

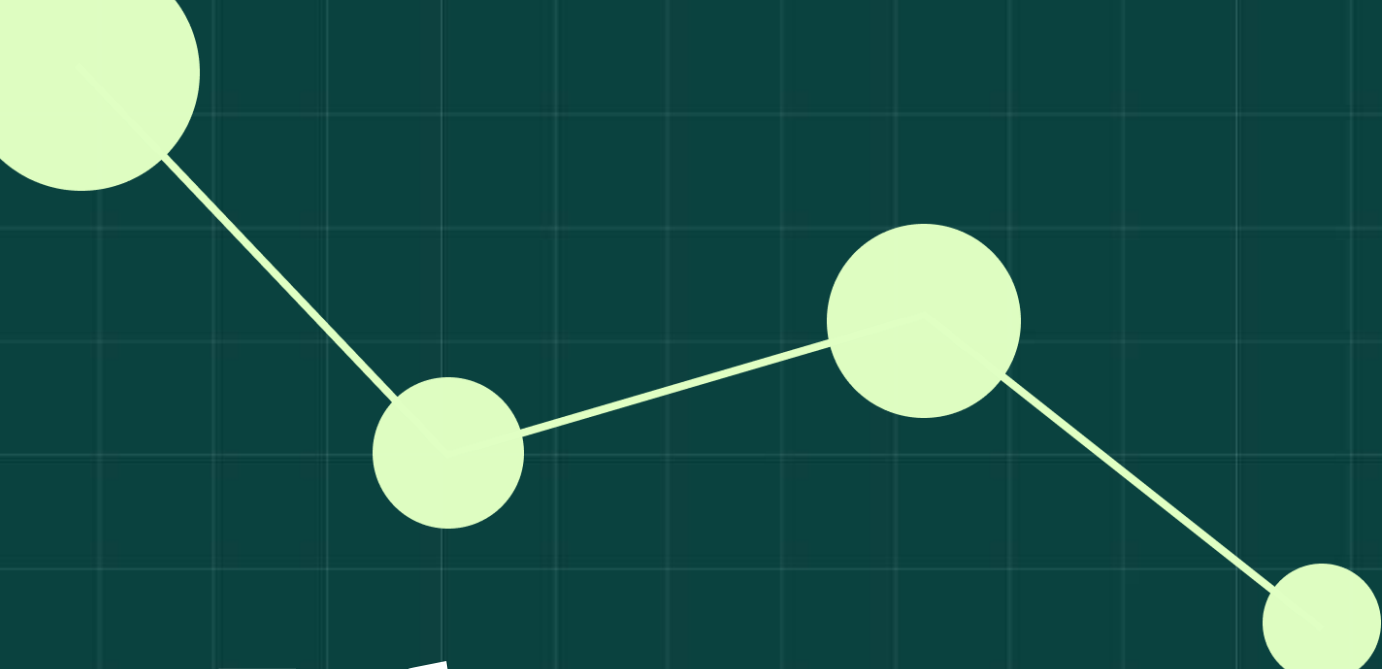


Таблица производных и первообразная: основные инструменты 11 класса

Производная и первообразная
открывают язык изменения
и восстановления функций.



Почему эта тема важна в 11 классе

Эти понятия опираются на уже изученные функции и становятся основой для исследования графиков, решения прикладных задач и перехода к элементам математического анализа.



Базовая таблица производных

Функция	Производная	ОДЗ
x	1	все x
x^n	$n x^{(n-1)}$	все x
$\ln x$	$1/x$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	все x

Главные формулы для стандартных функций, которые чаще всего встречаются в школьных задачах.

Таблица охватывает наиболее употребимые типы функций и служит опорой для большинства вычислений.

Правила дифференцирования, дополняющие таблицу

1

Линейность

Производная суммы и линейной комбинации находится по частям: коэффициенты сохраняются, а производные складываются. Это позволяет быстро разбирать длинные выражения на простые слагаемые.

2

Произведение и частное

Если функция записана как произведение или дробь, применяются специальные формулы. Они предотвращают грубые ошибки, когда нельзя дифференцировать числитель и знаменатель отдельно.

3

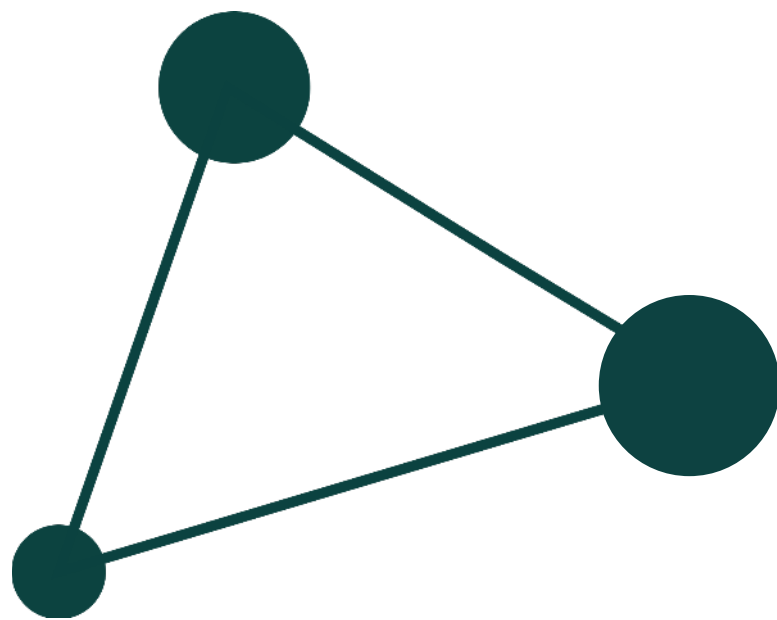
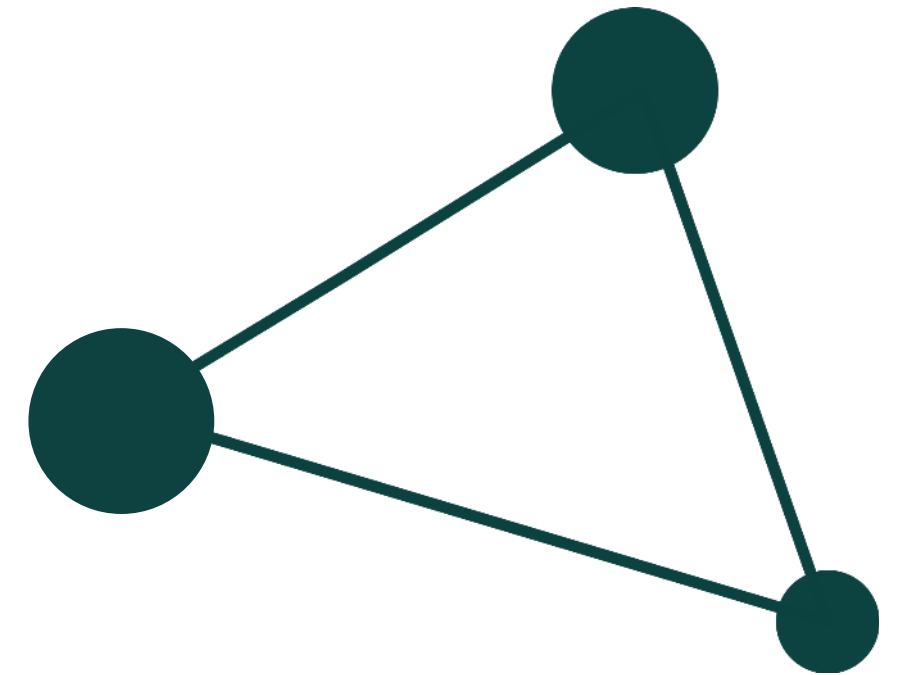
Правило цепочки

Для сложной функции сначала дифференцируют внешнюю часть, а затем умножают на производную внутренней. Именно это правило делает возможным работу с выражениями вида $\sin(2x)$ или $(3x+1)^5$.

4

Практический смысл

Эти правила расширяют таблицу производных: они позволяют вычислять производные не только стандартных функций, но и любых их комбинаций, встречающихся в контрольных и самостоятельных работах.



Какие типы производных чаще встречаются в школьных задачах

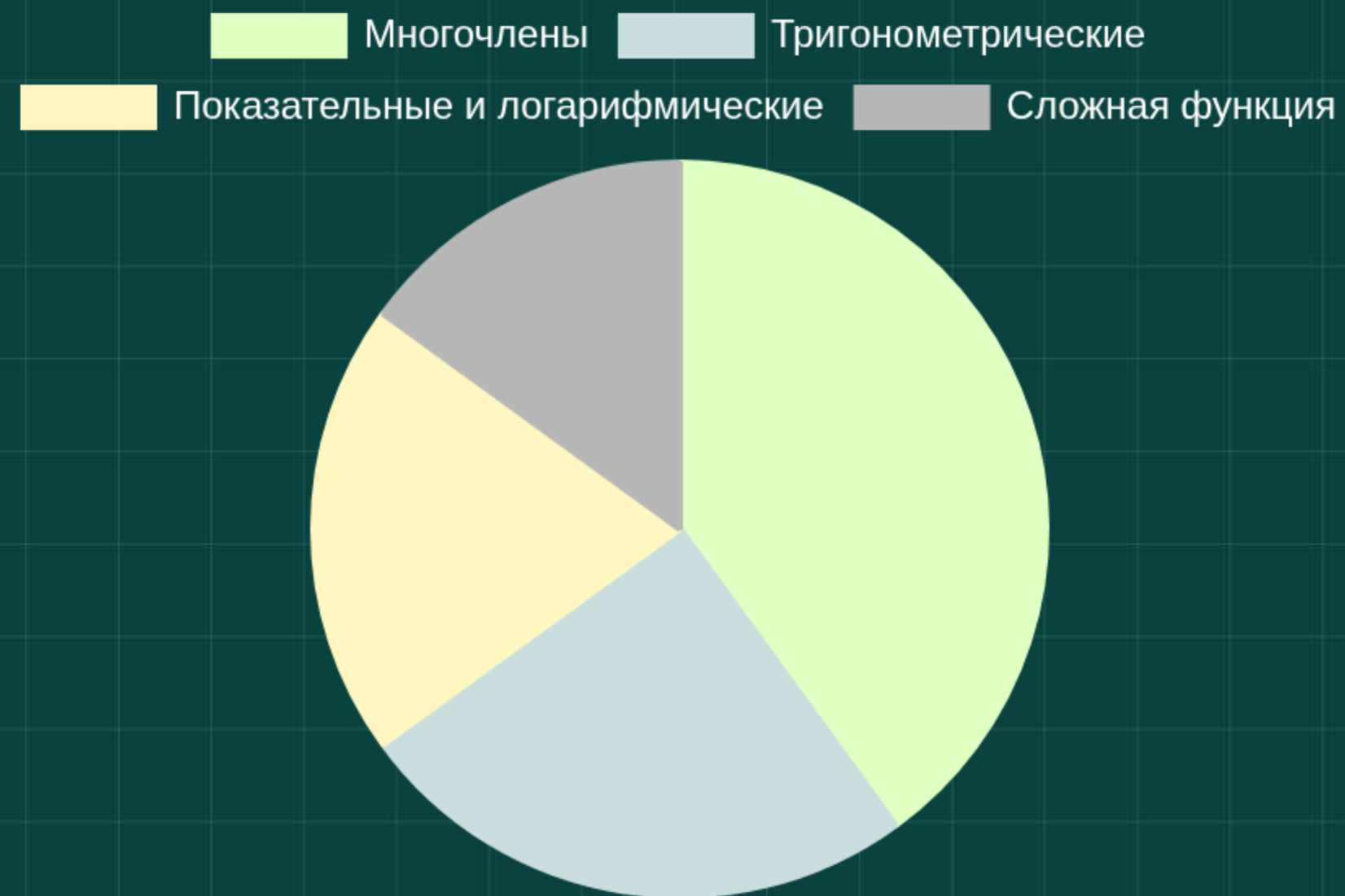


Диаграмма показывает, какие семейства функций чаще всего становятся основой упражнений на производную.

Наибольшую долю составляют многочлены и степенные выражения; остальные типы формируют устойчивые, но меньшие по объёму блоки.



Геометрический смысл производной

6

● Касательная к графику

Производная в точке показывает наклон касательной к графику функции. Чем больше значение производной, тем круче поднимается прямая в этой точке.

● Рост и убывание

Если производная положительна, функция возрастает; если отрицательна, убывает. Это позволяет по знаку производной сразу читать поведение графика на промежутках.

● Критические точки

При нулевом значении производной наклон касательной становится горизонтальным. Такая точка может быть максимумом, минимумом или точкой перегиба, поэтому требует дополнительного анализа.

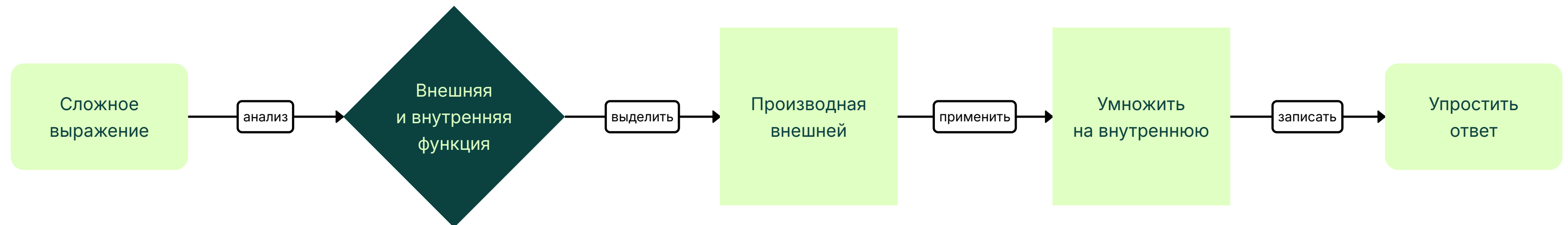
● Связь с рисунком

На схеме удобно видеть сам график, касательную и точку касания. Такой визуальный подход помогает не заучивать формулу механически, а понимать её геометрический смысл.



Как найти производную сложного выражения

Правило цепочки в последовательной схеме применения



Этого набора достаточно, чтобы быстро решать большинство примеров на производную и не тратить время на повторный вывод базовых правил.

Школьный курс алгебры и начал математического анализа, 11 класс



8

основных формул производных нужно уверенно помнить для стандартных школьных задач.

Типичные ошибки при нахождении производных

Неверно	Верно	Ошибка
$(\sin x)^2' = 2\sin x$	$2\sin x \cdot \cos x$	забыта цепочка
$(x^n)' = n x^n$	$n x^{(n-1)}$	не уменьшен показатель
$(\cos x)' = \sin x$	$-\sin x$	пропущен минус

В таблице собраны наиболее частые неверные записи и причины, по которым они возникают.

Большинство ошибок связано с неверным применением правила цепочки и невнимательностью к знакам.



Первообразная и неопределённый интеграл

10

1

Определение

Первообразная функции — это такая функция, производная которой совпадает с исходной. Это определение связывает новую тему с уже знакомым действием дифференцирования.

2

Запись решения

Все первообразные одной функции объединяют в неопределённый интеграл: к найденной функции обязательно добавляют константу C . Она отражает бесконечное число вариантов.

3

Зачем нужна константа

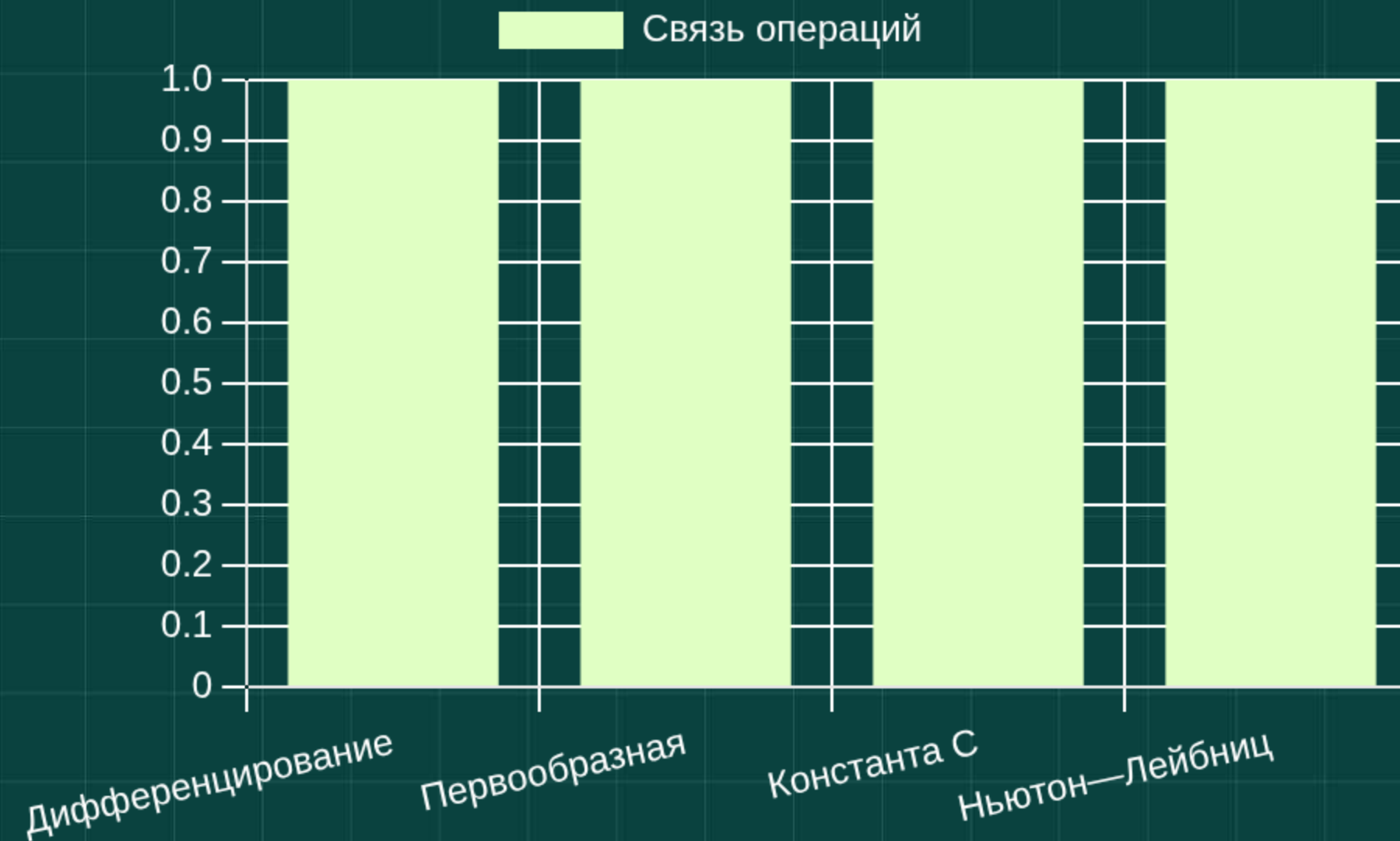
Постоянная исчезает при дифференцировании, поэтому по одной производной нельзя восстановить единственную исходную функцию. Именно поэтому результат всегда записывают с C .

4

Школьный смысл

Понимание первообразной помогает решать обратные задачи: от производной переходить к функции, а затем использовать это в вычислениях площадей и накопленных изменений.

Связь производной и первообразной

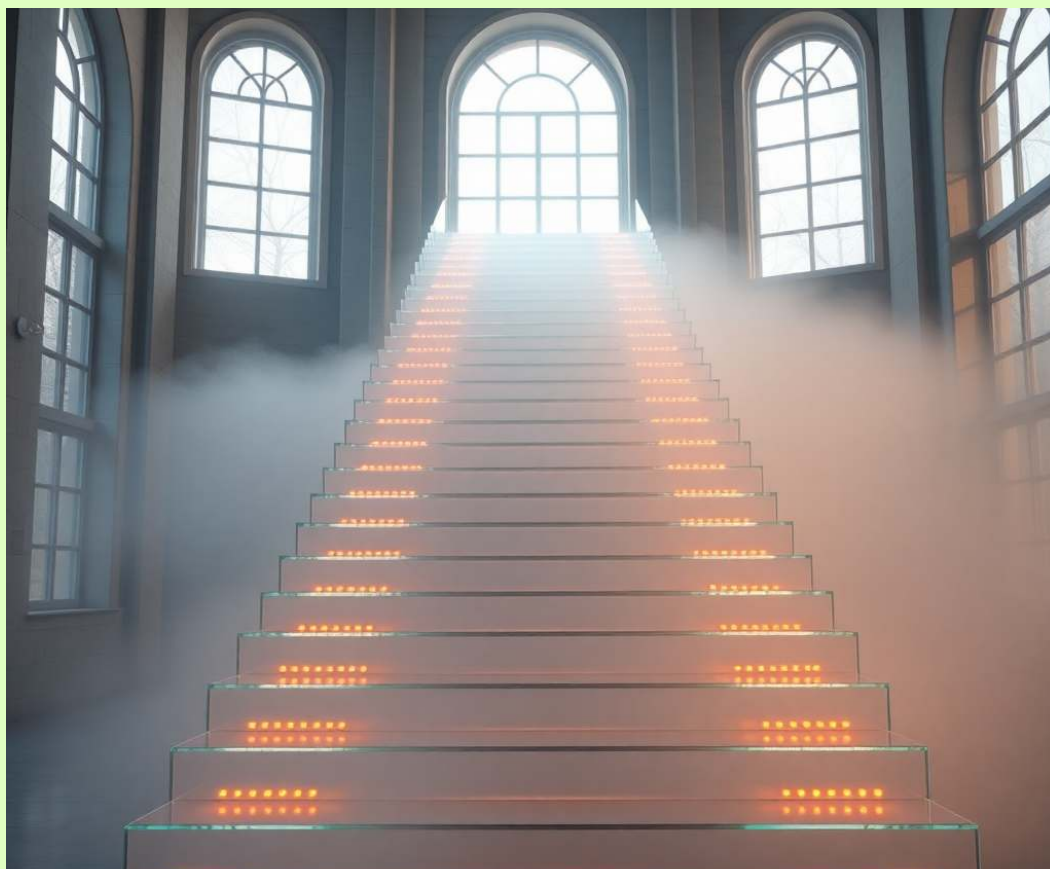


Обе операции действуют в противоположных направлениях и соединяются через одну и ту же таблицу стандартных функций.

Производная и первообразная образуют взаимно дополняющую пару: одна показывает изменение, другая восстанавливает исходную функцию.



От знака функции к форме первообразной



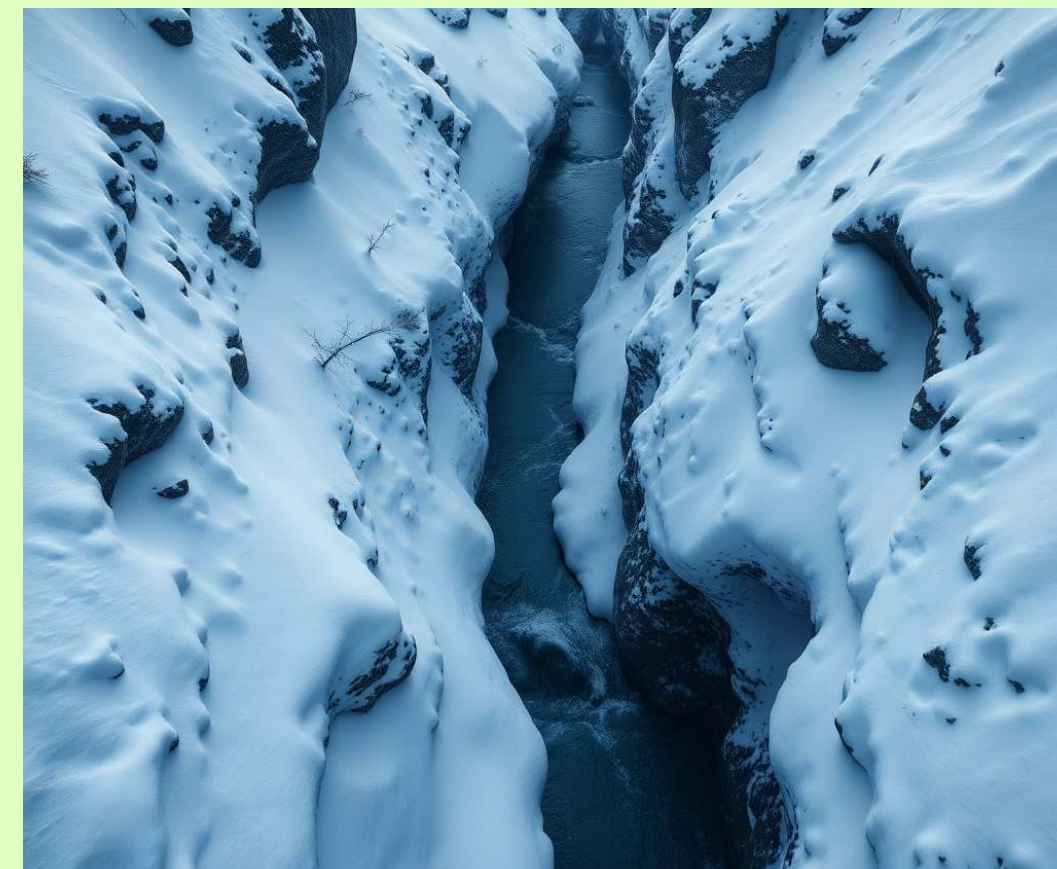
Когда функция положительна

Если значения $f(x)$ выше оси Ox , то первообразная $F(x)$ всё время растёт. На графике это видно как плавный подъём линии: положительный знак функции превращается в положительный наклон первообразной, а скорость роста зависит от величины $f(x)$.



Переход через нуль

В точках, где $f(x)=0$, наклон первообразной становится нулевым. На рисунке такой участок выглядит как горизонтальная касательная или короткая пауза в изменении графика, что помогает увидеть связь между значением функции и её геометрическим поведением.



От отрицательных значений к убыванию

Когда $f(x)$ расположена ниже оси Ox , график первообразной идёт вниз. Чем дольше функция остаётся отрицательной, тем заметнее спад $F(x)$, поэтому по виду первообразной можно восстановить, на каких промежутках исходная функция принимала отрицательные значения.

Основные формулы первообразных

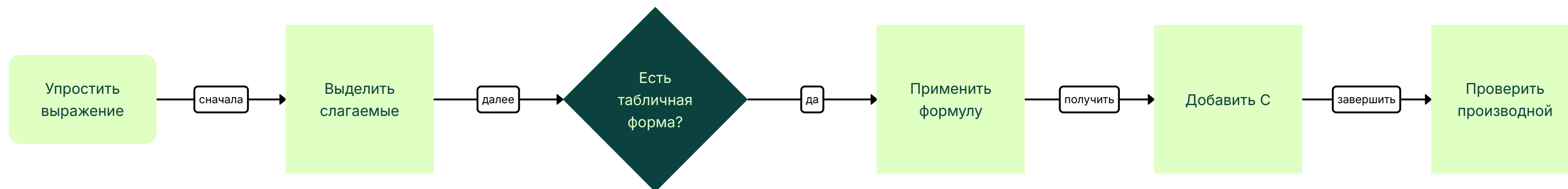
Функция	Первообразная	Условие
x^n	$x^{(n+1)/(n+1)}+C$	$n \neq -1$
$1/x$	$\ln x +C$	$x \neq 0$
e^x, a^x	$e^x+C, a^x/\ln a+C$	$a>0, a \neq 1$
$\sin x, \cos x$	$-\cos x+C, \sin x+C$	всегда

Краткая таблица наиболее употребительных первообразных для школьных задач.

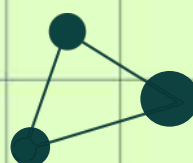
Формулы первообразных идут парами к таблице производных и позволяют быстро проверять результат дифференцированием.

Как находить первообразную по таблице

Последовательность действий при решении простейших интегралов в школьном курсе.

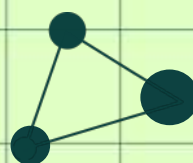


Приём замены переменной в простых интегралах



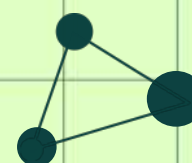
Ищем внутреннюю часть

Сначала выделяют выражение, которое повторяется внутри функции, и проверяют, есть ли рядом его производная. Это позволяет заменить громоздкую запись одной буквой и сократить вычисления до знакомой табличной формулы.



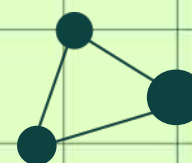
Пример с тригонометрией

Для $\int \cos(3x)dx$ и $\int e^{(5x)}dx$ внутренняя функция проста: $3x$ или $5x$. После замены переменной появляется обычная табличная формула, а множитель от внутренней производной корректирует ответ.



Пример с дробью

В интеграле вида $\int (2x)/(x^2+1)dx$ удобно положить $u=x^2+1$. Тогда числитель $2x dx$ превращается в du , а вся задача сводится к интегралу $\int du/u$, который сразу даёт логарифм.



Почему приём полезен

Замена переменной помогает распознавать стандартную структуру там, где запись кажется сложной. В школьных задачах этот способ особенно удобен, потому что он сохраняет логику решения и уменьшает число промежуточных преобразований.

Степенные функции: переход от производной к первообразной



Степенная формула остаётся самой удобной для запоминания: показатель меняется на единицу, а коэффициент отражает правило дифференцирования.

Регулярность переходов делает степенные функции главным ориентиром при проверке производных и первообразных.



Движение, скорость, ускорение



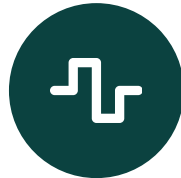
Путь и скорость

Если задан путь $s(t)$, то производная $s'(t)$ показывает мгновенную скорость движения. Это позволяет по графику пути быстро понять, где объект движется быстрее, а где почти останавливается.



Скорость и ускорение

Производная скорости даёт ускорение: $a(t)=v'(t)$. В задачах это помогает отличать равномерное движение от неравномерного и объяснять, почему график скорости меняется именно так.



Площадь под графиком

Первообразная возвращает накопленное изменение: по скорости находят путь, а по интенсивности процесса — общий результат. Теорема Ньютона—Лейбница связывает этот смысл с площадью под графиком.

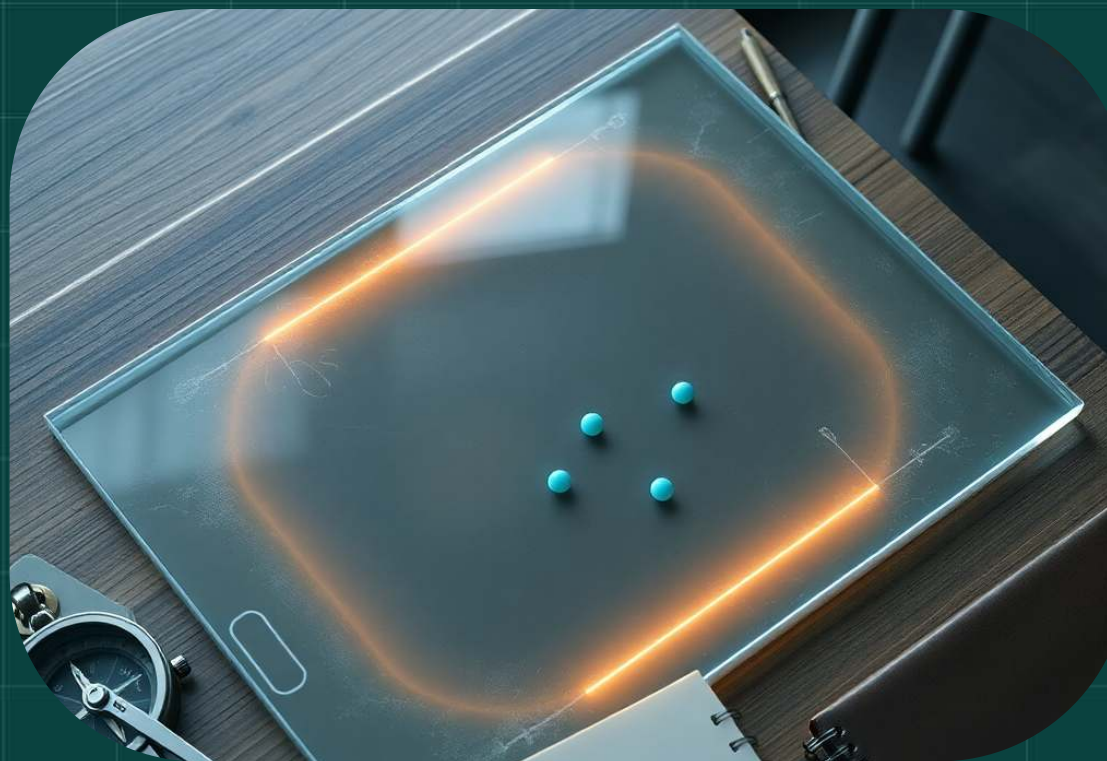
Мини-набор формул для контрольной работы

Формула	Условие	Ошибка
$(f+g)'=f'+g'$	сумма	забывают минусы
$(fg)'=f'g+fg'$	произведение	дифференцируют по одному
$(f/g)'=(f'g-fg')/g^2$	$g \neq 0$	теряют квадрат
$(f(g))'=f'(g) \cdot g'$	есть внутренняя	забывают g'

Сводка самых нужных формул и типичных условий их применения.

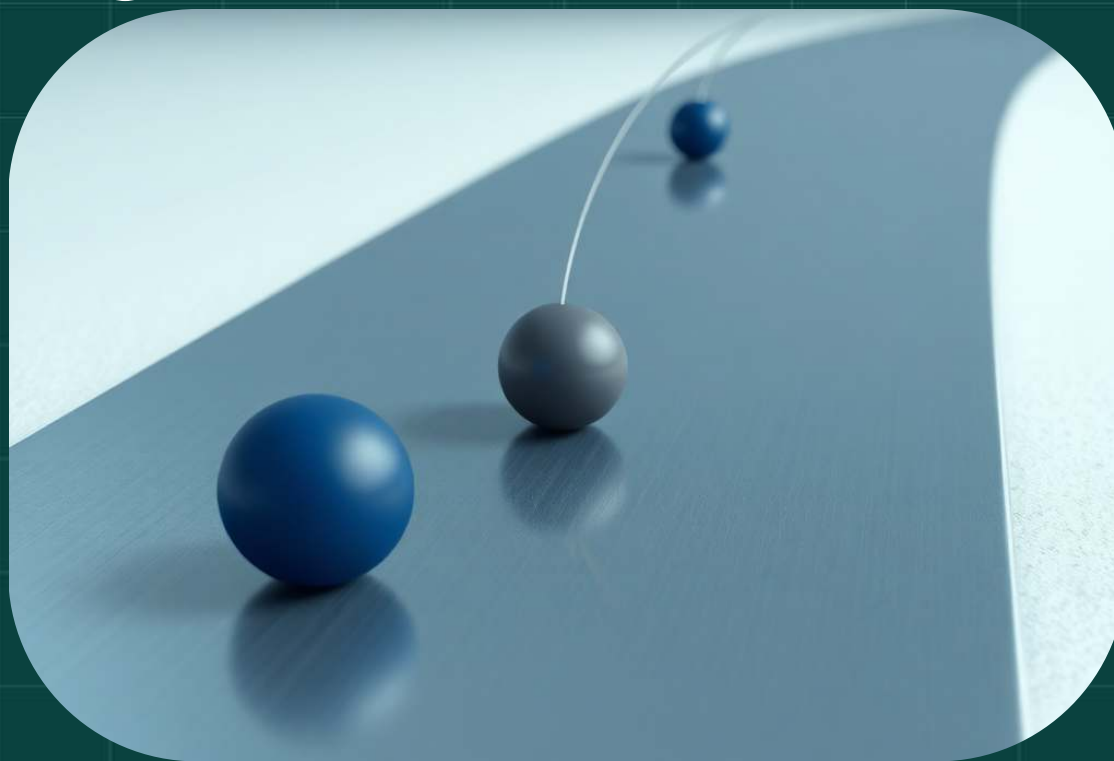
Эти четыре правила закрывают большую часть заданий на производную и подсказывают, где чаще всего возникают ошибки.

Производная как инструмент исследования функции



От области определения к знаку производной

Исследование начинают не с графика, а с самой функции: сначала находят область определения, затем вычисляют производную. После этого смотрят, где $f'(x)$ положительна, где отрицательна и где равна нулю, чтобы понять поведение графика на каждом промежутке.



Критические точки и экстремумы

Точки, в которых производная обращается в нуль или не существует, становятся кандидатами на экстремум. Их анализ показывает, где функция переходит от возрастания к убыванию или наоборот, а значит, помогает точно определить вершины и впадины графика.



График как итог исследования

После определения знака производной строят таблицу промежутков и по ней набрасывают график. Такой подход позволяет не угадывать форму кривой, а выводить её из свойств функции, что особенно важно в задачах школьного анализа.



Одна тема — две взаимодополняющие операции

Таблица производных и таблица первообразных работают как единая система: одна позволяет исследовать функцию, другая — восстанавливать её. Вместе они дают точный инструмент для решений в 11 классе.