

Уравнения, содержащие знак модуля



Модуль скрывает знак и меняет ход решения.

Модуль: что уже известно



Модуль числа показывает его расстояние до нуля на числовой прямой. Поэтому числа 5 и -5 имеют одинаковый модуль. Это знание помогает понимать, почему уравнения с модулем могут иметь несколько ответов.



0

**— это наименьшее
возможное значение модуля.**

Модуль не бывает меньше нуля: он всегда показывает расстояние, а расстояние не отрицательно.

Модуль на числовой прямой

Расстояние до нуля

Модуль числа равен расстоянию от точки на числовой прямой до нуля. Именно поэтому для чисел с разными знаками значение модуля может совпадать.

Одинаковая длина

Точки 3 и -3 находятся на одинаковом расстоянии от нуля. Значит, $|3| = |-3| = 3$, хотя сами числа расположены по разные стороны от нуля.

Почему это важно

Такое представление помогает сразу понять смысл уравнений с модулем: нужно искать не одно число, а все точки, находящиеся на нужном расстоянии от заданного значения.

Почему уравнения с модулем решаются не как обычные

1

Модуль скрывает знак

Запись в модуле убирает информацию о том, было число положительным или отрицательным. Поэтому одно и то же выражение внутри модуля может привести к разным ответам.

2

Появляются случаи

Если $|x| = 4$, то подходит не только $x = 4$, но и $x = -4$. Чтобы не пропустить решение, уравнение приходится рассматривать по двум возможным случаям.

3

Число ответов меняется

В зависимости от правой части уравнение может не иметь решений, иметь одно решение или два решения. Иногда решений больше, если модуль входит в более сложную запись.

4

Нужна проверка

После преобразований легко допустить лишний корень или потерять правильный. Поэтому каждое найденное значение обязательно подставляют обратно в исходное уравнение.

Основные виды уравнений с модулем

Сравним самые частые виды уравнений и число их решений.

Правая часть не может быть отрицательной, а равные по модулю числа обычно дают два ответа.

Вид	Решения	Пример
$ x =a$	2 при $a>0$	$ x =4$
$ x =0$	1	$ x =0$
$ x =a$	0 при $a<0$	$ x =-3$
$ x = b $	2, если $b\neq 0$	$ x = 5 $

Свойства модуля числа и уравнений с модулем

Первый способ решения: раскрытие модуля по определению

1

Определить знак

Сначала выясняют, при каких значениях переменной выражение под модулем неотрицательно, а при каких — отрицательно. От этого зависит, как именно раскрывать модуль.

2

Заменить запись

Если выражение внутри модуля неотрицательно, модуль заменяют на него же. Если выражение отрицательно, меняют знак на противоположный и продолжают решение.

3

Разделить на случаи

Для выражений вида $|x-3|$ или $|2x+1|$ удобно заранее найти точку, где выражение равно нулю, а затем рассмотреть разные промежутки на числовой прямой.

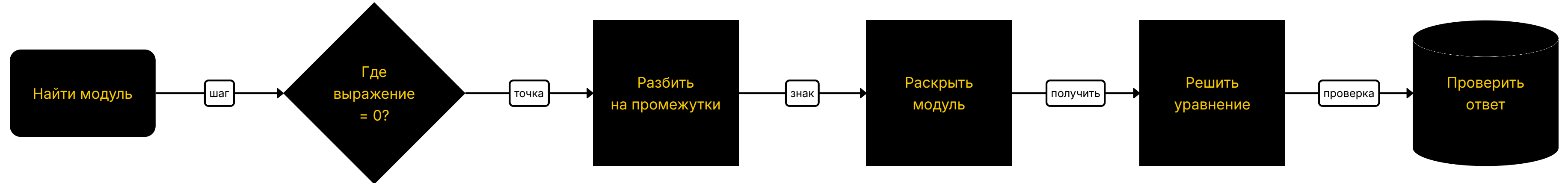
4

Не потерять условие

Каждое полученное уравнение нужно решать только в пределах своего случая. Иначе можно получить лишний ответ, который не подходит исходному неравенству знаков.

Алгоритм решения уравнения с модулем

Пошаговый разбор по знаку выражения и последующая проверка корней.



Пример решения уравнения с одним модулем

Два возможных случая

Для уравнения $|x-3| = 5$ нужно учесть оба варианта: $x-3 = 5$ и $x-3 = -5$. Модуль превращает одну запись в две линейные задачи.

Находим корни

Из первого уравнения получаем $x = 8$, а из второго — $x = -2$. Оба значения подходят, потому что при подстановке дают модуль, равный 5.

Записываем ответ

После проверки можно сделать вывод: исходное уравнение имеет два решения, $x = -2$ и $x = 8$. Именно так выглядит типичное решение уравнения с модулем.

Сколько решений дают разные уравнения

Число корней зависит от того, какую величину требует правая часть и как связаны выражения по обе стороны равенства.

Если справа стоит отрицательное число, решений нет; при нуле — обычно одно; при положительном числе — чаще два.

Свойства модуля числа и типовые уравнения с модулем

Уравнения вида $|ax+b| = c$

1

Сначала смотрим на c

Если правая часть отрицательна, решений нет: модуль не может быть меньше нуля. Поэтому уравнение сразу проверяют по числу c , прежде чем переходить к раскрытию модуля и преобразованиям.

2

Ноль даёт один корень

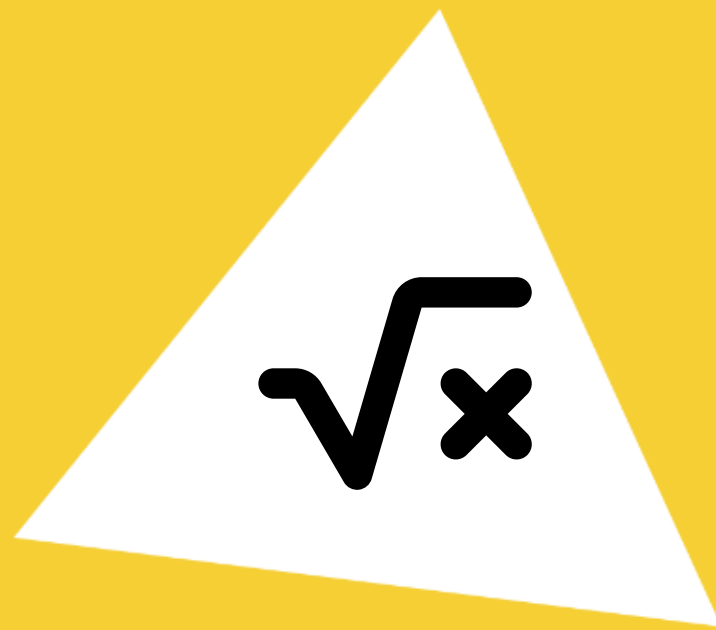
Когда $c = 0$, модуль обращается в ноль только при $ax + b = 0$. Тогда достаточно решить обычное линейное уравнение и получить единственное значение переменной.

3

Положительное c даёт два случая

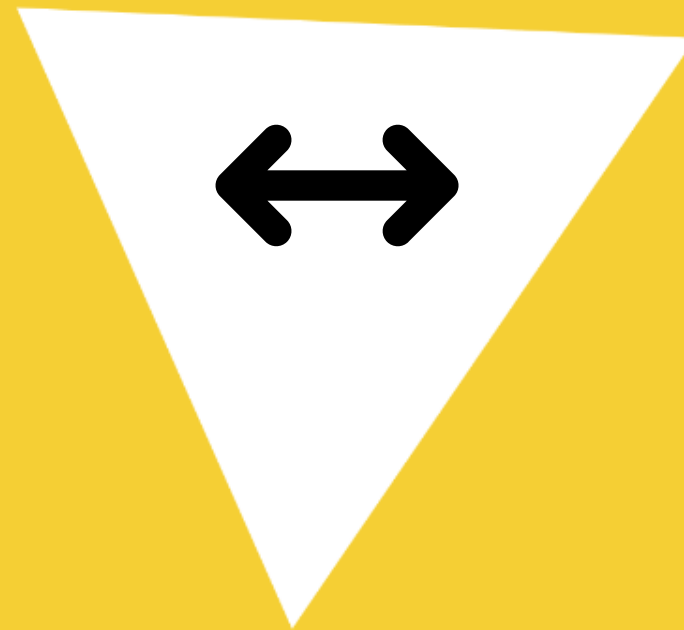
При $c > 0$ составляют два уравнения: $ax + b = c$ и $ax + b = -c$. Именно так находят все возможные корни и не теряют ни одного решения.

Когда модуль входит в более сложное выражение



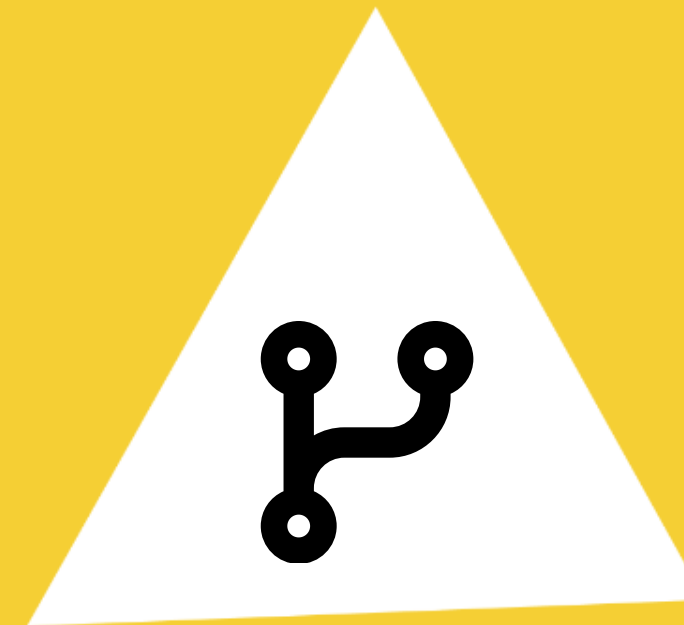
Выделить модуль

Сначала нужно оставить в одной части только выражение с модулем. Так проще увидеть, что именно сравнивается, и не запутаться при переносе остальных слагаемых.



Перенести числа

Если модуль стоит в сумме или разности, свободные числа переносят в другую часть уравнения. Это помогает получить запись вида $|\dots| = \text{число}$ и сразу понять, возможны ли решения.



Разбить на случаи

После упрощения модуль раскрывают по определению. Если выражение внутри неотрицательно, знак сохраняют, а если отрицательно — меняют на противоположный, получая два отдельных случая.



Проверить ответ

Каждый найденный корень подставляют в исходное уравнение, а не только в преобразованное. Это защищает от ошибок при переносе чисел и от лишних решений.

Типичные ошибки при решении уравнений с модулем

Ошибка	Причина	Как правильно
Один случай	Забыли второй	Записать оба
$c < 0$	Модуль неотрицателен	Ответ: нет решений
Нет проверки	Не подставили	Проверить корни
Неверный знак	Ошиблись в раскрытии	Сверить с определением

Сравните частые ошибки, их причину и правильное действие при решении уравнений с модулем.

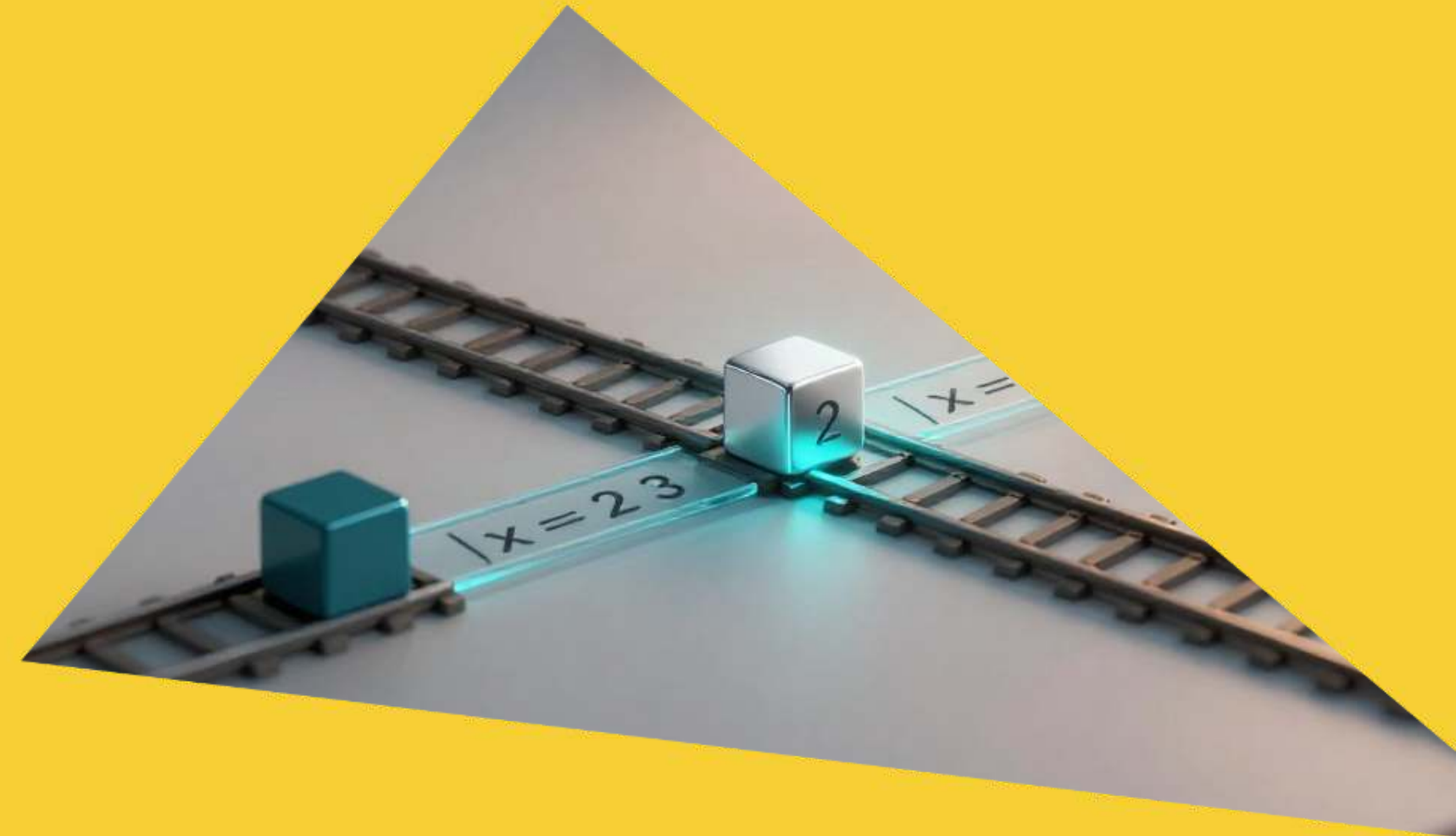
Большинство ошибок связано не с вычислениями, а с невнимательным разбиением на случаи и забыванием обязательной проверки ответа.

Геометрический смысл: расстояние до точки



Точка на заданном расстоянии

Запись $|x-a| = d$ означает, что число x находится на расстоянии d от точки a на числовой прямой. Поэтому сразу можно понять, что решений будет два, одно или ни одного — в зависимости от самого числа d .



Наглядный пример

Если $|x-2| = 3$, то x может быть равен 5 или -1 . Оба значения находятся на одинаковом расстоянии от числа 2, и именно это делает геометрический смысл таким удобным для быстрого поиска ответа.

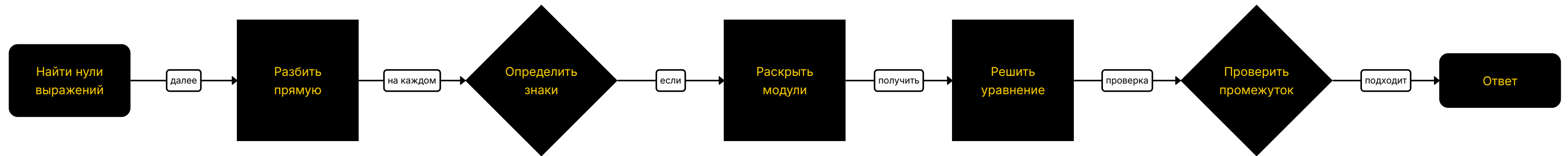
4

**— середина между числами 1 и 7,
поэтому уравнение $|x-1| = |x-7|$
имеет единственное решение.**

Когда две точки равноудалены от концов отрезка, они совпадают с его серединой. Для уравнений вида $|x-a| = |x-b|$ это помогает сразу найти ответ без долгих преобразований.

Как решать уравнение с двумя модулями

Алгоритм для уравнений вида $|x-a| = |x-b|$ и похожих случаев



Сравнение способов решения

Разные способы помогают в разных ситуациях: один удобен для вычислений, другой — для быстрого понимания смысла, но любой ответ нужно проверять отдельно.

Разбор случаев универсален, геометрический смысл особенно нагляден, а проверка корней обязательна независимо от выбранного способа.

Сравнение учебных подходов к решению уравнений с модулем

Где встречаются уравнения с модулем



Расстояние

Модуль помогает описывать путь между двумя точками без учёта направления. Поэтому он часто встречается в задачах, где важна именно величина расстояния.



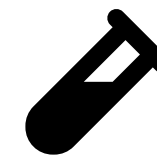
Разность температур

Если сравнивают температуру утром и днём, знак разницы не так важен, как её размер. Модуль показывает, насколько значения отличаются друг от друга.



Отклонение от нормы

Если величина должна быть близка к заданному уровню, модуль показывает, насколько она удалена от нормы. Так удобно сравнивать разные результаты.



Погрешность измерения

В лабораторных задачах модуль используют, чтобы записать отклонение результата от точного значения. Это удобно, когда нужно оценить ошибку без знака.



Повседневные ситуации

В обычной жизни модуль помогает говорить о расстоянии от дома до школы, разнице времени, шагов или цен. Он делает сравнение понятным и точным.

Мини-практика по теме

Проверьте, как работают основные правила решения уравнений с модулем, и сравните ответы с правильными результатами.

Если правая часть отрицательна, решений нет; при нуле остаётся один корень; при положительном числе обычно появляются два значения.

Уравнение	Ответ
$ x = 6$	-6, 6
$ x-4 = 2$	2, 6
$ x+1 = 0$	-1
$ x-3 = -1$	нет решений

Примеры для самопроверки по теме «Уравнения с модулем»

Главные выводы по уравнениям с модулем

Модуль показывает расстояние и всегда неотрицателен.

Поэтому уравнения с модулем решают через определение, разбор случаев и геометрический смысл. Главное — внимательно проверять каждый найденный корень.