

Умножение вектора на число



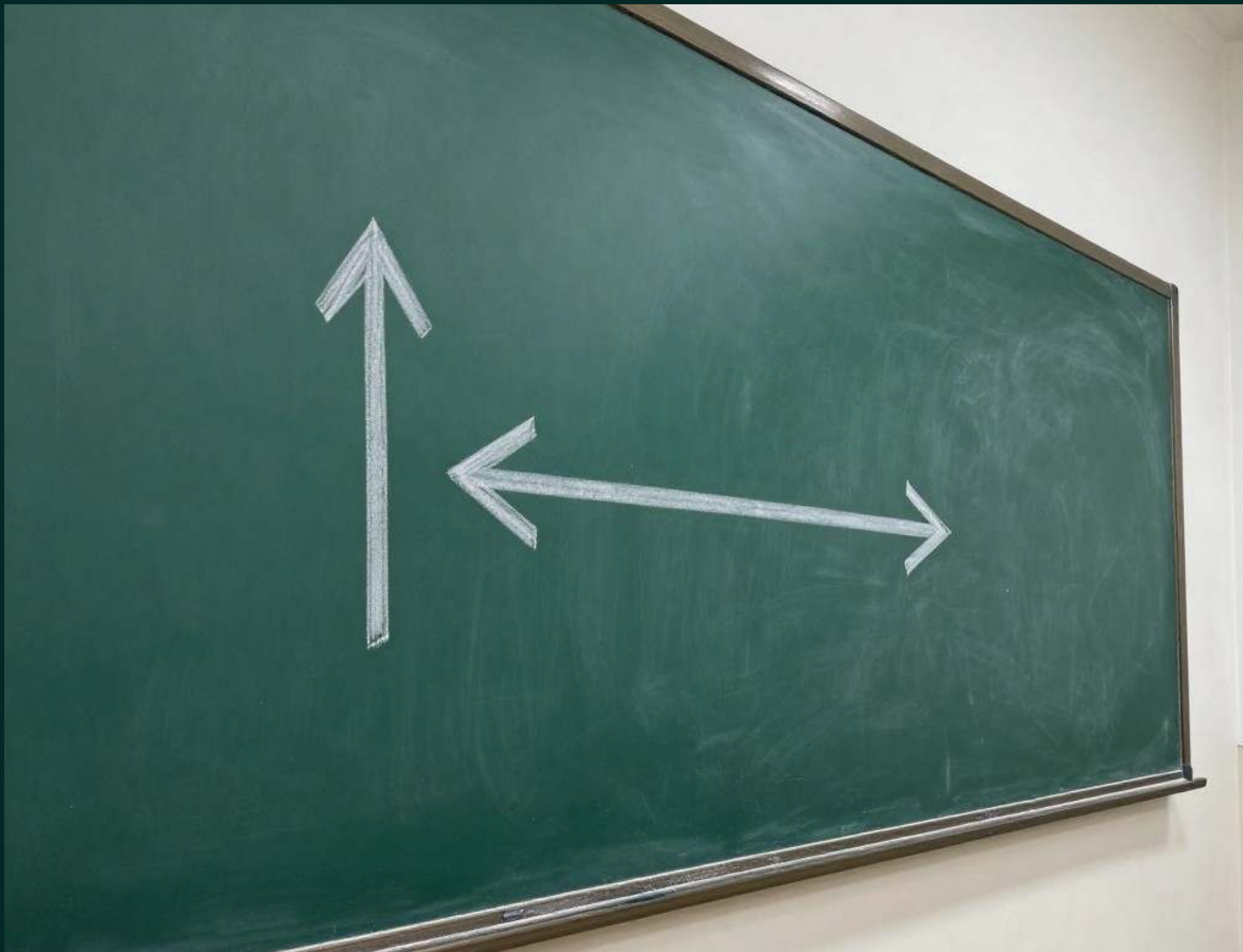
Длина и направление меняются по правилу.

Зачем нужен векторный масштаб

Векторы помогают описывать движение, силу и скорость. Умножение на число показывает, как изменить их длину, сохранить направление или развернуть вектор, переводя рисунок в вычисления и обратно на клетчатой бумаге.



Что называют вектором



Две характеристики

Вектор имеет длину и направление. Именно сочетание этих признаков отличает его от обычного отрезка и позволяет точно описывать перемещение, силу или скорость в геометрических задачах.

Запись и изображение

На плоскости вектор обычно показывают стрелкой: её длина отражает величину, а наконечник указывает направление. В записи используют буквы со стрелкой или пару точек для направленного отрезка.

Что происходит при умножении на число

Длина меняется

При умножении на число вектор становится длиннее или короче в $|k|$ раз. Модуль коэффициента отвечает только за величину изменения, поэтому важна именно его абсолютная величина.

Положительный коэффициент

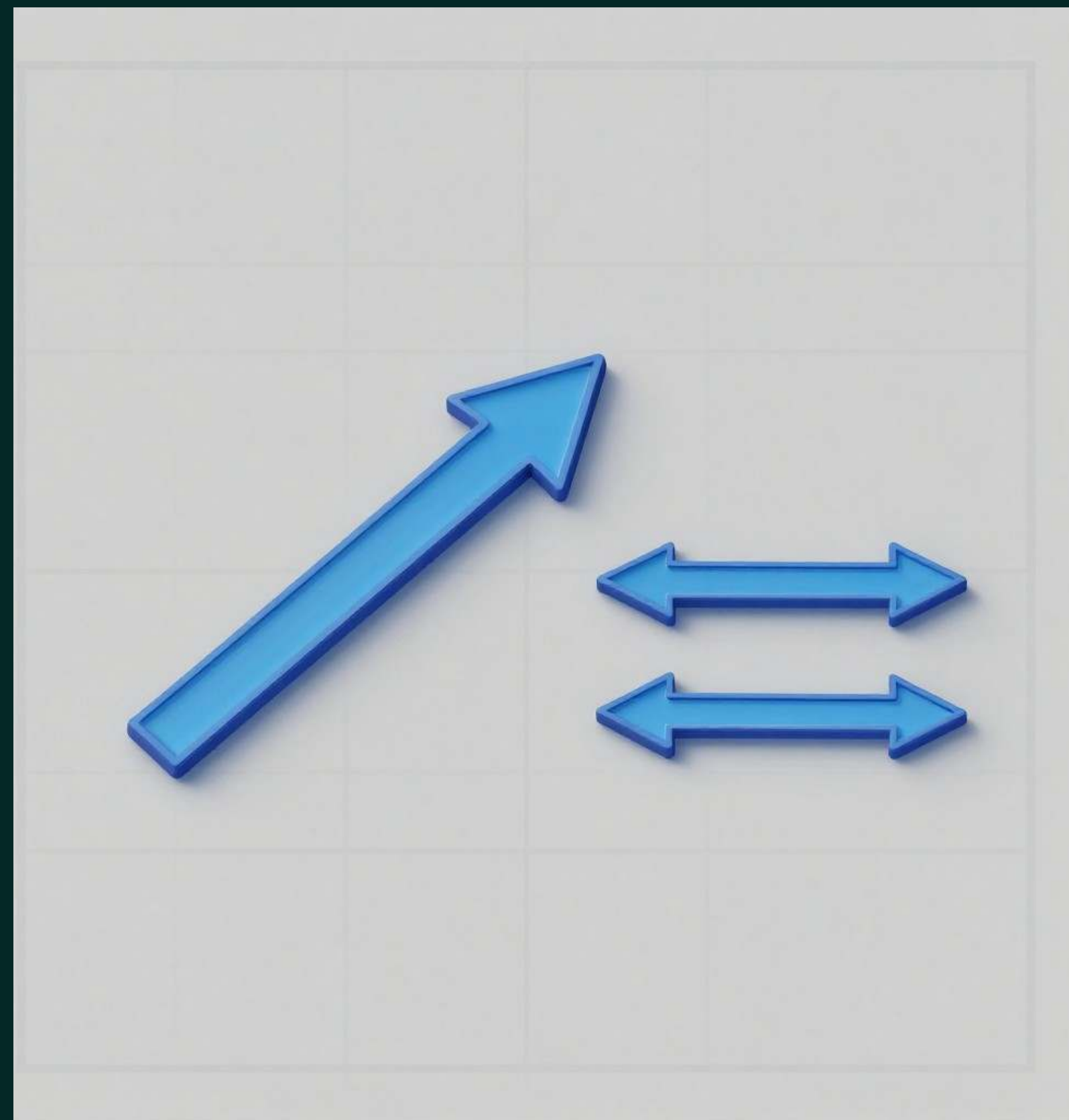
Если k положительный, новый вектор сохраняет исходное направление. На рисунке это выглядит как растяжение или сжатие стрелки без её разворота на противоположную сторону.

Отрицательный коэффициент

Если k отрицательный, вектор поворачивается в обратную сторону. Его длина при этом изменяется по модулю коэффициента, а знак минус отвечает именно за разворот.

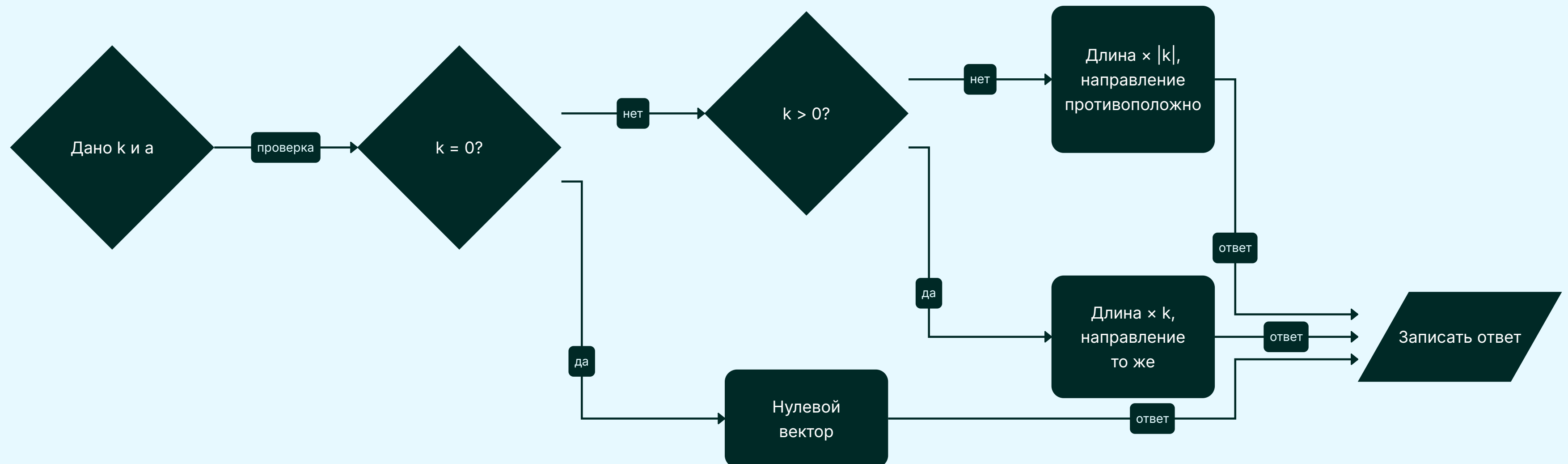
Нулевой коэффициент

При $k = 0$ получается нулевой вектор. У него длина равна нулю, поэтому у него нет направления и он не изображается обычной стрелкой.



Как найти вектор ka

Алгоритм зависит от знака коэффициента и позволяет записать результат в виде вектора или координат.



Геометрический смысл операции

01

Одна прямая

Новый вектор не уходит в случайную сторону. Он остаётся на той же прямой, что и исходный, поэтому умножение на число сохраняет геометрическое направление линии.

02

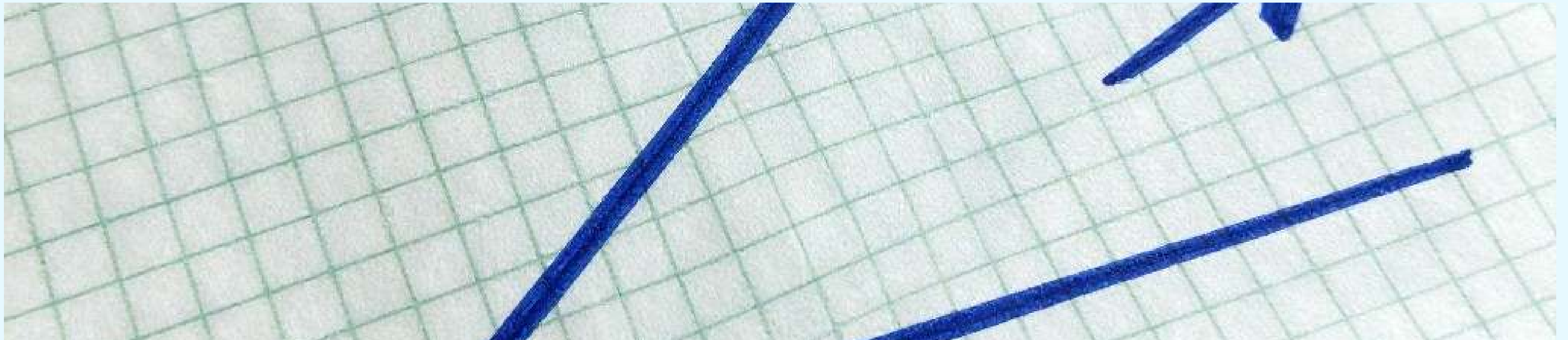
Меняется только масштаб

Операция не перестраивает рисунок целиком. Она лишь увеличивает или уменьшает длину вектора, а при отрицательном коэффициенте ещё и меняет его направление на противоположное.

03

Удобство для чертежа

Такой смысл помогает работать на клетчатой бумаге: сначала задают исходный вектор, затем быстро строят его увеличенную, уменьшенную или перевёрнутую копию без лишних построений.



Как меняется длина вектора при разных коэффициентах



Составлено по правилам умножения вектора на число, 7 класс

- Диаграмма показывает только изменение длины; направление при отрицательном коэффициенте учитывается отдельно.
- Чем больше модуль коэффициента, тем сильнее меняется длина. При $k = 1$ вектор не меняется, а при отрицательном k добавляется разворот.

Положительный коэффициент

01

Направление сохраняется

Если k больше нуля, вектор ka смотрит туда же, куда и a . Это значит, что стрелка не разворачивается, а только меняет длину по модулю коэффициента.

02

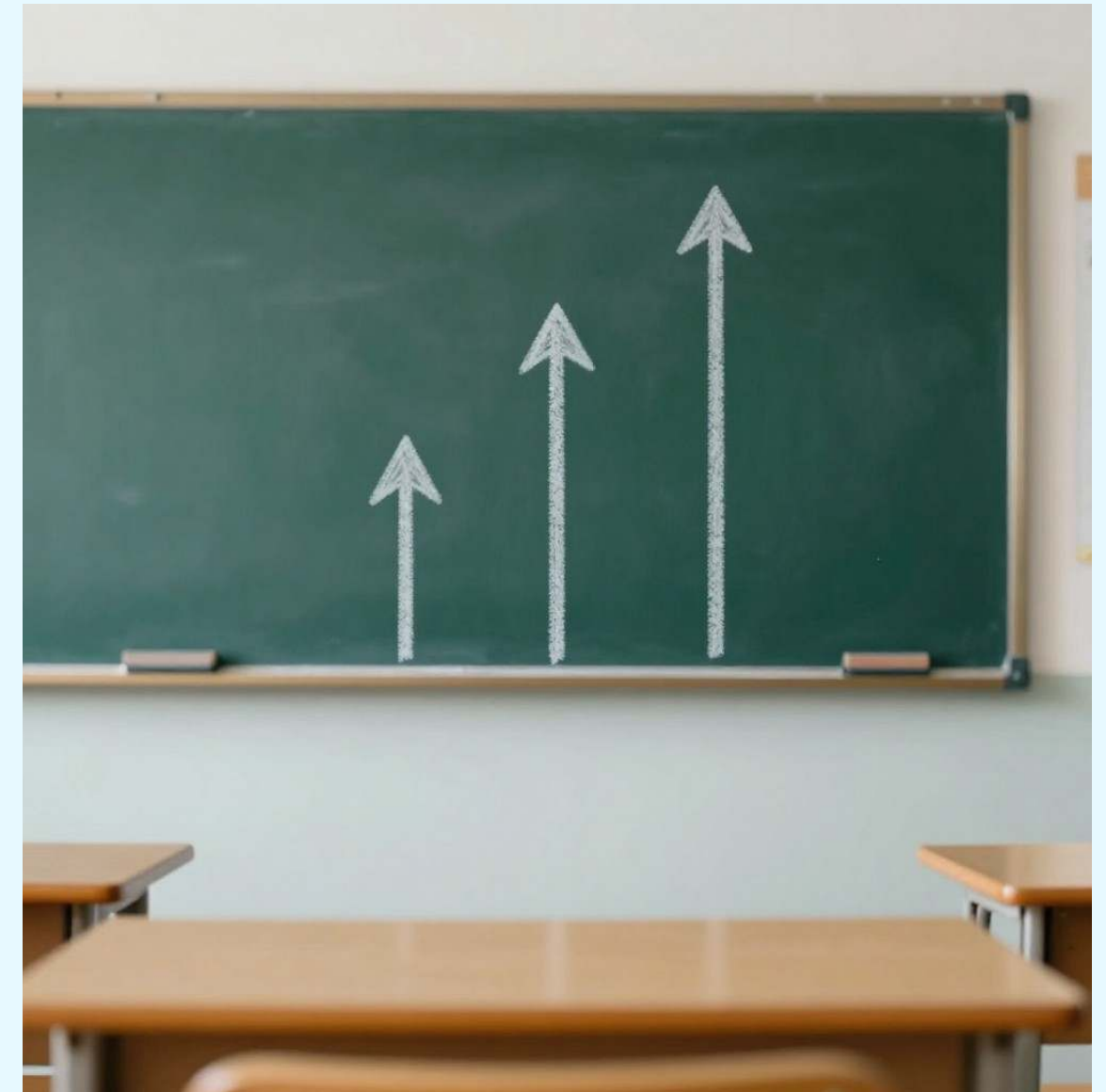
Длина по формуле

Новая длина равна $|k| \cdot |a|$, а при положительном k модуль равен самому числу. Поэтому $2a$ вдвое длиннее, $0,5a$ вдвое короче исходного вектора.

03

Понятный смысл

Для школьника это удобно понимать как обычное увеличение или уменьшение стрелки. На рисунке меняется только масштаб, а направление остаётся прежним и легко узнаётся.



Отрицательный коэффициент

01

Разворот стрелки

Если k меньше нуля, вектор ka направлен противоположно вектору a . Знак минус отвечает именно за разворот, поэтому стрелка смотрит в обратную сторону.

02

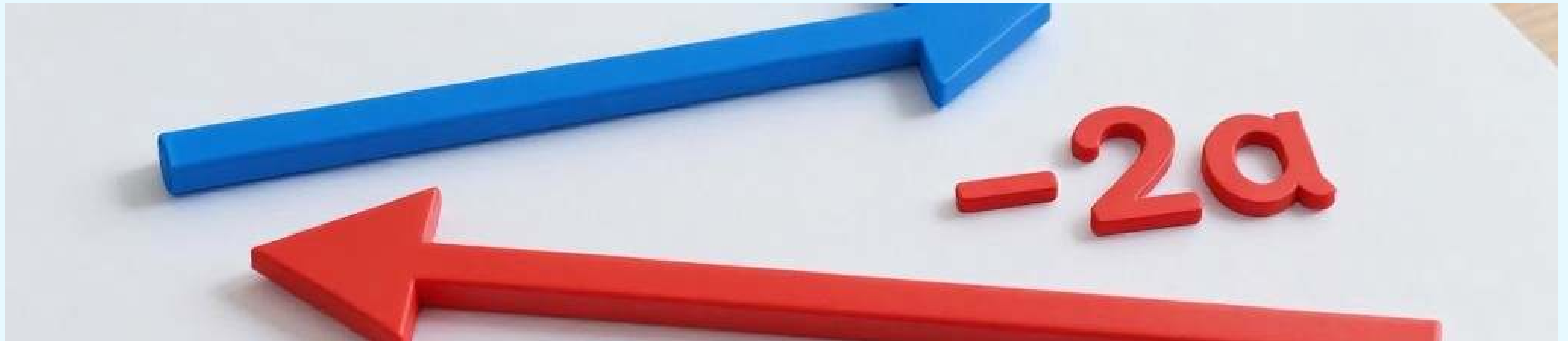
Длина по модулю

Несмотря на смену направления, длина результата равна $|k| \cdot |a|$. Например, $-2a$ в два раза длиннее исходного вектора, но расположен в противоположную сторону.

03

Два правила сразу

Чтобы не ошибиться, нужно отдельно смотреть на знак и модуль числа. Минус показывает разворот, а абсолютное значение говорит, во сколько раз изменится длина.



Три случая умножения на число

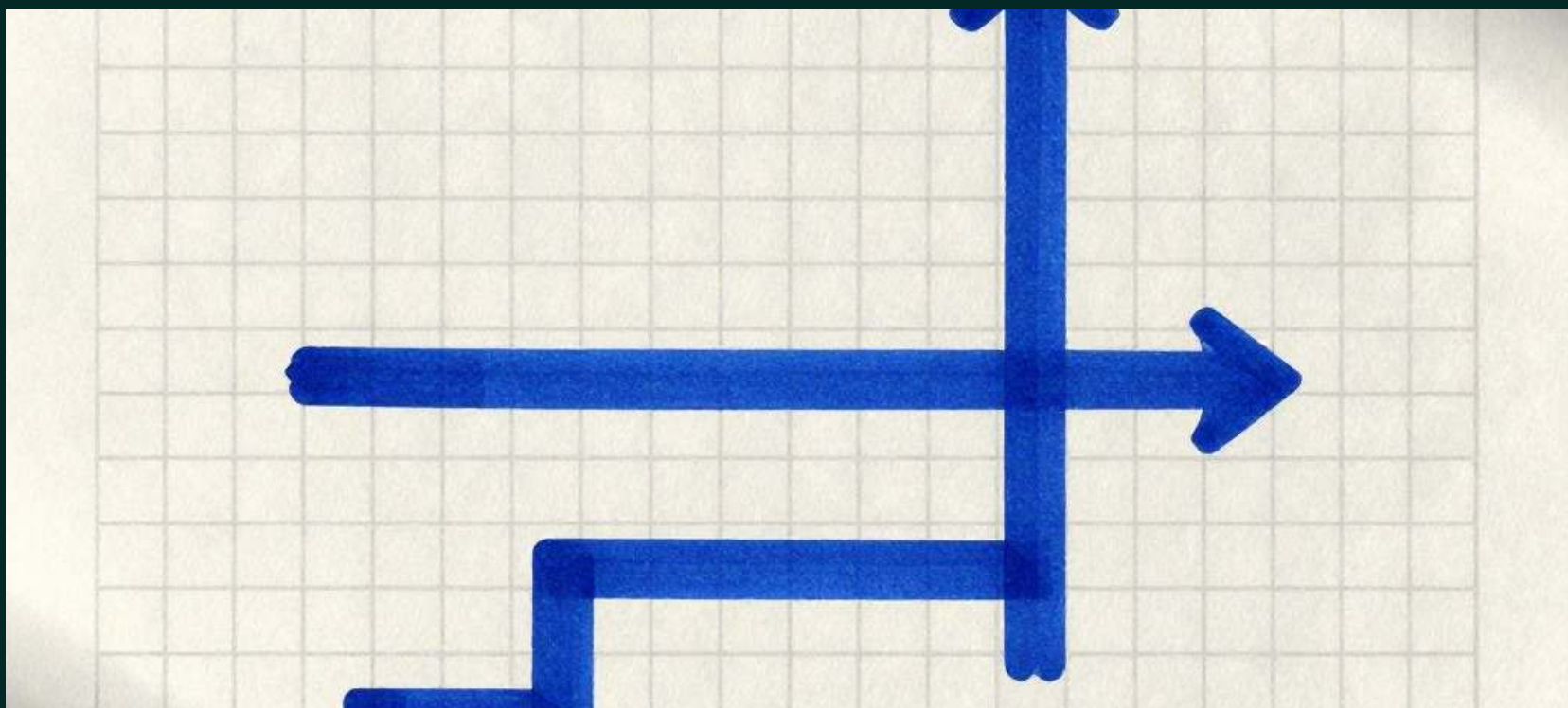
Таблица помогает быстро сравнить знак коэффициента, направление и длину результата.

Знак коэффициента определяет направление, а его модуль — новую длину; ноль даёт нулевой вектор.

Случай	Направление	Длина
$k > 0$	то же	$\times k$
$k < 0$	противоположное	$\times k $
$k = 0$	нет	0

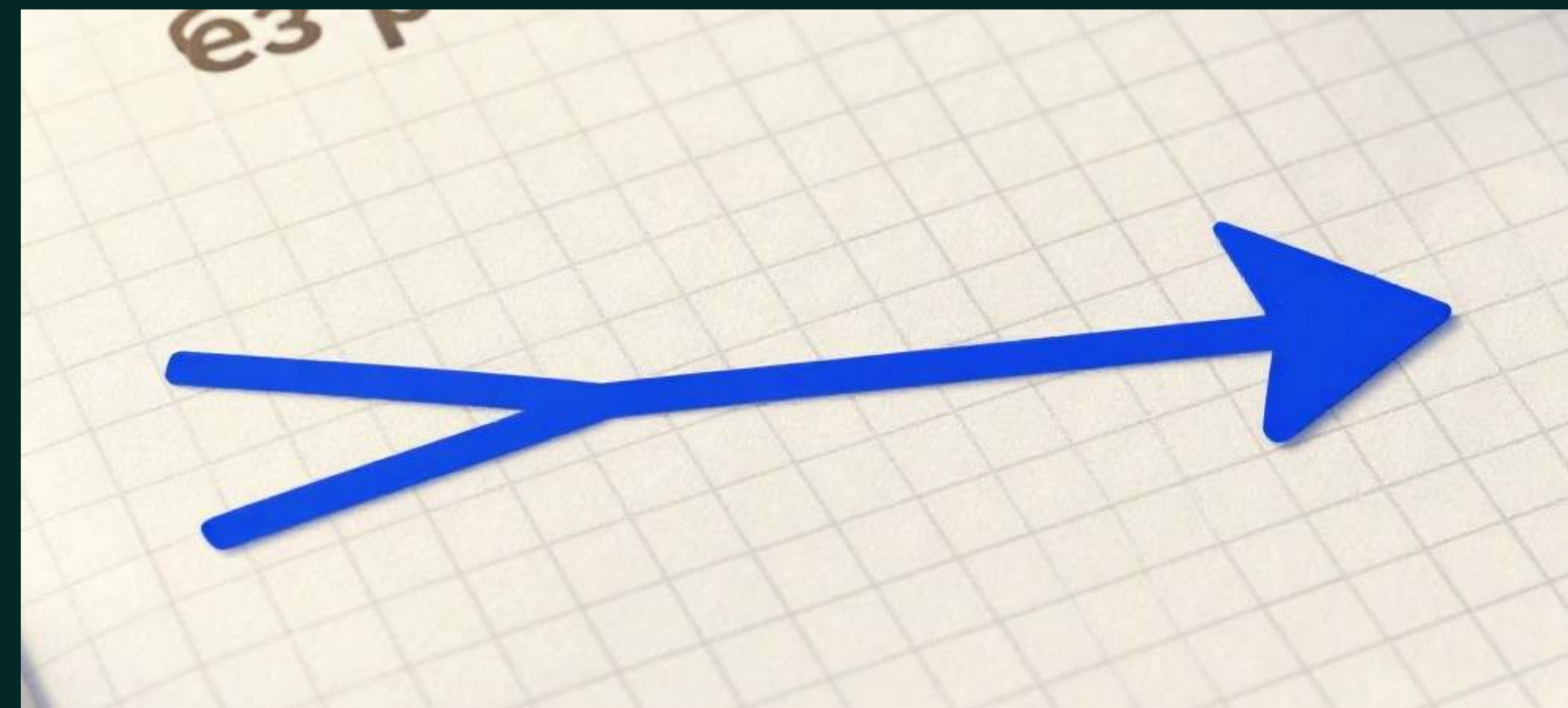
Правила умножения вектора на число, курс геометрии 7 класса

Пример на клетчатой бумаге



Стрелка на клетках

На клетчатой бумаге вектор удобно воспринимать как шаги по горизонтали и вертикали. Если исходный вектор ведёт на 3 клетки вправо и на 2 клетки вверх, его легко увидеть и посчитать без лишних вычислений.



Удвоение без разворота

При умножении на 2 тот же вектор становится вдвое длиннее: теперь нужно пройти 6 клеток вправо и 4 клетки вверх. Направление остаётся прежним, поэтому новый рисунок выглядит как точная растянутая копия.

Координатная запись вектора

01 Записываем вектор

Если вектор задан координатами $a = (x; y)$, его можно представить как пару чисел. Эта запись показывает, сколько нужно пройти по каждой оси отдельно.

02 Умножаем обе координаты

При умножении на число k каждая координата вектора умножается на k . Поэтому новый вектор записывают как $ka = (kx; ky)$, без каких-либо дополнительных действий.

03 Смотрим на знак числа

Если k положительное, знак координат не меняется, а при отрицательном k обе координаты меняют знак. Так координатная запись сразу показывает, сохраняется направление или меняется на противоположное.



Как меняются координаты после умножения



Учебный пример, составленный по правилу $ka = (kx; ky)$.

- На каждом шаге обе координаты изменяются одинаково по правилу умножения на число, поэтому ответ удобно проверять отдельно для каждой оси.
- Чем больше модуль коэффициента, тем сильнее изменяются координаты; знак коэффициента определяет разворот вектора, а не его длину.

Свойства умножения вектора на число

01

Последовательное умножение

Если сначала умножить вектор на одно число, а затем на другое, результат не изменится от порядка скобок: $(k_1 k_2)a = k_1(k_2 a)$. Это удобно при вычислениях.

02

Единица ничего не меняет

Умножение на 1 оставляет вектор таким же: $1a = a$. Это свойство помогает быстро проверить, правильно ли записан исходный вектор и не допущена ли ошибка.

03

Ноль даёт нулевой вектор

При умножении на 0 получается $0a = 0$. Такой результат не имеет длины и направления, поэтому его нельзя изображать как обычную стрелку.

04

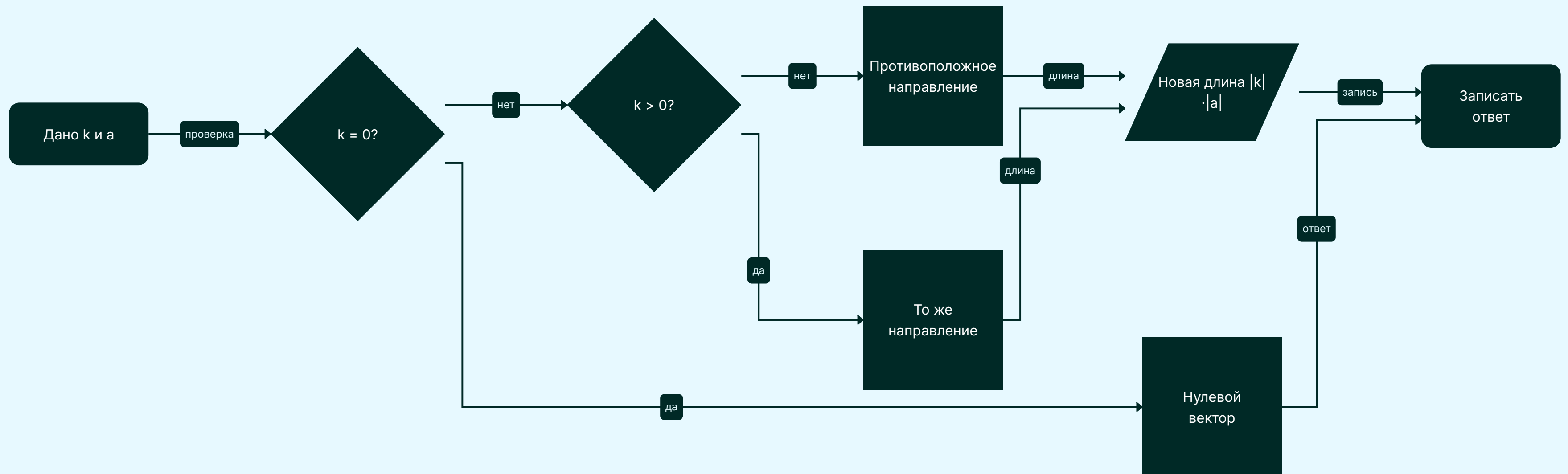
Сумма коэффициентов

Если сложить числа до умножения, получится тот же результат, что и после по отдельности: $(k + l)a = ka + la$. Это свойство показывает согласованность операции с обычной арифметикой.

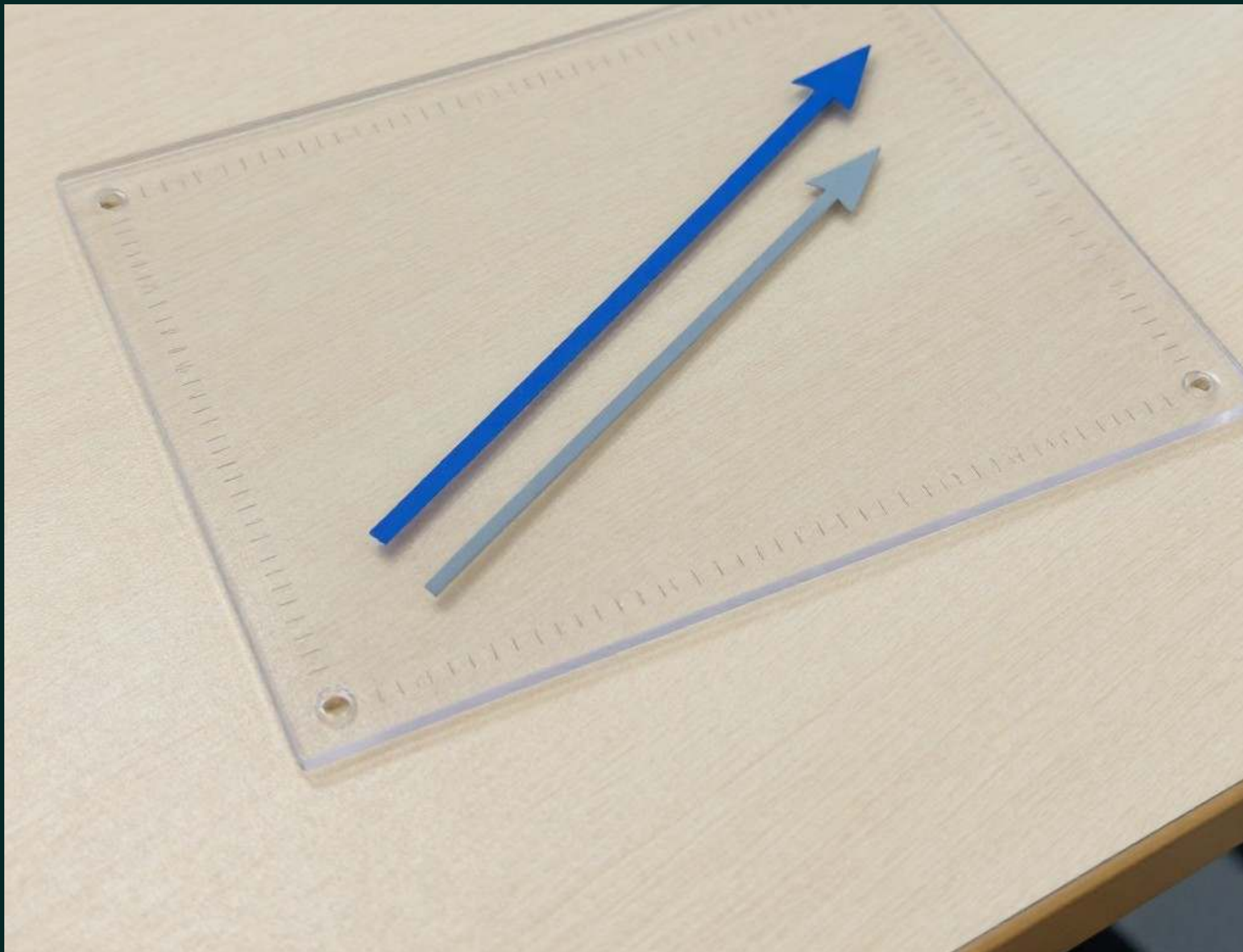


Как решать задачи на умножение вектора на число

Последовательность действий для проверки знака, длины и направления результата.



Частые ошибки в решениях



Умножают не все координаты

Иногда учащиеся изменяют только одну координату, забывая про вторую. Но правило действует для обеих координат сразу, иначе полученный вектор уже не соответствует умножению на число.



Не замечают минус

Если коэффициент отрицательный, вектор нужно развернуть в противоположную сторону. Один только модуль числа показывает длину, а знак минуса отвечает именно за направление.



Путают ноль с очень маленьким вектором

При $k = 0$ не получается короткая стрелка. Верный результат — нулевой вектор, у которого длина равна нулю и направления нет вовсе.

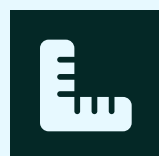
Сравнение исходного и полученных векторов



Учебный пример по теме «Умножение вектора на число».

- Диаграмма показывает только изменение длины, а направление нужно учитывать отдельно по знаку коэффициента и по развороту стрелки.
- $2a$ становится длиннее, $0,5a$ — короче, $-a$ сохраняет длину, но меняет направление, а $0a$ превращается в нулевой вектор.

Где применяется умножение вектора на число



Геометрия

Помогает строить векторы нужной длины на чертеже, сравнивать отрезки и переходить от одного рисунка к другому без потери направления.



Физика

Используется для описания скорости и силы, когда важно показать, как изменяется величина движения или действия при сохранении направления.



Чертёж и масштаб

Позволяет увеличивать и уменьшать объекты по заданному коэффициенту, сохраняя их форму и правильное направление линий на схеме.



Школьные задачи

Чаще всего встречаются задания на удвоение, утроение и разворот вектора. Такие примеры тренируют точность вычислений и внимательность к знаку числа.

Краткая памятка по примерам

k	a	Ответ
3	(1; 2)	(3; 6)
-2	(1; 2)	(-2; -4)
0,5	(4; -6)	(2; -3)

Учебные примеры по правилу $ka = (kx; ky)$.

Проверьте, как одно правило работает для разных коэффициентов и разных координат. Таблица помогает быстро увидеть результат умножения.

Во всех строках каждая координата умножается на одно и то же число; знак коэффициента определяет направление, а модуль — изменение длины.

Главный итог темы

Умножение вектора на число меняет его длину и, при необходимости, направление. Знак коэффициента показывает разворот, модуль — новую длину, а формула $k\mathbf{a} = (kx; ky)$ связывает рисунок с координатами.