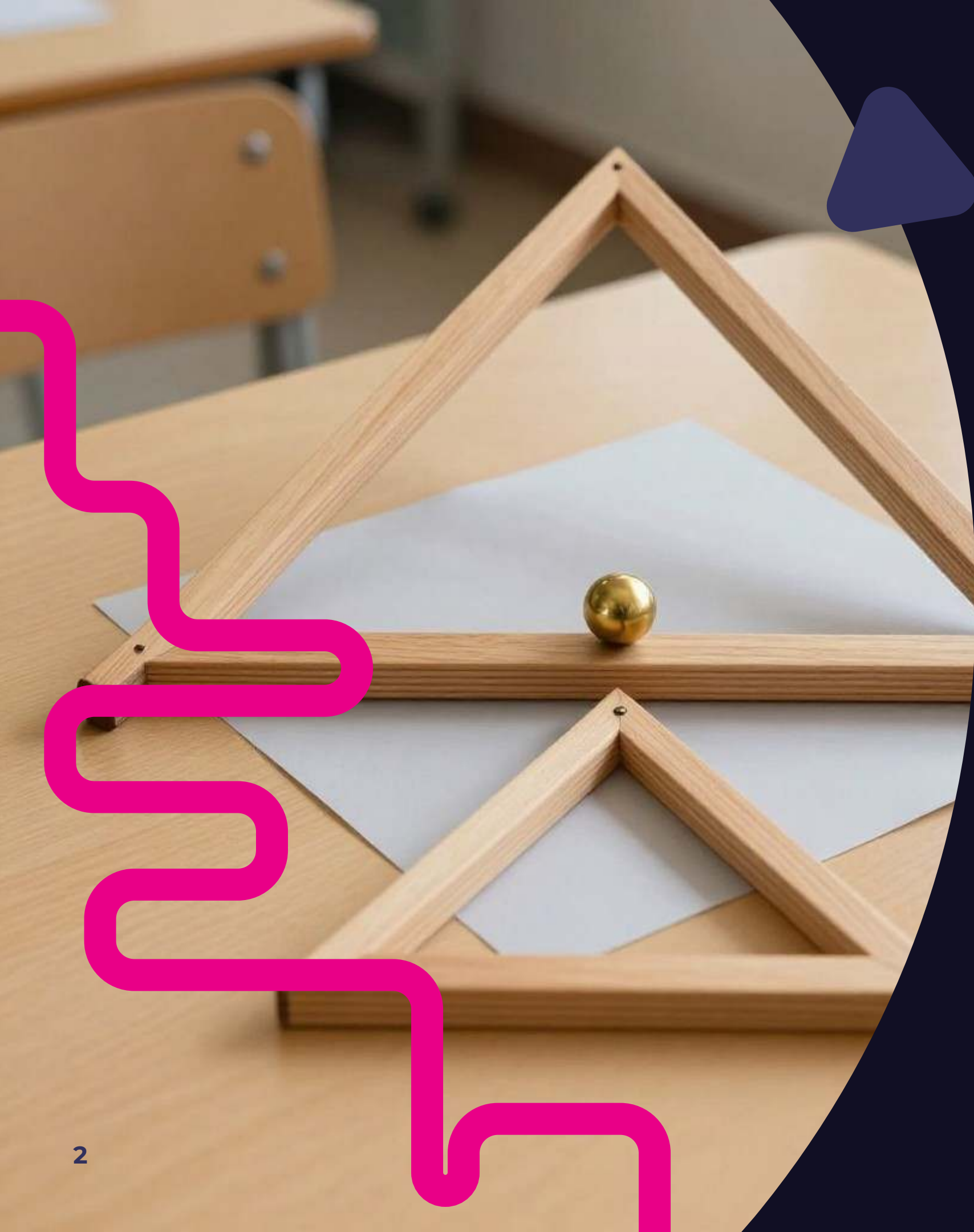


Свойства гомотетии: как фигуры сохраняют форму при изменении масштаба

Форма сохраняется, а размеры меняются
в одинаковое число раз.





Почему гомотетия важна в геометрии

Гомотетия помогает понять, как фигуры могут увеличиваться или уменьшаться, оставаясь похожими. Она связывает чертежи, карты и модели с точными геометрическими правилами и пригодится при решении задач на подобие и масштаб.

Определение гомотетии

01

Центр и коэффициент

Гомотетия задаётся центром O и коэффициентом k . Каждая точка A переходит в точку A' по строгому правилу, связанному с прямой OA и расстоянием до центра.

02

Расстояние до образа

Точка A' всегда лежит на прямой OA , а расстояние OA' равно $|k| \cdot OA$. Значит, изображение удаляется от центра или приближается к нему в одинаковое число раз.

03

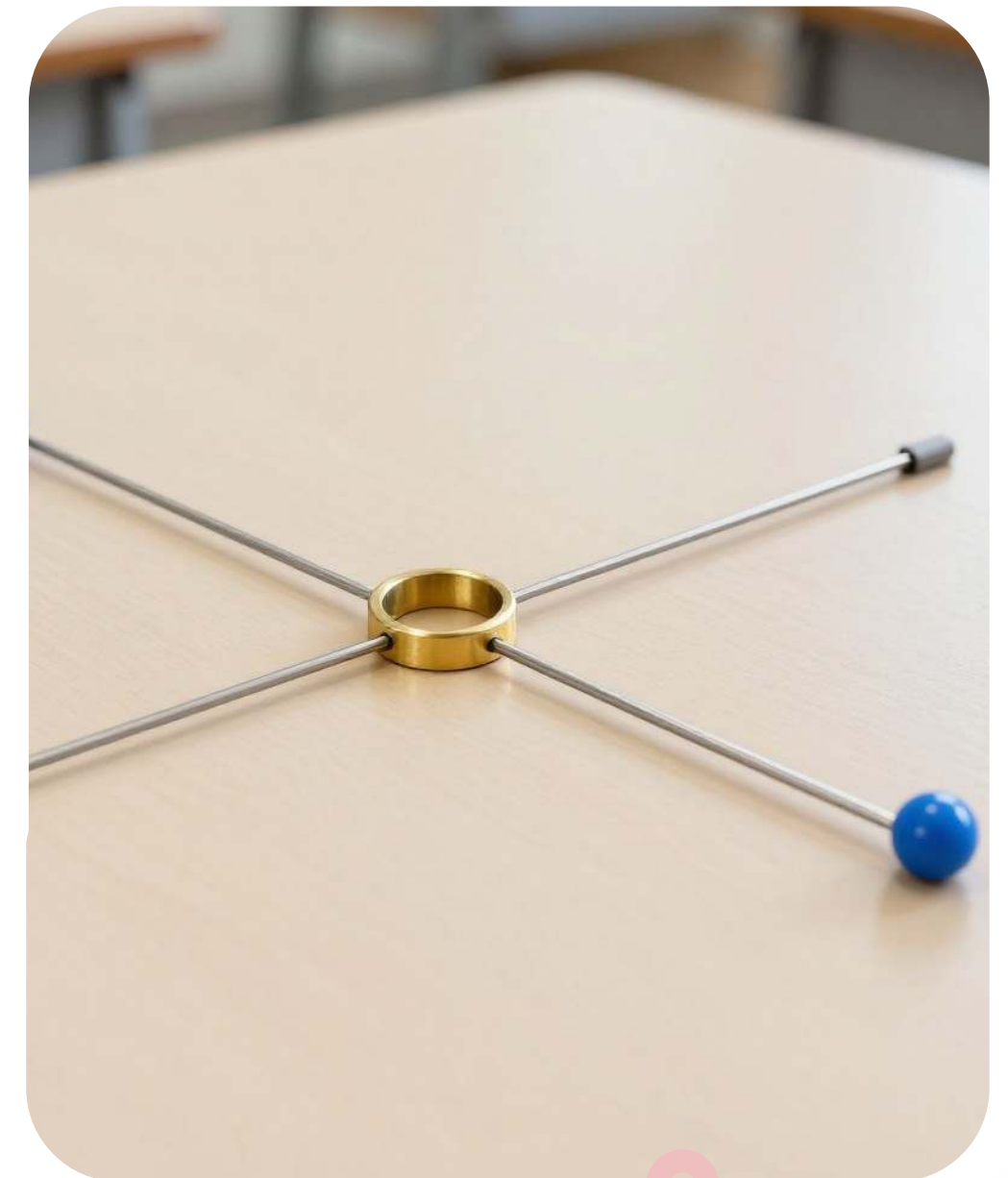
Положительный коэффициент

Если $k > 0$, образ точки находится на том же луче, что и исходная точка. Направление от центра сохраняется, а меняется только масштаб.

04

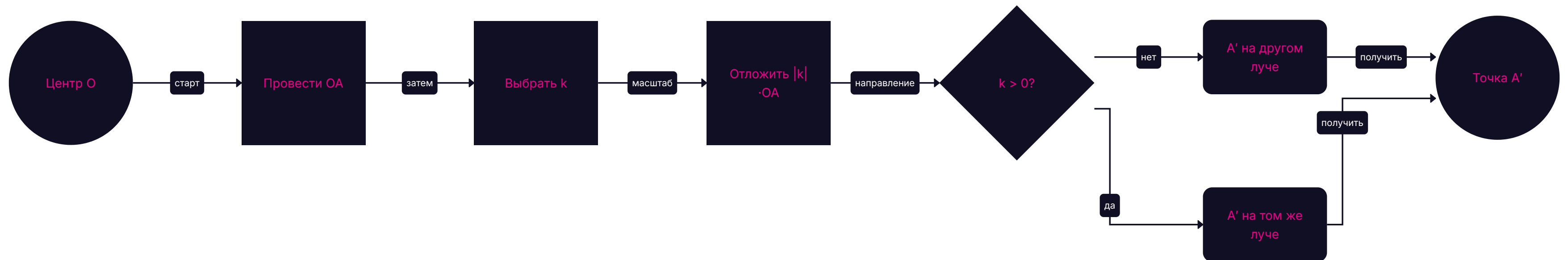
Отрицательный коэффициент

Если $k < 0$, образ оказывается на противоположном луче. Центр O при этом остаётся неподвижным, поэтому гомотетия может менять не только размер, но и сторону расположения точки.



Как построить образ точки при гомотетии

Последовательность построения точки A' по центру O и коэффициенту k



Геометрическая схема преобразования точки

Исходная ситуация

- На рисунке удобно показать центр O , точку A и луч OA . Тогда сразу видно, откуда начинается построение и как определяется положение образа точки относительно центра.

Увеличение и уменьшение

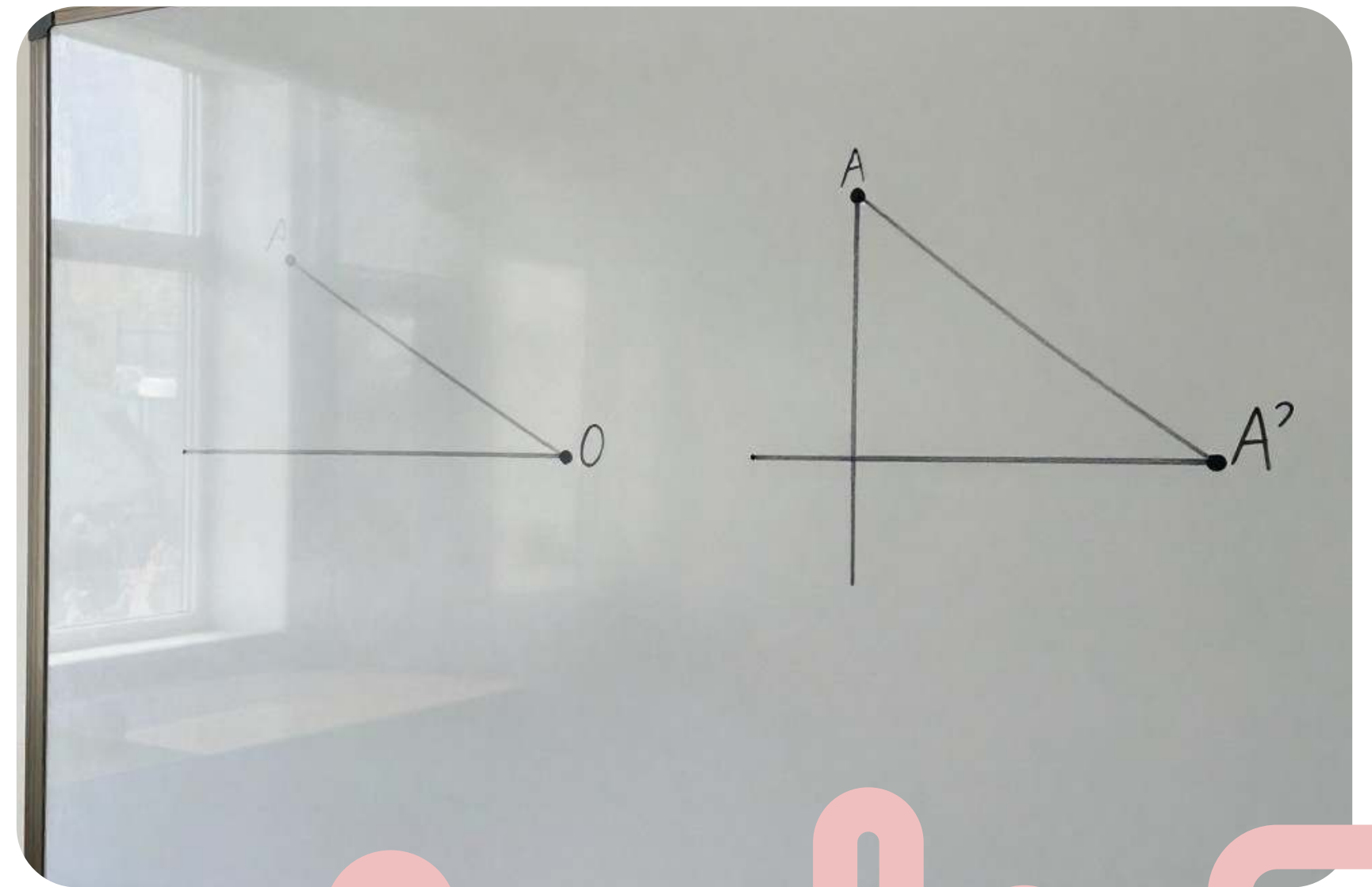
- Случай $k=2$ показывает увеличение: точка A' удаляется от центра вдвое дальше. При $k=\frac{1}{2}$ образ приближается к центру, сохраняя направление луча и общую конфигурацию.

Что не меняется

- Гомотетия не поворачивает луч и не меняет его направление как прямой. Меняется только расстояние от центра, а значит, сохраняется сам принцип расположения точки.

Подписи на рисунке

- Полезно обозначить на схеме центр гомотетии, исходную точку, её образ и коэффициент преобразования. Такие подписи помогают быстро проверить, правильно ли выполнено построение.



Что сохраняется и что изменяется при гомотетии

Сравнение основных свойств показывает, какие характеристики фигуры остаются неизменными, а какие зависят от коэффициента k .

Гомотетия сохраняет форму и подобие, но изменяет размеры; площадь меняется быстрее, чем длины.

Свойства гомотетии, школьный курс геометрии

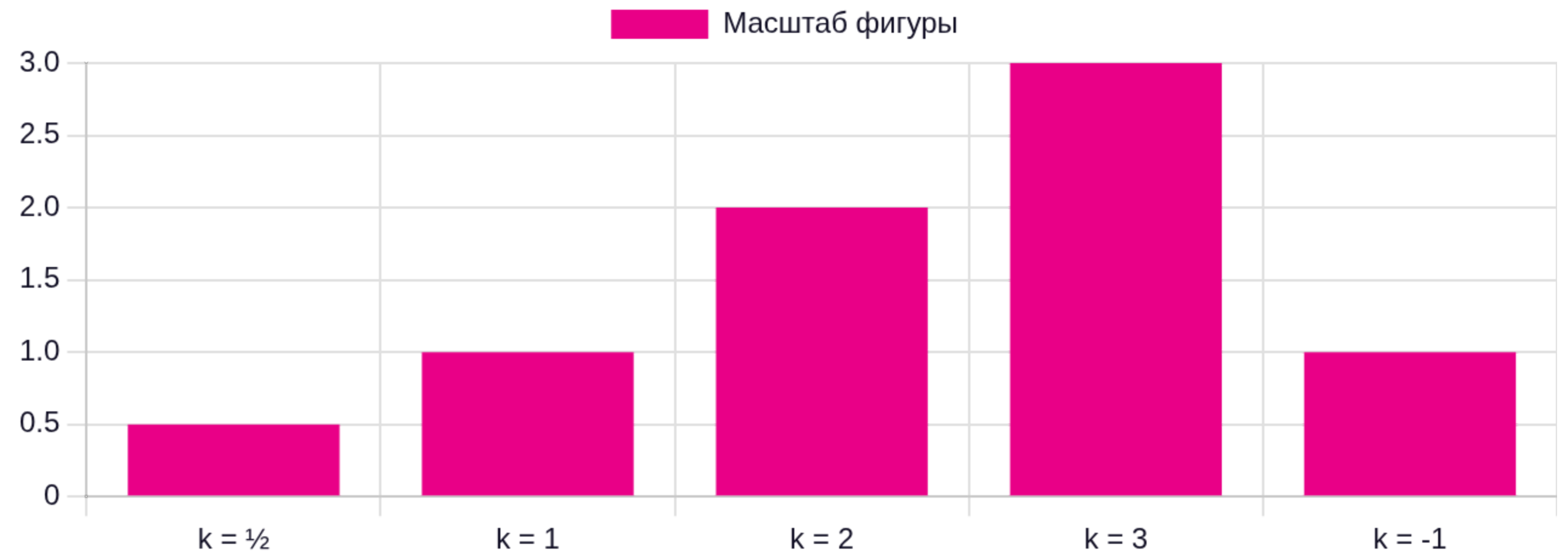
Свойство	Результат
Углы	сохраняются
Параллельность	сохраняется
Длины	в $ k $ раз
Площади	в k^2 раз

Как коэффициент k влияет на результат преобразования

На диаграмме видно, как меняется только масштаб: от уменьшения до увеличения. Отрицательный коэффициент сохраняет размер, но меняет сторону расположения точек.

Модуль k определяет изменение размера, а знак — направление относительно центра.

Учебный пример по теме «Гомотетия»



Сохранение углов и параллельности



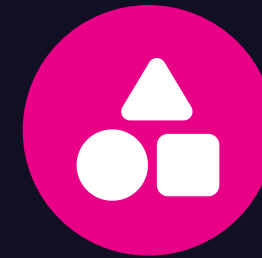
Углы не меняются

У каждого образа угол остаётся равным исходному. Поэтому у подобных многоугольников соответствующие углы совпадают, и это удобно при проверке построений.



Параллельные прямые

Если две прямые были параллельны, то после гомотетии они тоже останутся параллельными. Преобразование не нарушает их взаимное положение на плоскости.



Форма фигуры

Фигура не искажается: она становится больше или меньше, но сохраняет тот же общий вид. Именно поэтому гомотетия тесно связана с подобием фигур.

Положительный и отрицательный коэффициент гомотетии

01

Положительный знак

При $k > 0$ точка переходит на тот же луч, что и исходная. Это означает, что направление от центра не меняется, а фигура только растёт или уменьшается.

02

Отрицательный знак

При $k < 0$ образ точки оказывается по другую сторону от центра. Такое преобразование не просто меняет размер, но и переносит точку через центр O .

03

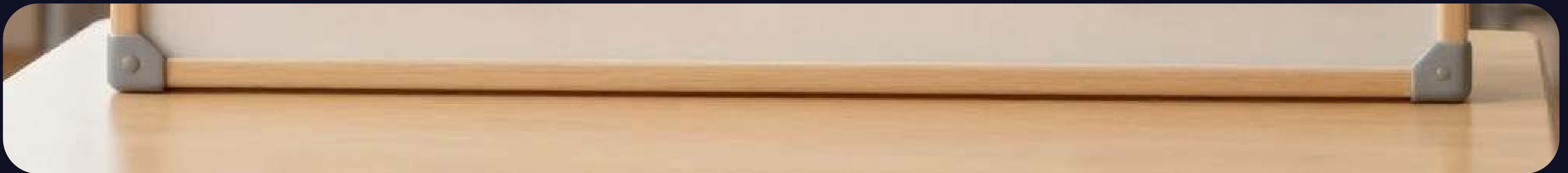
Случай $k=1$

Когда $k=1$, каждая точка остаётся на своём месте. Фигура полностью совпадает с исходной, поэтому гомотетия в этом случае не даёт видимого изменения.

04

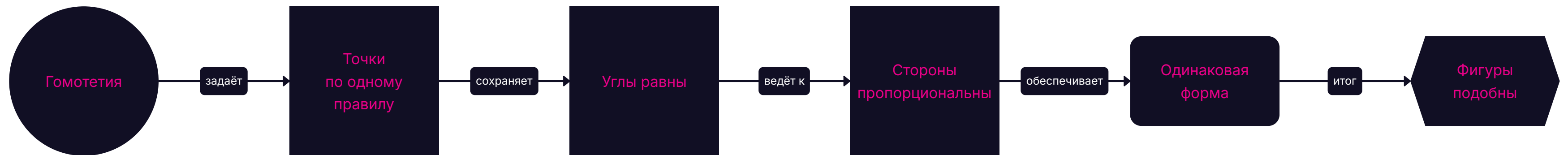
Случай $k=-1$

При $k=-1$ получается центральная симметрия относительно точки O . Все расстояния сохраняются, но каждая точка переходит на противоположную сторону от центра.



Как гомотетия связана с подобием фигур

Логическая цепочка от преобразования плоскости к подобию и пропорциям



Примеры коэффициента гомотетии и результата

k	Результат
2	Увеличение в 2 раза
1/3	Уменьшение в 3 раза
-2	Увеличение в 2 раза, смена стороны
1	Фигура без изменений
-1	Центральная симметрия

Таблица показывает, как знак и модуль коэффициента влияют на образ фигуры.

Модуль коэффициента задает масштаб, а знак определяет, по какую сторону от центра окажется образ.

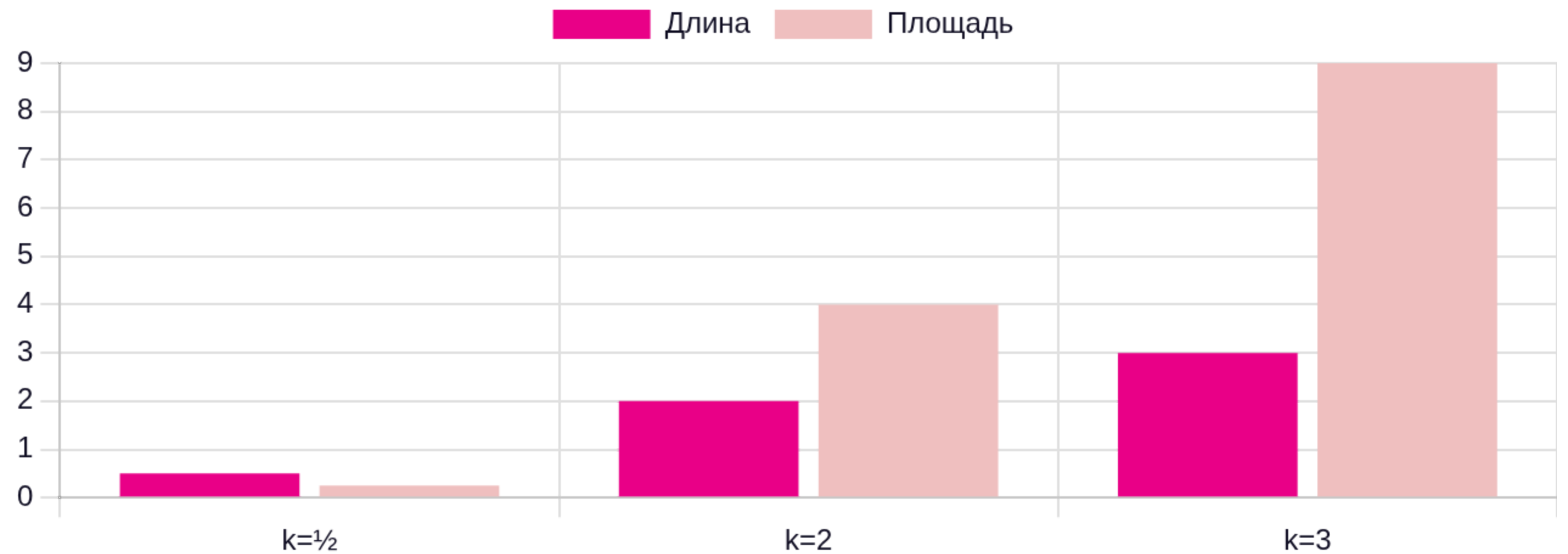
Свойства гомотетии: теоретические правила преобразования плоскости

Как меняются длина и площадь при разных значениях k

Сравнение двух величин помогает увидеть, что площадь реагирует на изменение масштаба сильнее, чем длина стороны.

Длины меняются пропорционально $|k|$, а площадь — по закону k^2 , поэтому при увеличении фигуры она растет быстрее.

Зависимости при гомотетии: длина умножается на $|k|$, площадь — на k^2



Гомотетия на координатной плоскости

01

Точка на плоскости

Если центр гомотетии находится в начале координат, то каждой точке $A(x, y)$ соответствует точка A' с координатами, зависящими от одного коэффициента.

02

Одинаковое умножение координат

При преобразовании обе координаты умножаются на k : $A(x, y)$ переходит в $A'(kx, ky)$. Это удобно, потому что сохраняется простое правило для всей фигуры.

03

Что дает запись

Координатная формула помогает быстро проверять построения и решать задачи, где вершины многоугольника уже заданы числами, без дополнительного чертежа.

04

Влияние коэффициента

При k больше 1 координаты по модулю увеличиваются, а при $0 < k < 1$ уменьшаются. Если k отрицателен, образ оказывается на противоположной стороне от центра.

Формулы гомотетии для координат, длин и площадей

Эти правила показывают, как гомотетия влияет на положение точки и размеры фигуры.

Координаты меняются напрямую, а размеры фигуры — по разным законам: линейно для длины и периметра, квадратично для площади.

Формулы гомотетии для точки, отрезка и фигуры в координатной записи

Величина	Правило
Координаты	$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$
Длина	$\times k $
Периметр	$\times k $
Площадь	$\times k^2$

Гомотетия вокруг нас

Карта и масштаб

На карте маленький отрезок может обозначать большое расстояние на местности. Формы рек, дорог и границ сохраняются, хотя размеры уменьшаются в одном и том же масштабе. Это наглядный пример гомотетии в повседневной жизни.



Макеты и модели

Макет здания повторяет очертания настоящего дома, но выглядит меньше. То же самое происходит с моделями техники и архитектурными проектами: пропорции сохраняются, а все детали уменьшаются или увеличиваются одинаково.



Экран и изображение

Когда фотографию растягивают или уменьшают на экране, ее форма остается узнаваемой. Меняется только масштаб, поэтому человек сразу видит знакомый объект, даже если он стал больше, меньше или отражен относительно центра.



Построение образа многоугольника при гомотетии

Алгоритм основан на проведении лучей от центра и переносе каждой вершины по одному правилу.



Типичные ошибки при работе с гомотетией

■ Не учитывать знак

Иногда смотрят только на модуль коэффициента и забывают про знак. Из-за этого точку строят не на том луче и получают неверное расположение образа.

■ Путать порядок вершин

Если соединить полученные точки не в том же порядке, что и у исходного многоугольника, фигура исказится. Тогда проверка по углам и сторонам уже не сработает.

■ Смешивать с другими преобразованиями

Гомотетия не является поворотом или отражением. Ее главная особенность — изменение масштаба относительно центра, поэтому важно не подменять одно преобразование другим.

Краткое сравнение основных свойств ГОМОТЕТИИ

Свойство	Итог
Углы	Сохраняются
Параллельность	Сохраняется
Форма	Сохраняется
Длины сторон	$\times k $
Периметр	$\times k $
Площадь	$\times k^2$

Сравнение показывает, какие свойства сохраняются, а какие зависят от коэффициента.

Гомотетия сохраняет форму, но не размеры; при $|k| \neq 1$ получаются подобные, а не равные фигуры.

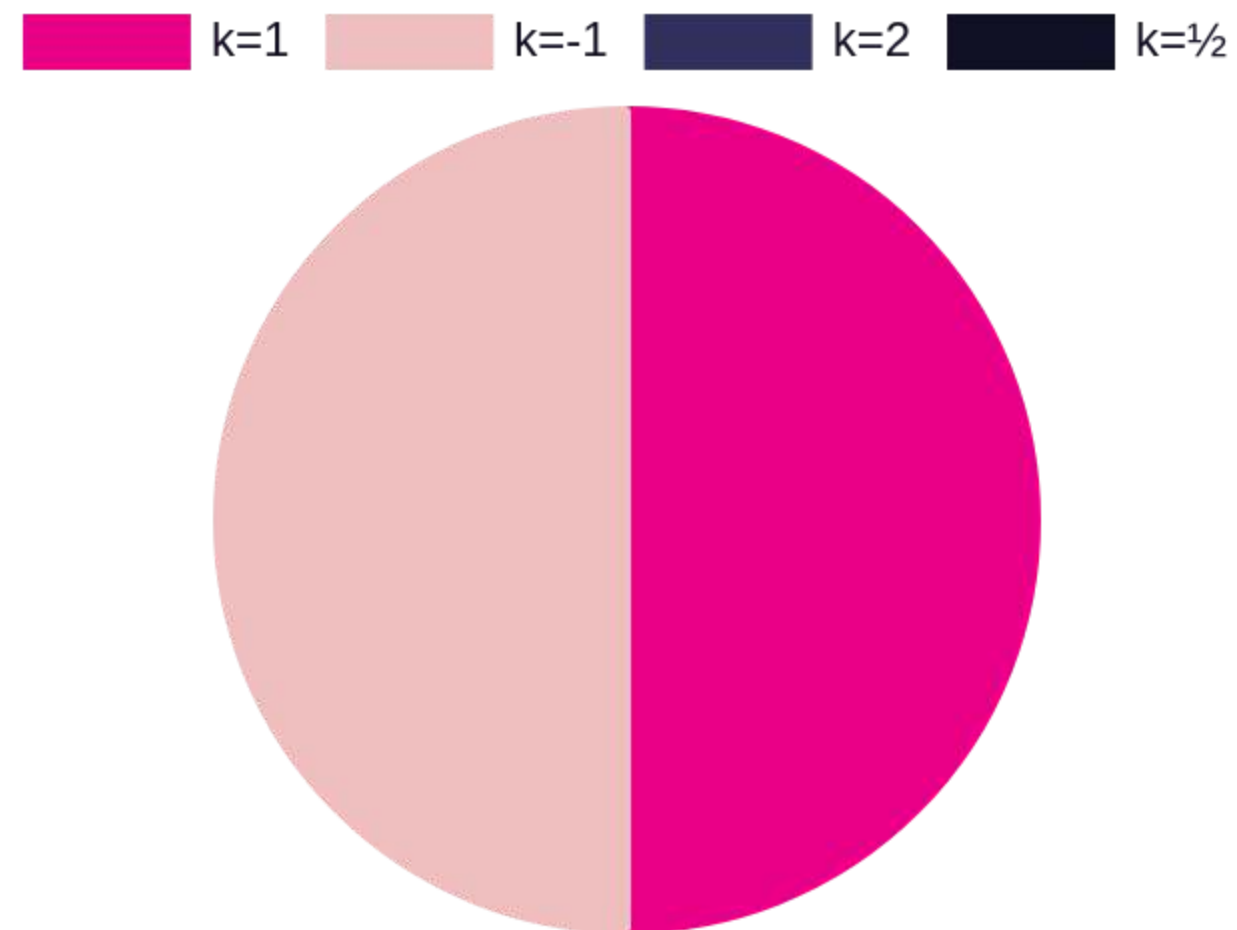
Основные свойства гомотетии из курса геометрии

Когда гомотетия дает равные фигуры

Только случаи с $|k|=1$ сохраняют размеры. Остальные значения меняют масштаб, даже если форма остается похожей.

Равные фигуры получаются при $k=1$ и $k=-1$; при $k=2$ и $k=\frac{1}{2}$ сохраняется лишь подобие.

Свойство гомотетии: равенство фигур возможно только при $|k|=1$



Гомотетия: масштаб без потери формы

Гомотетия показывает, как одна и та же фигура может стать больше, меньше или перейти на другую сторону от центра, оставаясь похожей и сохраняя свои углы.