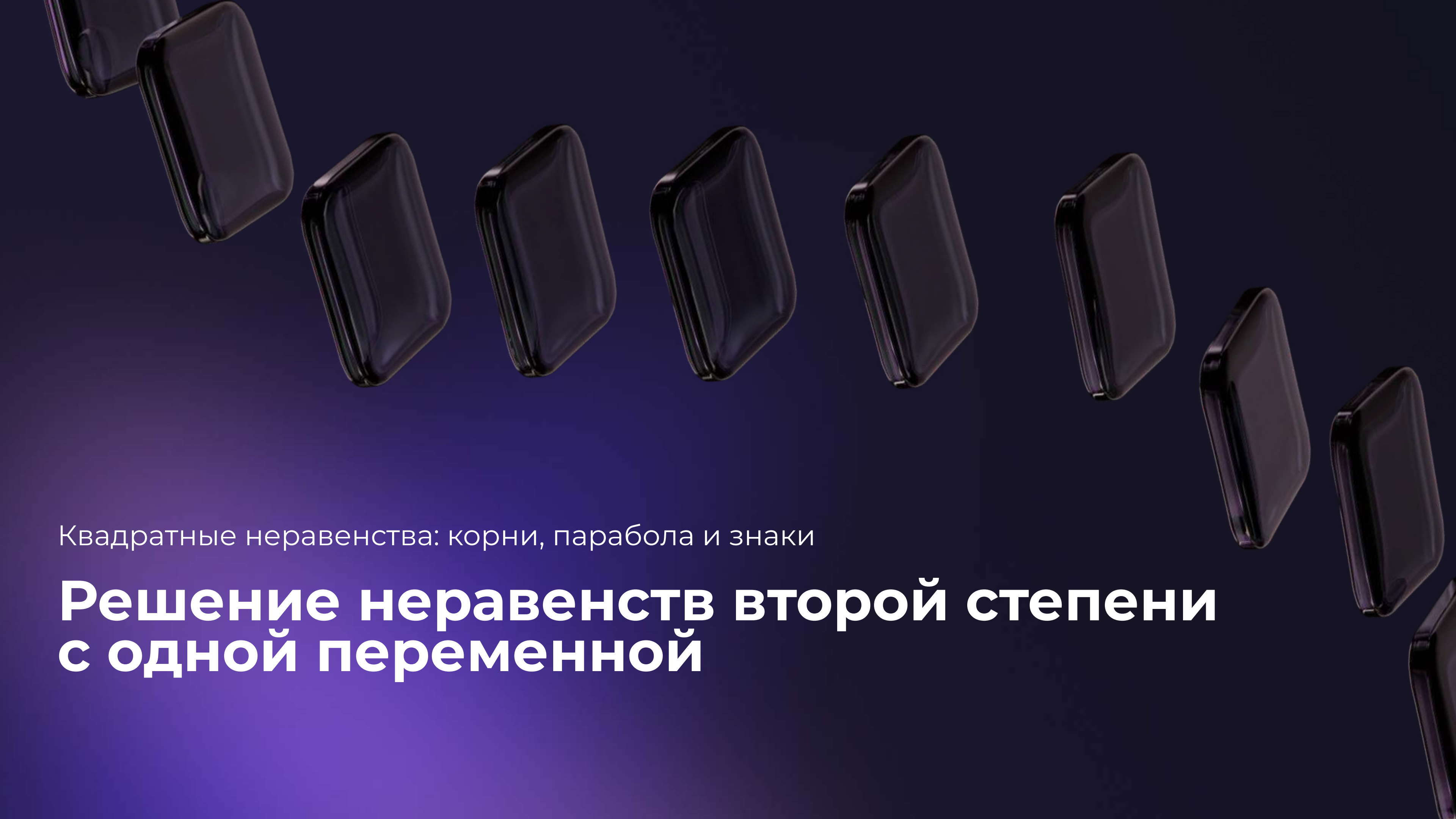




Квадратные неравенства: корни, парабола и знаки

Решение неравенств второй степени с одной переменной



Зачем нужны квадратные неравенства

Они помогают находить допустимые значения, сравнивать числа и читать графики. В 9 классе эта тема связывает формулы с поведением параболы на числовой прямой и встречается в самых разных задачах.

Общий вид квадратного неравенства

01 Запись неравенства

Квадратное неравенство содержит выражение ax^2+bx+c и один из знаков сравнения. Именно оно задаёт условие, которое нужно проверить для разных значений переменной на числовой прямой.

02 Роль коэффициента a

Коэффициент a показывает направление ветвей параболы. Если a больше нуля, ветви направлены вверх; если a меньше нуля, график открывается вниз и меняет расположение положительных промежутков.

03 Строгие знаки

$>$ и $<$ означают, что границы ответа не включаются. Корни могут служить только точками, где выражение равно нулю, но сами в ответ не входят.

04 Нестрогие знаки

Знаки $\geq$ и $\leq$ разрешают включать корни в ответ. Это происходит тогда, когда найденные точки действительно существуют и подходят под условие задачи без исключения.

Парабола и смысл решения на графике

Выше оси Ox

Если график функции расположен выше оси Ox , то значение выражения положительное. Для неравенства >0 подходят именно те x , при которых кривая находится в этой области.

Ниже оси Ox

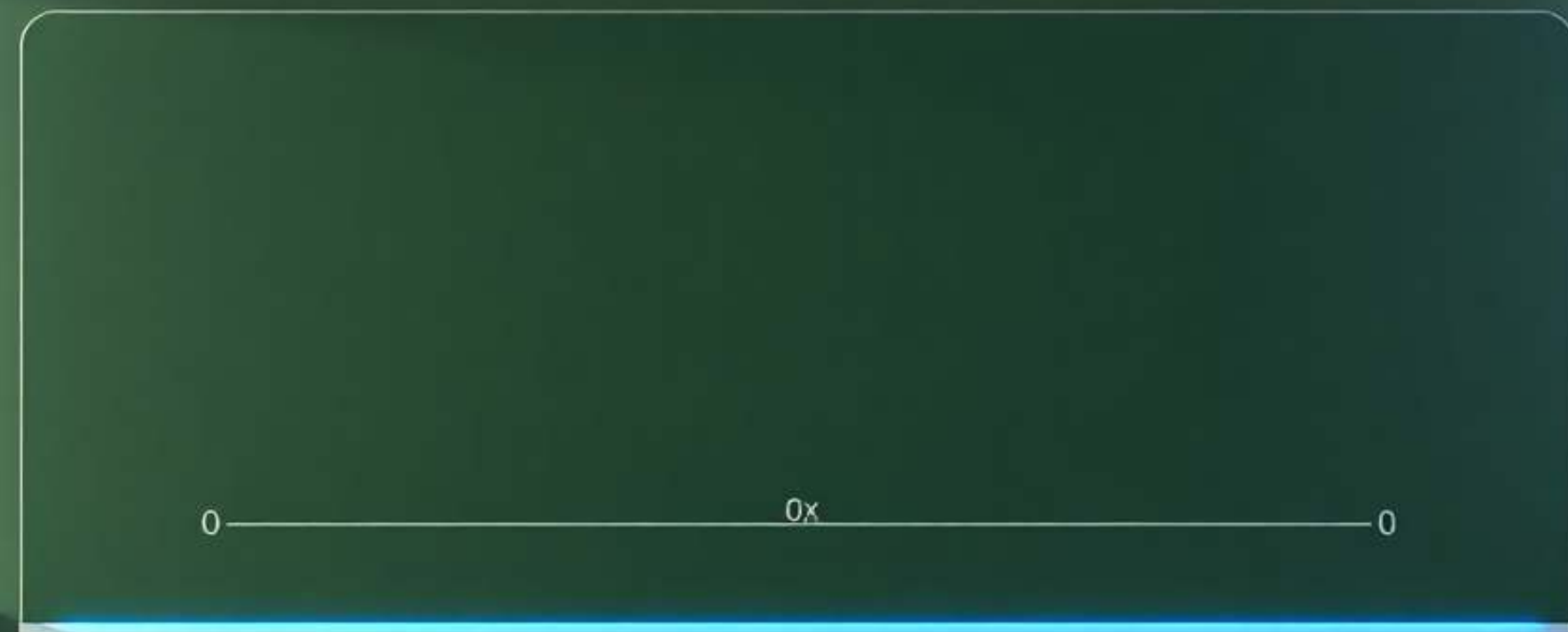
Когда парабола лежит ниже оси Ox , выражение отрицательно. Значит, для неравенства <0 нужно выбрать все значения x , соответствующие этому участку графика.

Точки пересечения

Точки, в которых график пересекает ось Ox , дают корни квадратного трёхчлена. В этих местах значение выражения равно нулю, и именно они делят прямую на части.

Границы ответа

Если неравенство нестрогое, корни могут войти в ответ. Если оно строгое, граничные точки исключаются, потому что в них выражение уже не больше и не меньше нуля.



Связь знака неравенства и ответа

Таблица показывает, какие части графика подходят для каждого вида неравенства и входят ли граничные точки в ответ.

Вид	График	Корни	Ответ
>0	выше оси	нет	интервалы
≥ 0	выше и ось	да	с корнями
<0	ниже оси	нет	интервалы
≤ 0	ниже и ось	да	с корнями

Строгие знаки дают только промежутки, а нестрогие позволяют добавить корни, если они есть.

Обобщение свойств квадратной функции и знаков неравенств

Первый шаг: приведение к стандартному виду

01

Собрать слева

Все слагаемые переносят в левую часть, а справа оставляют ноль. Так легче увидеть квадратный трёхчлен и сразу начать поиск его корней.

02

Упростить выражение

После переноса нужно раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и записать выражение короче. Чем аккуратнее получен вид, тем меньше ошибок на следующих шагах.

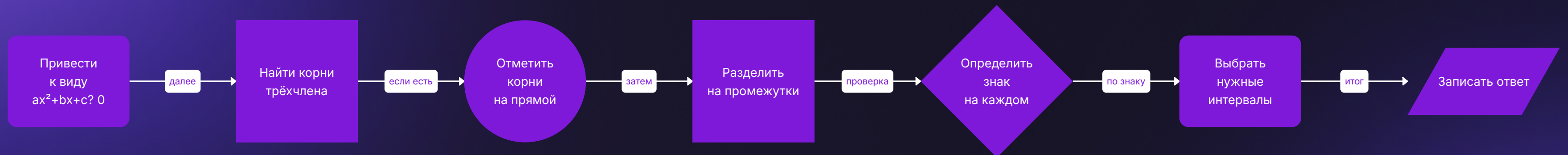
03

Проверить форму

Если слева остался один многочлен второй степени, неравенство уже готово к решению. Например, $3x^2 - 12x + 9 \leq 0$ сразу показывает стандартную запись.

Алгоритм решения квадратного неравенства

Последовательность шагов от записи до ответа



Как находят корни квадратного трёхчлена

Формула дискриминанта

Сначала вычисляют дискриминант $D=b^2-4ac$. Он показывает, сколько действительных корней будет у квадратного трёхчлена, и помогает заранее понять, как делить числовую прямую.

Два корня

Если $D>0$, уравнение имеет два различных действительных корня. Они разбивают прямую на три промежутка, где знак выражения уже можно проверить отдельно.

Один корень

Когда $D=0$, получается один двойной корень. График лишь касается оси Ox , а знак выражения по обе стороны от этой точки не меняется.

Нет корней

Если $D<0$, действительных корней нет. Тогда график не пересекает ось Ox , и знак выражения сохраняется одинаковым на всей числовой прямой.

Три случая по значению дискриминанта

Диаграмма показывает, что чаще всего приходится различать именно число корней, потому что от него зависит дальнейшая схема решения неравенства.

Если D неотрицателен, возможны пересечения или касание оси Ox ; при $D < 0$ пересечений нет, и знак сохраняется.

Обобщённые свойства квадратного трёхчлена

Схема знаков на числовой прямой

01 Разделить прямую

Найденные корни делят числовую прямую на участки, где знак квадратного трёхчлена не меняется. Если корней два, промежутков становится три.

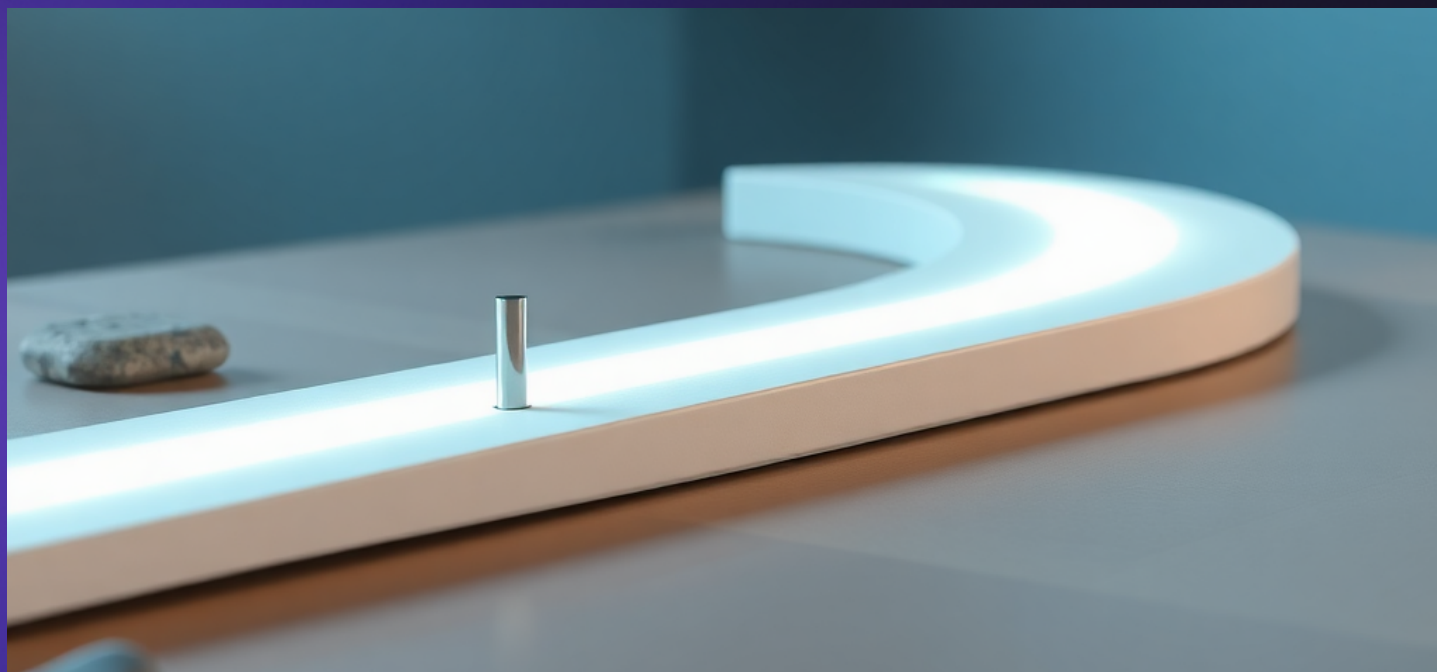
02 Выбрать проверку

На каждом промежутке берут удобное контрольное число и подставляют его в выражение. По полученному знаку определяют, подходит ли этот участок для ответа.

03 Учесть коэффициент a

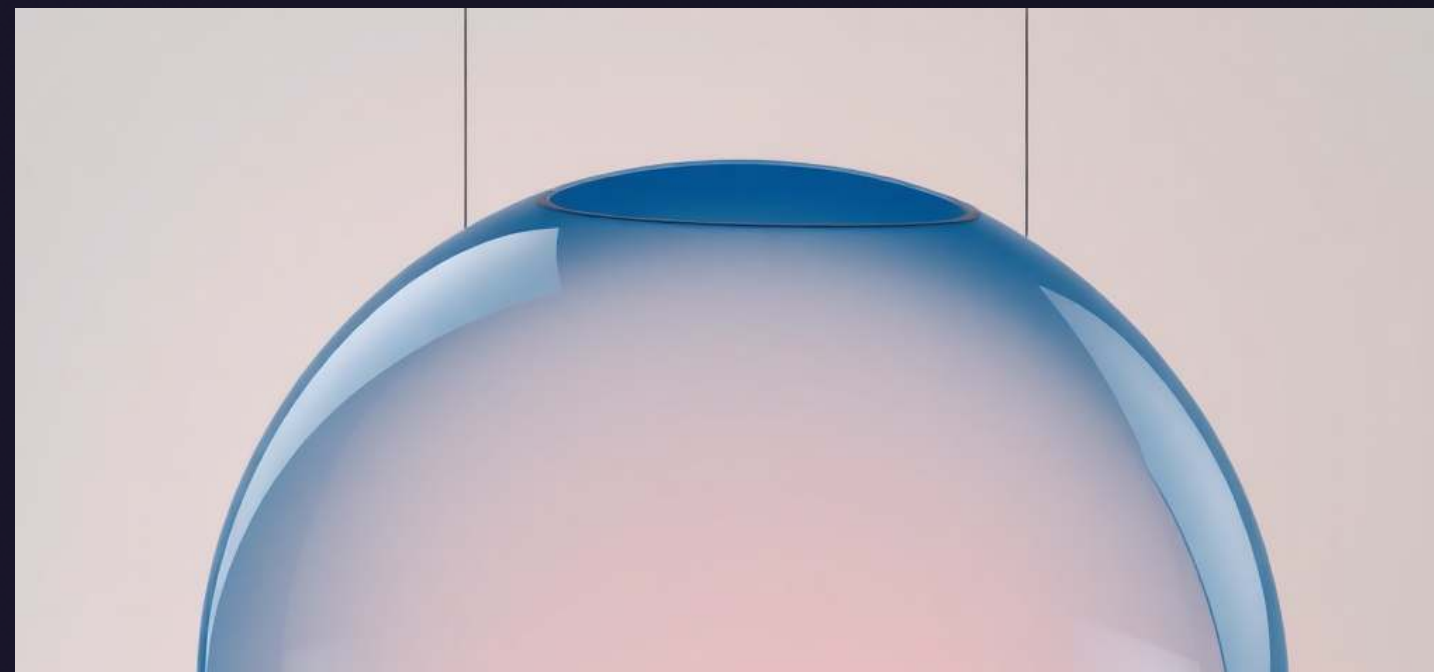
Парабола с ветвями вверх и вниз даёт разное расположение плюсов и минусов. Поэтому при составлении схемы всегда учитывают знак коэффициента a .

Знак коэффициента a и ответ



Ветви вверх — решение снаружи

Когда коэффициент a положительный, парабола открывается вверх. Если корня два, то положительные значения выражения находятся левее первого корня и правее второго. На рисунке удобно выделить именно эти внешние участки, а середину оставить для отрицательных значений.



Ветви вниз — решение между корнями

Если a отрицательный, ветви параболы направлены вниз. Тогда при двух различных корнях положительные значения оказываются между ними, а по краям — отрицательные. Такое сравнение хорошо видно на двух одинаковых корнях, но с разным направлением ветвей.

Случай двух различных корней

01

Два корня на прямой

При $D > 0$ квадратный трёхчлен имеет два действительных корня x_1 и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Эти точки делят числовую прямую на три промежутка, где знак выражения можно проверить по одному числу.

02

Когда a положительно

Если $a > 0$, то для неравенства > 0 подходят внешние промежутки, а для < 0 — только отрезок между корнями. В нестрогих случаях корни тоже включаются в ответ.

03

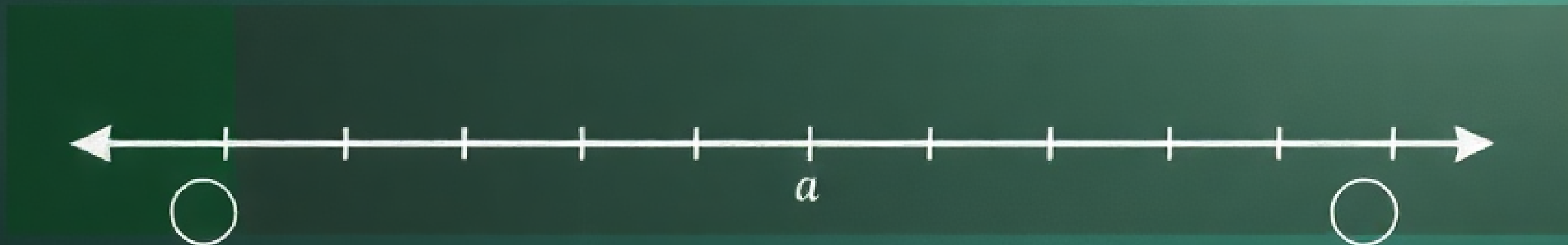
Когда a отрицательно

При $a < 0$ знаки меняются местами: > 0 выполняется между корнями, а < 0 — вне их. Если знак нестрогий, границы x_1 и x_2 входят в ответ как отдельные точки.

04

Как записать ответ

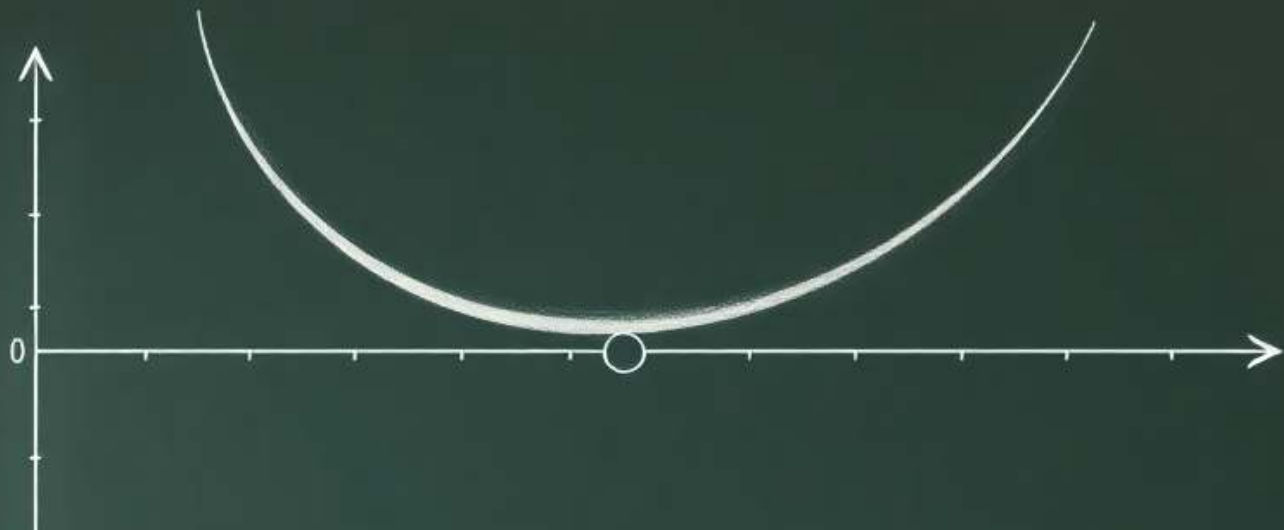
Сначала упорядочивают корни, затем выбирают нужные промежутки по знаку неравенства. Ответ записывают как интервалы или отрезок, не забывая про круглые скобки у строгих знаков.



Случай одного двойного корня

01 Одна точка касания

Если $D=0$, то квадратный трёхчлен можно представить как $a(x-x_0)^2$. График касается оси Ox в одной точке x_0 и не пересекает её, поэтому знак по сторонам от корня не меняется.



02 Строгие неравенства

Для >0 или <0 точка x_0 в ответ не входит. Решение зависит только от того, положительно или отрицательно выражение на всей прямой, кроме этой единственной точки.

03 Нестрогие неравенства

Если записано ≥ 0 или ≤ 0 , то x_0 обязательно включают в ответ. В таком случае решение может быть всей числовой прямой или всей прямой без одной точки, в зависимости от знака a .

Случай без действительных корней

Корней нет

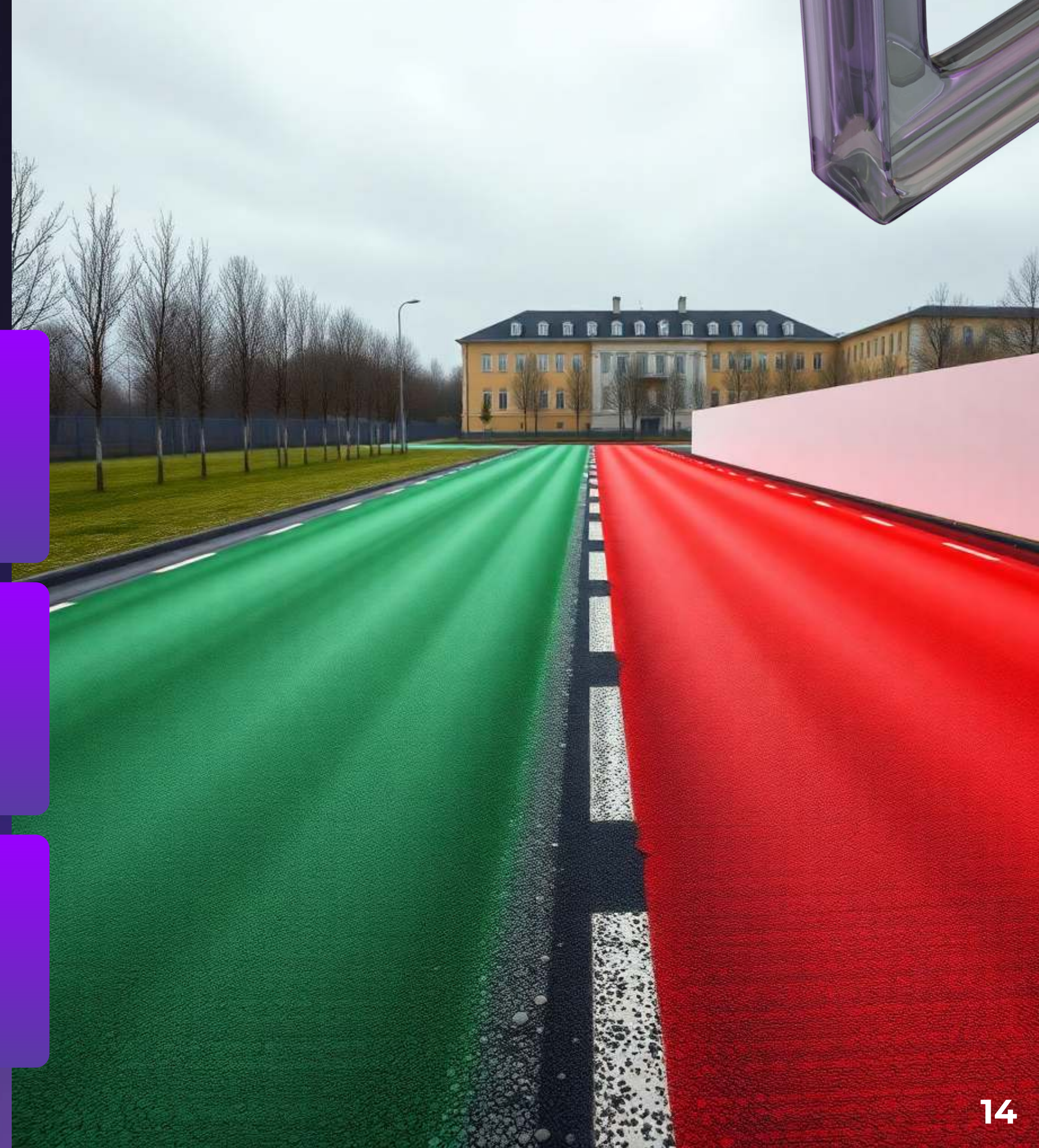
Когда $D < 0$, у квадратного трёхчлена нет действительных корней, и он нигде не обращается в ноль. Значит, числовая прямая не делится на промежутки корнями.

Знак совпадает с a

В этом случае знак выражения на всей прямой одинаковый. При $a > 0$ трёхчлен положителен для любого x , а при $a < 0$ — отрицателен для любого x .

Что может быть ответом

Если знак неравенства совпадает со знаком выражения, ответом становится вся числовая прямая. Если знак противоположный, решений нет, и ответ записывают как пустое множество.



Какие ответы получаются в разных случаях

На диаграмме видно, что число промежутков зависит от знака неравенства и от того, есть ли корни у трёхчлена. Это помогает заранее представить форму ответа.

Два корня обычно дают два промежутка или один отрезок, а отсутствие корней приводит либо к всей прямой, либо к пустому множеству.

Составлено по правилам решения квадратных неравенств; дата не требуется.

Проверка решения на примере $x^2-5x+6\leq 0$



В таблице показаны основные шаги решения и короткая проверка подстановкой контрольного числа.

Негативный знак между корнями подтверждает внутренний промежуток, а нестрогое неравенство включает обе границы.

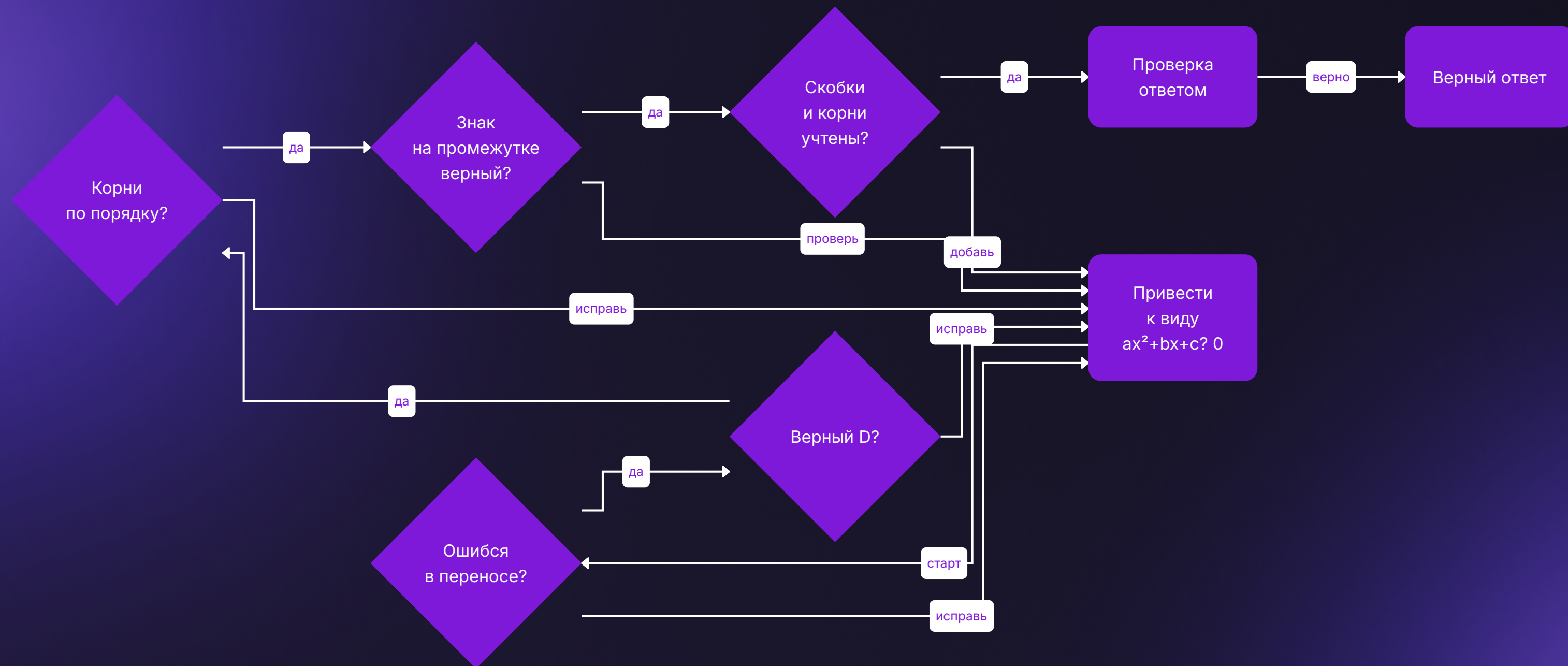
Шаг	Запись	Результат
1	Стандартный вид	$x^2-5x+6\leq 0$
2	Корни	2 и 3
3	Знаки	+, -, +
4	Ответ	[2; 3]

Пример из учебной задачи по квадратным неравенствам



Проверяй шаги, чтобы не ошибиться

Схема показывает самые частые ошибки и место контрольной проверки на каждом выбранном промежутке.

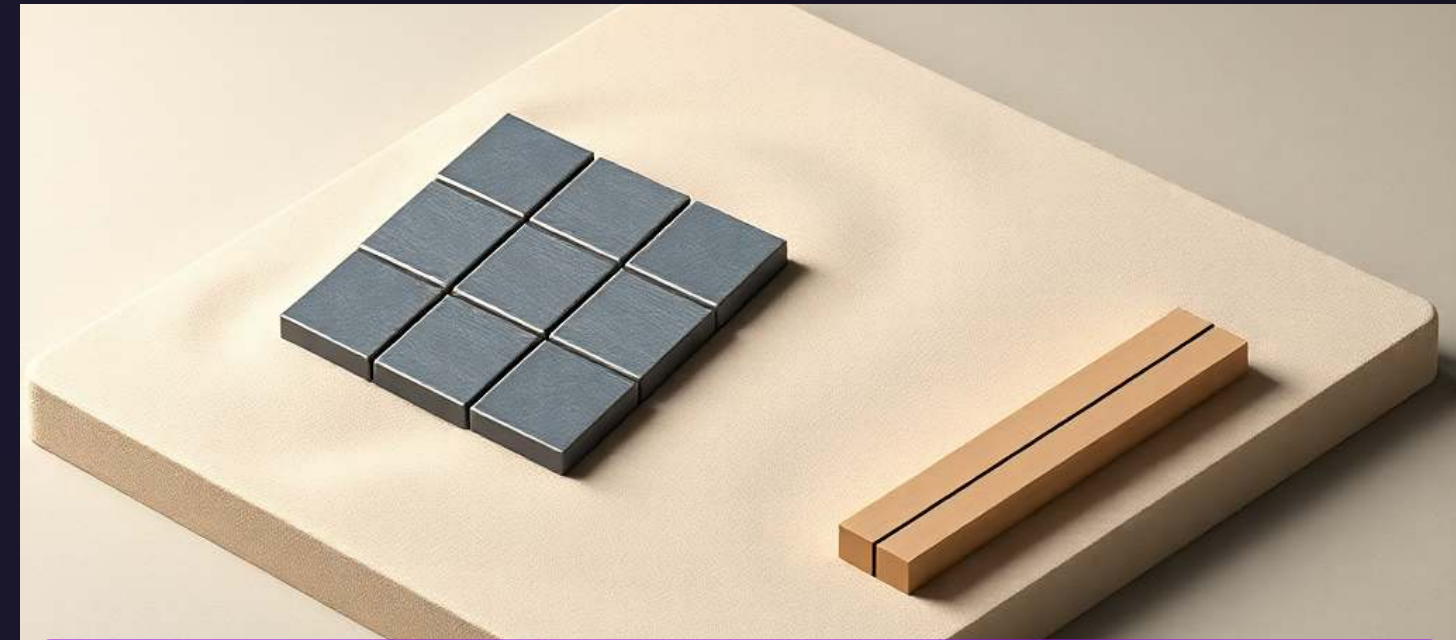


Квадратные неравенства в практических задачах



Когда нужен допустимый диапазон

В задачах на площадь, длину или запас ресурсов часто нужно найти, какие значения переменной подходят по условию. Тогда квадратное неравенство показывает границы допустимого интервала, а лишние значения сразу исключаются из ответа.



Простой пример с квадратом числа

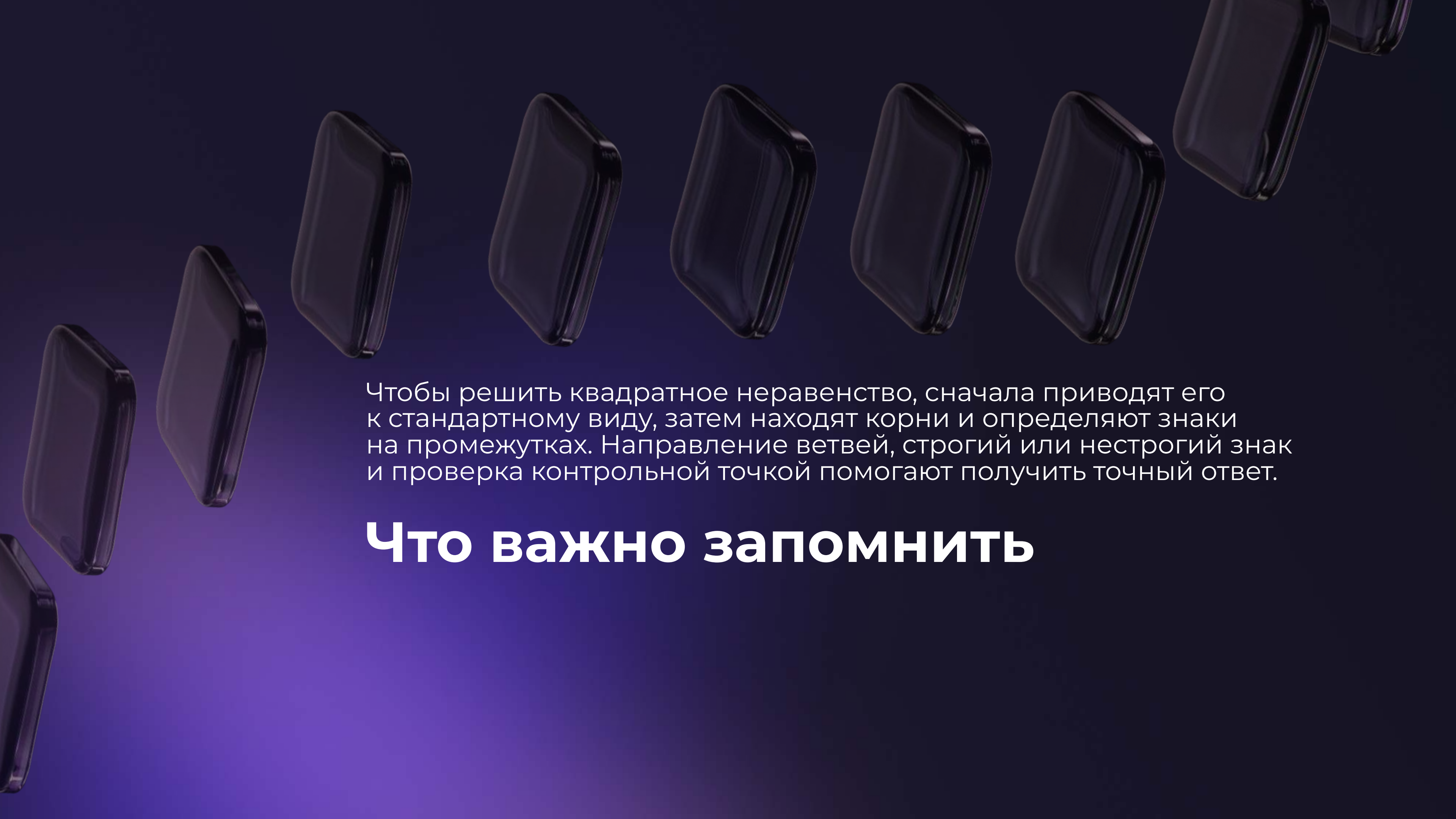
Если $x^2 - 9 < 0$, то квадрат числа меньше девяти. Это значит, что x находится между -3 и 3 , не включая границы. На числовой прямой такой ответ удобно выделять цветом, оставляя концы пустыми.

Три коротких примера для сравнения

Все три записи похожи, но ответы получаются разными из-за знака неравенства и направления ветвей параболы. Это хорошо видно на сравнении графиков решений.

У первого выражения решение состоит из двух внешних интервалов, у второго — из одного отрезка, у третьего — из промежутка между корнями.

Составлено по учебным примерам квадратных неравенств; дата не требуется.



Чтобы решить квадратное неравенство, сначала приводят его к стандартному виду, затем находят корни и определяют знаки на промежутках. Направление ветвей, строгий или нестрогий знак и проверка контрольной точкой помогают получить точный ответ.

Что важно запомнить