



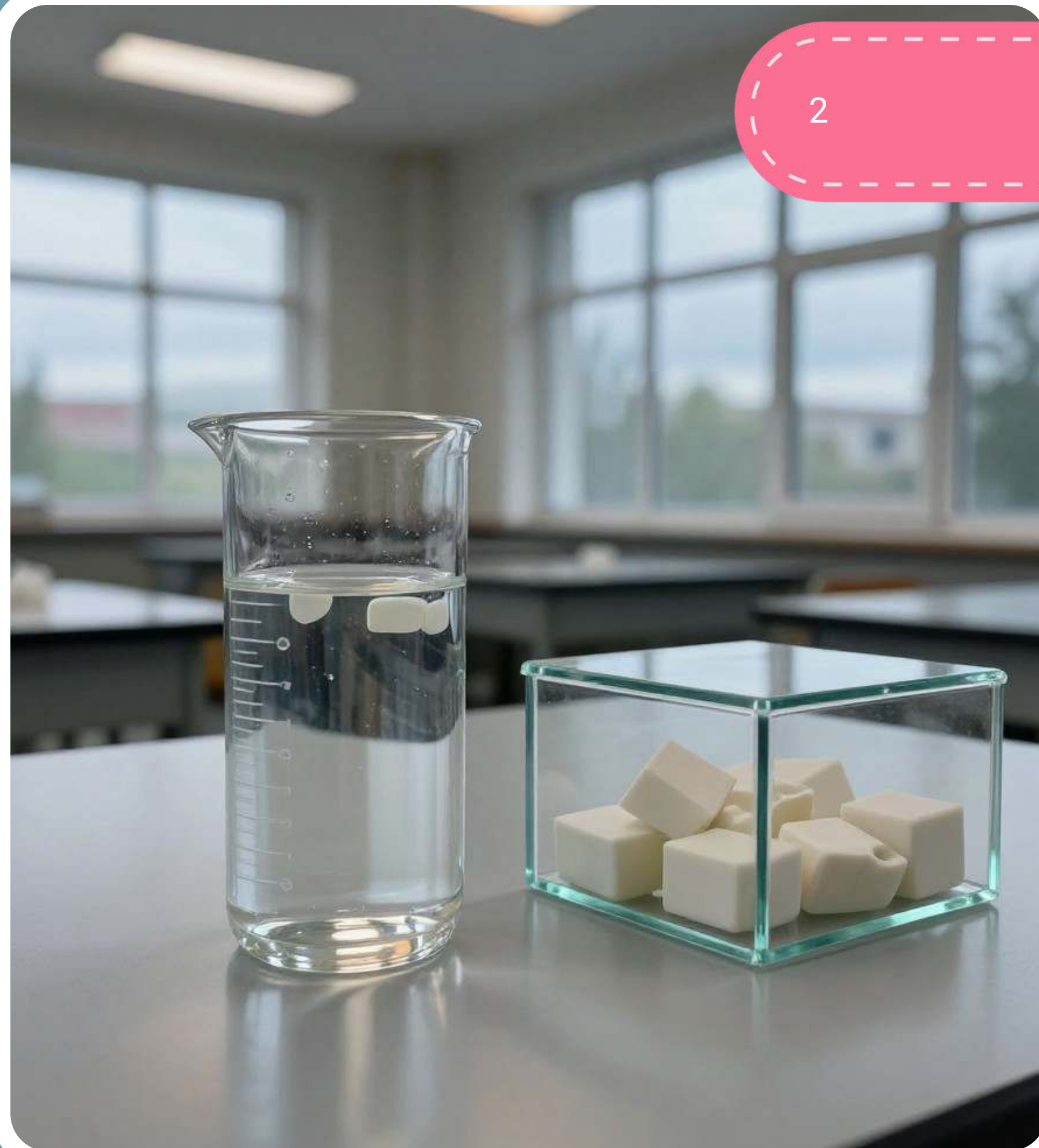
Что такое объём?

Объём показывает, сколько трёхмерного пространства занимает тело или фигура.



Почему объём изучают в 11 классе

Объём нужен для решения стереометрических задач и расчётов вместимости: от объёма сосудов до расхода материалов. В 11 классе это основа тем по призме, пирамиде, цилиндру, конусу и шару, связывающая геометрию с физикой и инженерией.



Смысл объёма в геометрии

3

01

Объём описывает, сколько пространства занимает тело в трёх измерениях. Он включает и «горизонталь», и «высоту», поэтому без объёмных рассуждений многие реальные задачи не решаются.

02

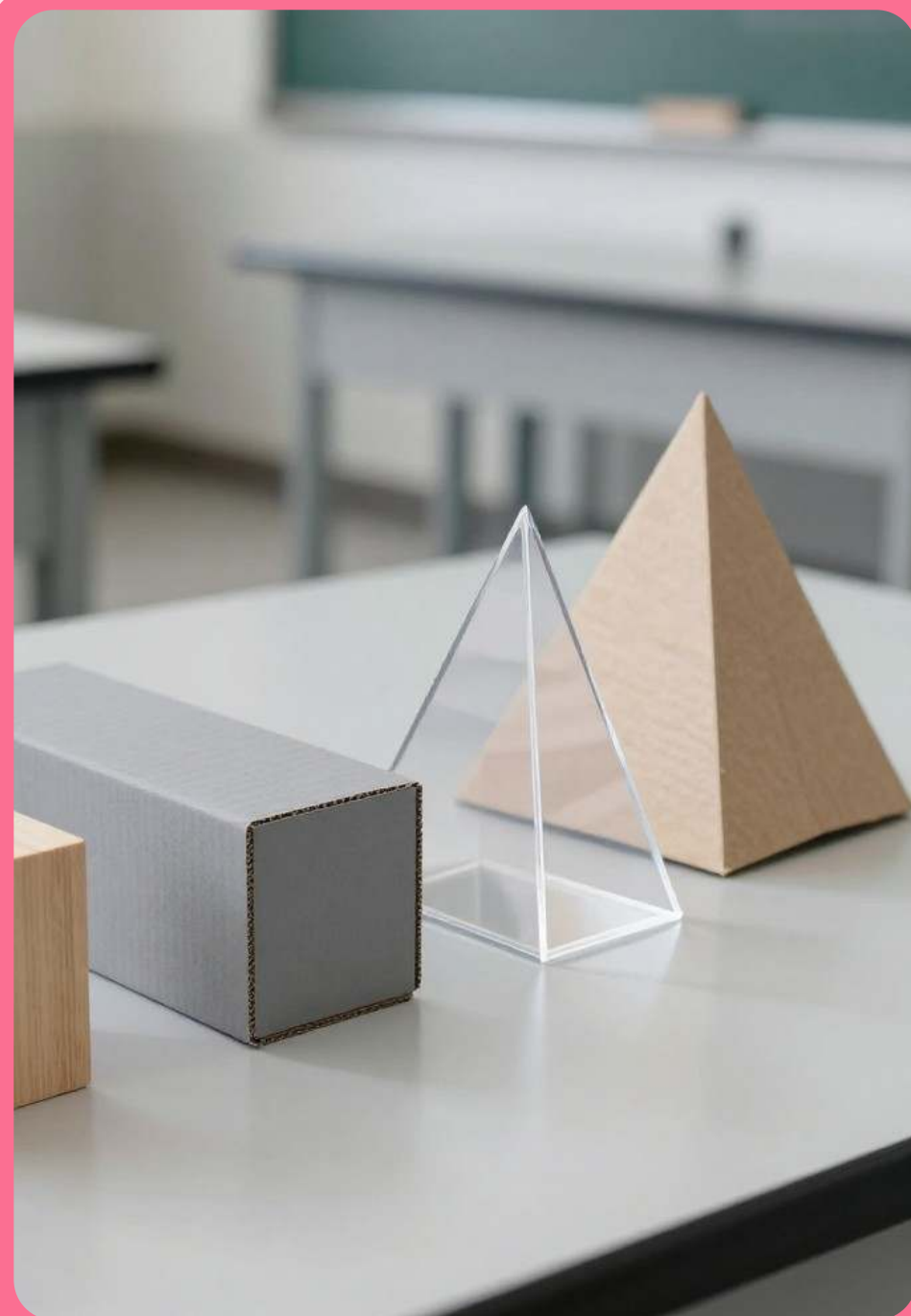
Площадь относится к плоской фигуре, а объём — к телу. Поэтому сравнивать объёмы нужно в одинаковых единицах: число без единицы теряет смысл и приводит к ошибкам.

03

Главная идея темы — переход от плоских измерений к пространственным. Мы учимся выражать величину «места» в формальных единицах и переводить её в вычисления.

Тела, которые имеют объём

4



Какие фигуры рассматриваются

К объёмным фигурам относят куб, прямоугольный параллелепипед, призму, пирамиду, цилиндр, конус и шар. У каждого из них есть не только форма, но и количество «вместимого пространства», которое можно измерять.

Как это выглядит в быту

В повседневной жизни этим фигурам соответствуют коробка, кирпич, банка, ведро, мяч и упаковка конусообразной формы. Поэтому объём удобно понимать через предметы: мы оцениваем вместимость, а затем связываем её с геометрией.

Основные единицы объёма

Сопоставьте единицы объёма и способы их использования в задачах и измерениях.

Единица	Обозначение	Связь	Пример
Кубический миллиметр	мм ³	базовая	малые детали
Кубический сантиметр	см ³	= 1 мл	лекарства
Кубический дециметр	дм ³	= 1 л	бутылки
Кубический метр	м ³	= 1000 л	объём воздуха
Литр	л	= 1 дм ³	вместимость
Миллилитр	мл	= 1 см ³	порции жидкости

Кубические единицы образуют систему, совместимую с литрами: 1 см³ = 1 мл, 1 дм³ = 1 л, 1 м³ = 1000 л.

Единицы объёма в школьном курсе математики и физики (метрическая система).

Как соотносятся кубические единицы

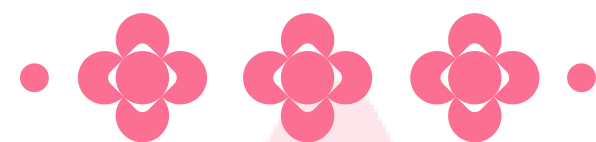
6

Если выразить всё через кубические единицы, то переход от мм^3 к см^3 , дм^3 и м^3 происходит через кратные степени десяти.



Увеличение линейного размера в 10 раз приводит к росту объёма в 1000 раз; связка с литрами: $1 \text{ дм}^3 = 1 \text{ л}$, $1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ л}$.

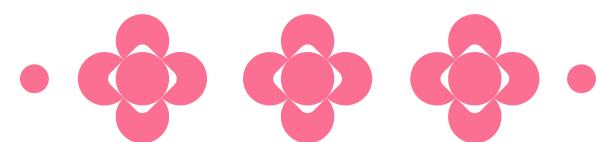
Метрические соотношения: $1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$, $1 \text{ дм} = 10 \text{ см}$, $1 \text{ м} = 10 \text{ дм}$; перевод кубических мер в литры.



$$V = a \times b \times h$$

Произведение трёх взаимно перпендикулярных размеров даёт объём тела.

Принципы школьной стереометрии; общий случай вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда.



Используйте эту формулу, чтобы быстро переходить от линейных размеров к объёму. Главное — одинаковые единицы для всех трёх измерений: тогда ответ будет в нужных кубических единицах.

Куб как модель для счёта объёма

8



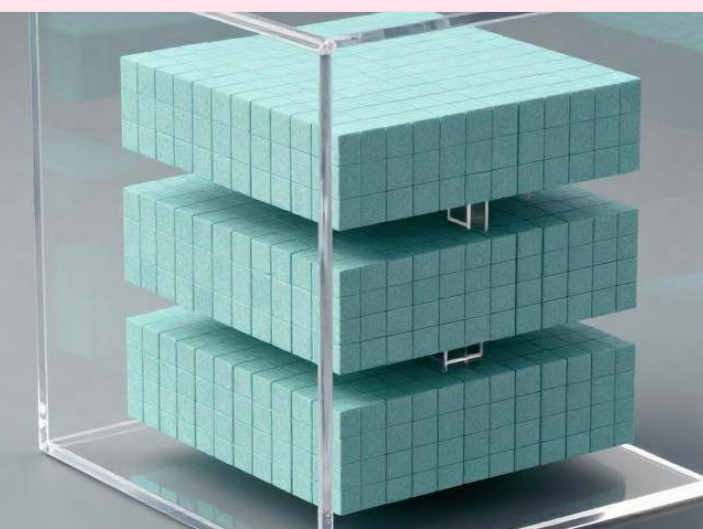
Слой за слоем

Представьте куб, внутри которого можно мысленно разделить пространство на одинаковые маленькие кубики. Каждый такой «единичный куб» соответствует одной кубической единице. Тогда объём превращается в счёт количества кубиков, а не просто в формулу.



Почему именно 27

Если ребро куба равно 3 условным единицам, то вдоль каждого направления укладывается по три маленьких куба. Получается трёхмерная сетка $3 \times 3 \times 3$. Поэтому число единичных кубиков становится 27, а значит, и объём равен 27 кубических единиц.



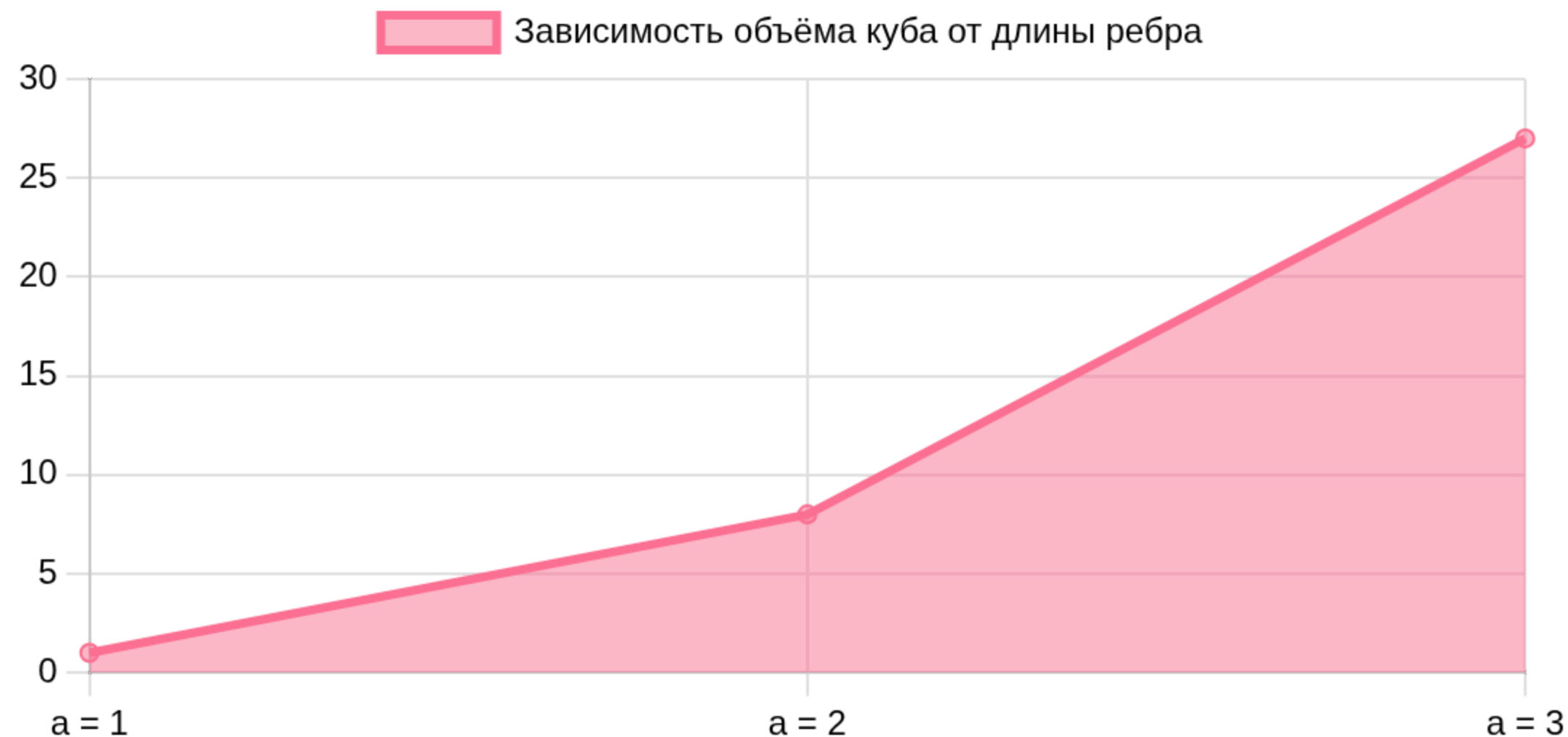
Из формулы — в понимание

Разметка внутренних слоёв помогает увидеть, что объём можно «разложить» на части одинаковой формы. Так формула начинает работать как модель: мы понимаем, за счёт чего увеличивается объём при увеличении стороны. Это особенно полезно в задачах, где цифры нужно интерпретировать.

Как меняется объём при увеличении размеров

9

Здесь показан именно куб: объём определяется третьей степенью линейного размера.



Объём растёт быстрее длины: увеличение в k раз даёт рост объёма в k^3 раз. Поэтому при масштабировании важно учитывать кубический характер величины.

Счёт единичных кубов для куба со стороной a : $V = a^3$; примеры $a = 1, 2, 3$.

Объём цилиндра

10



Объём цилиндра находят как произведение площади основания на высоту: $V = S_{\text{осн}} \times h$. Здесь $S_{\text{осн}}$ — площадь круга, а h — расстояние между основаниями.



Так как основание — круг, его площадь выражается формулой $S = \pi r^2$. Поэтому в цилиндре сначала вычисляют $S_{\text{осн}}$, а затем умножают на h , связывая плоскую фигуру с пространственным телом.



При решении задач важно заранее определить радиус r и высоту h и не забыть про единицы измерения. От их согласованности зависит, в каких кубических единицах получится ответ.

Объём призмы и пирамиды

11

.1 • • •

Для любой призмы объём удобно находить через площадь основания и высоту: $V = S_{\text{осн}} \times h$. Основание — это плоская фигура, а высота показывает расстояние между параллельными плоскостями оснований.

.2 • • •

Для пирамиды формула меняется: $V = (1/3)S_{\text{осн}} \times h$. Смысл тот же — опора на площадь основания и высоту, но коэффициент $1/3$ отражает «сжатие» объёма относительно призмы.

.3 • • •

Если у призмы и пирамиды одинаковые площади оснований и одинаковые высоты, то объём пирамиды в три раза меньше. Это отношение помогает быстро сравнивать фигуры без полного пересчёта.

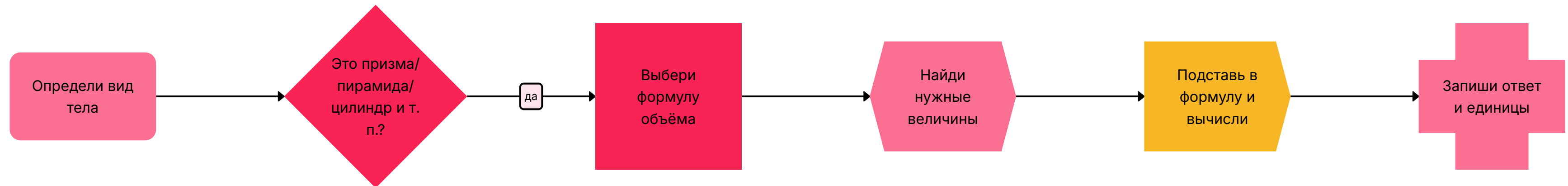
.4 • • •

На практике такая закономерность часто используется в задачах: сначала находят $S_{\text{осн}}$ и h , затем выбирают нужный коэффициент. Так вырабатывается системный подход к стереометрии 11 класса.

Последовательность решения задач на объём

12

Алгоритм помогает выбрать формулу, правильно определить величины и оформить ответ в корректных единицах.



Объём жидкости и измерительные приборы

13



- ★ Жидкости измеряют в литрах и миллилитрах с помощью мензурки, мерного стакана, мерной колбы и шприца. На шкале критичны деления и положение мениска: по ним читают объём.
- ★ Соотношение $1 \text{ л} = 1000 \text{ мл}$ используют при переводе единиц в бытовых и лабораторных задачах. Изображение с мензуркой помогает связать геометрический смысл объёма с реальным измерением.

Типичные ошибки при вычислении объёма

Ошибка	Пример	Правильный подход	Итоговая проверка
Перепутаны единицы	см и мм	Приведи все длины к одной системе	Проверь, что единицы одинаковые во всей формуле
Неверно выбрана высота	h берут как сторону	Используй высоту именно для данной фигуры	Сопоставь h с определением в условии

Сравните распространённые причины ошибок: часто они связаны не с арифметикой, а с неверным выбором данных, высоты и формулы, а также с несогласованными единицами измерения.

Самые частые ошибки возникают из-за несогласованности единиц и неправильного понимания геометрического параметра. Быстрая проверка определений (что именно считается «высотой») снижает ошибки вычислений.

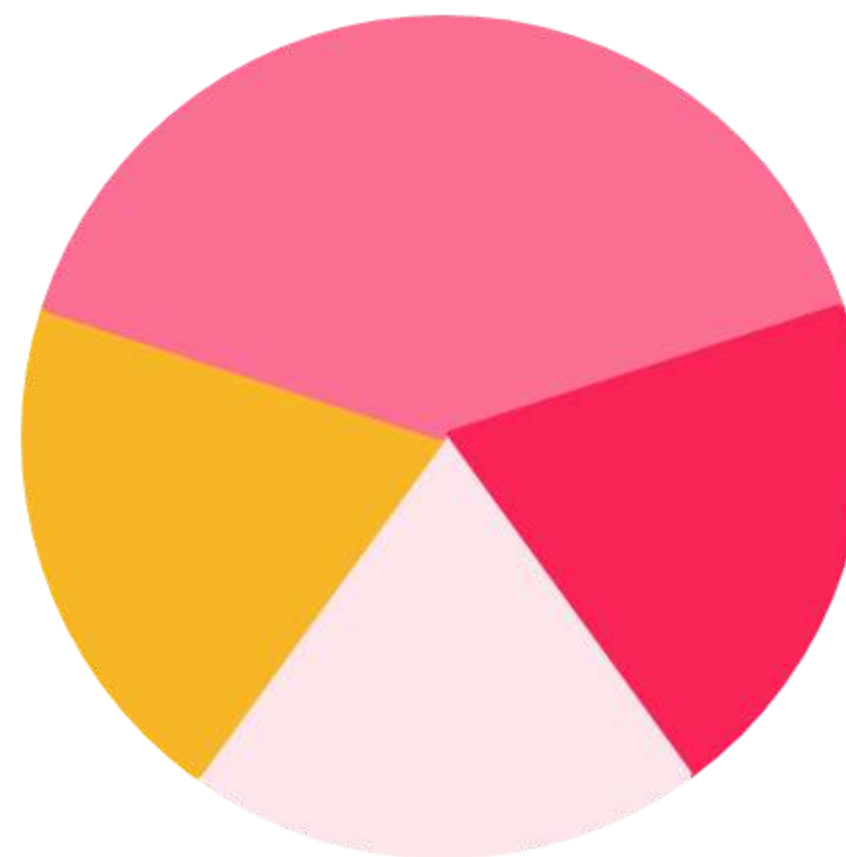
Учебные задания по стереометрии и базовой метрологии (обобщение типичных ошибок).

Где используется объём в жизни и технике

15

Диаграмма показывает направления применения без точных долей: в разных задачах объём нужен для расчёта вместимости, количества материала и корректного дозирования.

Строительство Упаковка и логистика Пищевая промышленность
Медицина Наука и быт



Если рассматривать объём как «сколько помещается», становится проще понимать расчёты в быту и технике: один и тот же принцип работает в упаковке, лаборатории и строительстве.

Сводное учебное обобщение по областям применения (данные не количественные).

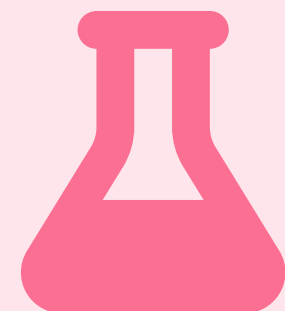
Зачем объём нужен в науке

16



Физика: параметры вещества и сред

В физике объём входит в формулы плотности, массы и давления, а также применяется при описании газов и жидкостей. Без объёма невозможно связать измерения со свойствами вещества.



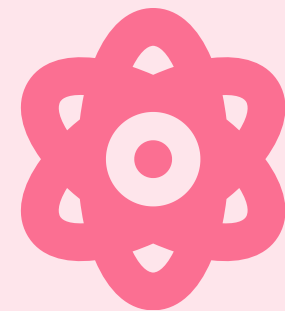
Химия: растворы и дозирование

В химии объём необходим для приготовления растворов и точного дозирования реагентов. Когда задана концентрация, именно объём позволяет перевести «сколько вещества» в реальные измеримые количества.



География и экология: ресурсы и запасы

В географии и экологии объём используют при оценке водохранилищ, озёр, снежных запасов и других природных ресурсов. Количественные выводы опираются на пересчёт вместимости объектов в единицы измерения.



База для количественных расчётов

Объём выступает базовой характеристикой, без которой многие расчёты остаются неполными. Он связывает геометрические модели с реальными процессами: измерениями, анализом и планированием экспериментов.

Объём и вместимость: сходство и различие

17



- ★ Объём тела описывает пространство, которое занимает сам объект в целом. Вместимость характеризует, сколько вещества способен удержать полый предмет или сосуд, то есть учитывает внутреннюю структуру.
- ★ Понятия близки, но не совпадают: у сосуда есть стенки, внутренняя полость и иногда свободное пространство до края. Для коробки, банки или стакана вместимость определяют по внутреннему объёму.

Связь объёма с масштабом фигуры

18

При масштабировании модели важно различать рост линейных размеров и рост объёма. Закон подобия говорит, что объём зависит от куба коэффициента k , поэтому увеличения становятся очень заметными.

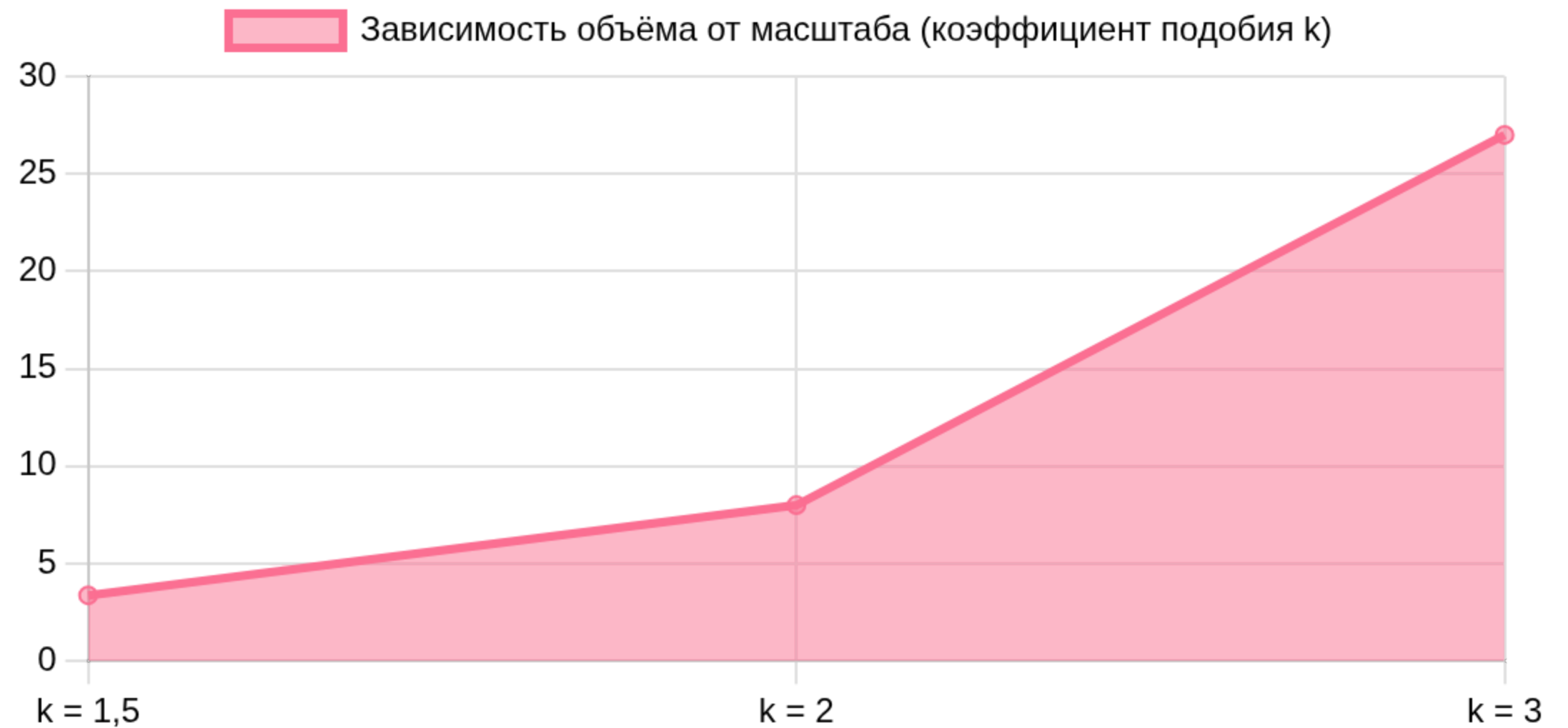


График подчёркивает: линейный рост в k раз превращается в объёмный рост в k^3 раз. Это помогает правильно масштабировать чертежи и предсказывать, как изменится вместимость модели.

Расчёт по закону подобия объёма для подобных фигур (без внешних статистических данных).

Проверка понимания темы объёма

19

Объём — это мера трёхмерного пространства: он применяется к пространственным телам, а не к плоским фигурам. Поэтому сравнивают именно «сколько места занимает тело», а не площадь поверхности.

В школьном курсе основные единицы — мм^3 , см^3 , дм^3 , м^3 , а также литр и миллилитр. Переводы выполняют с пониманием, что кубические единицы связаны с линейными размерами.

Формулы для куба, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра, призмы и пирамиды образуют базовый набор вычислений. Умение выбрать правильную формулу — ключ к быстрым и точным решениям.



Объём — основа пространственных расчётов

Объём описывает, сколько места занимает тело в трёх измерениях, и выражается кубическими единицами и литрами. Его рассчитывают по формулам и применяют в быту, науке, технике и стереометрии в 11 классе.

