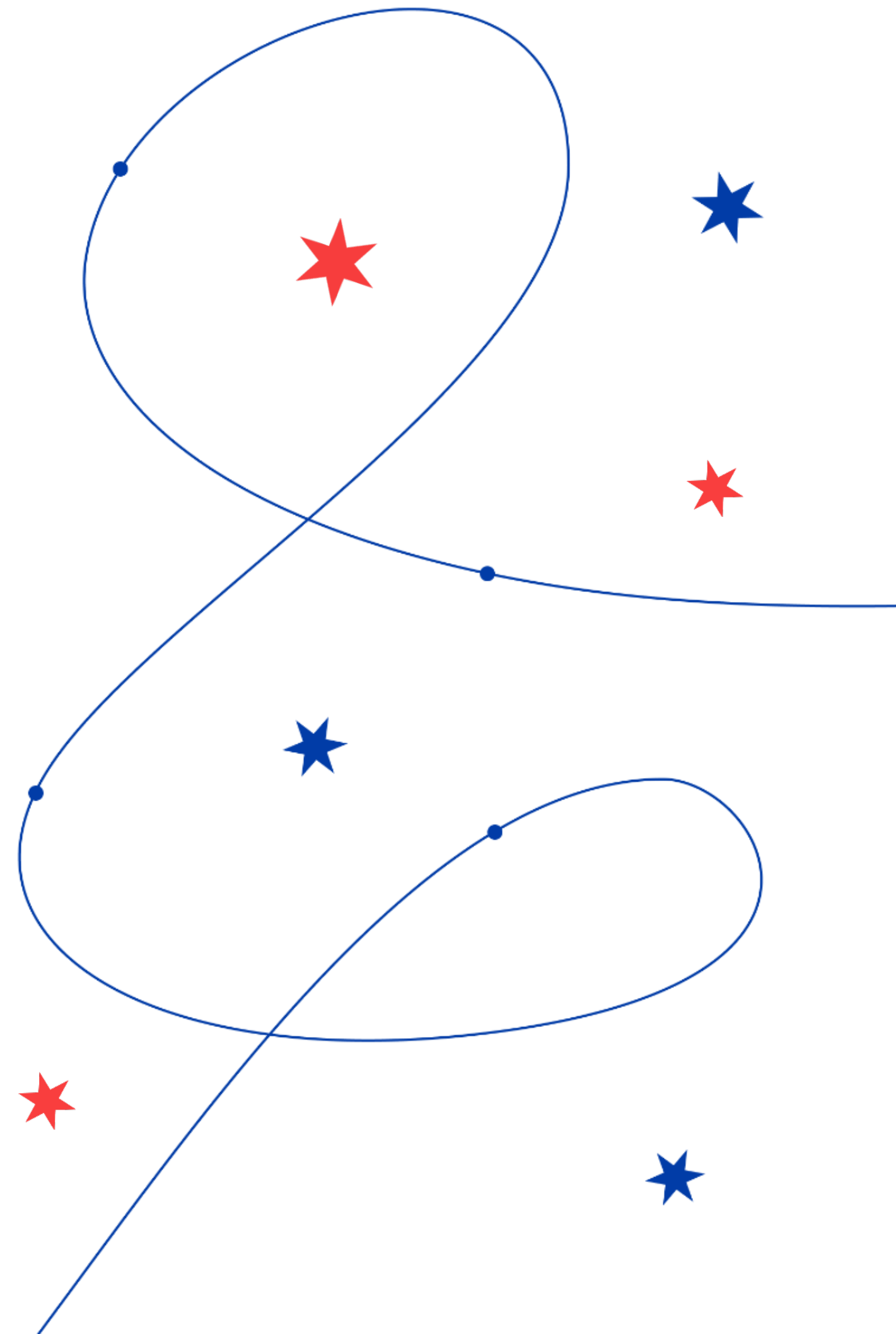


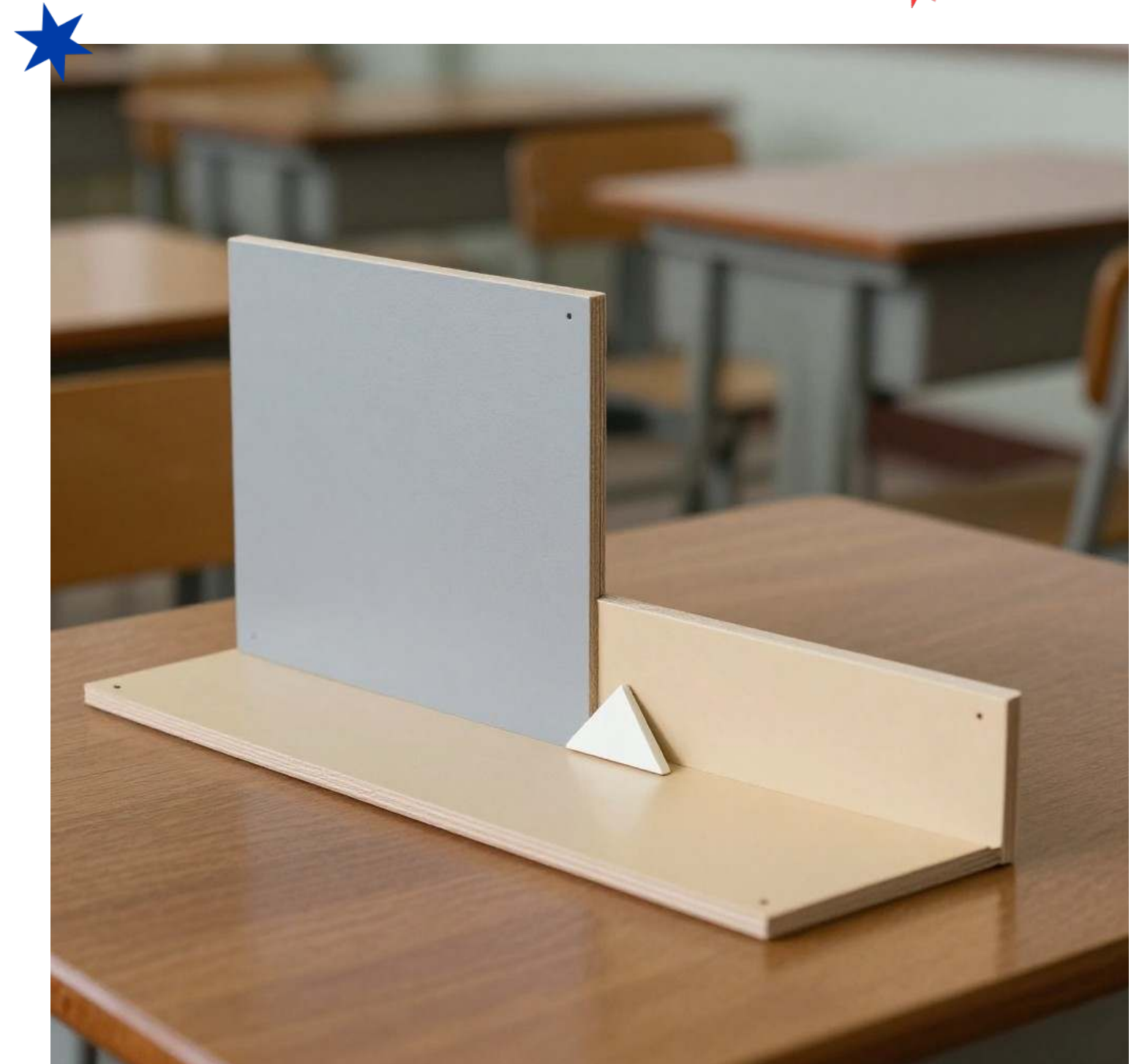
Перпендикулярность плоскостей: основная тема урока

Разберём, как по определению и признакам
распознавать перпендикулярность плоскостей в
пространстве.



Почему эта тема важна в стереометрии

Перпендикулярность плоскостей постоянно появляется в задачах про куб, прямоугольный параллелепипед, призмы и пирамиды. Она помогает анализировать грани, строить перпендикуляры, находить углы и обосновывать свойства фигур, развивая точное пространственное мышление.

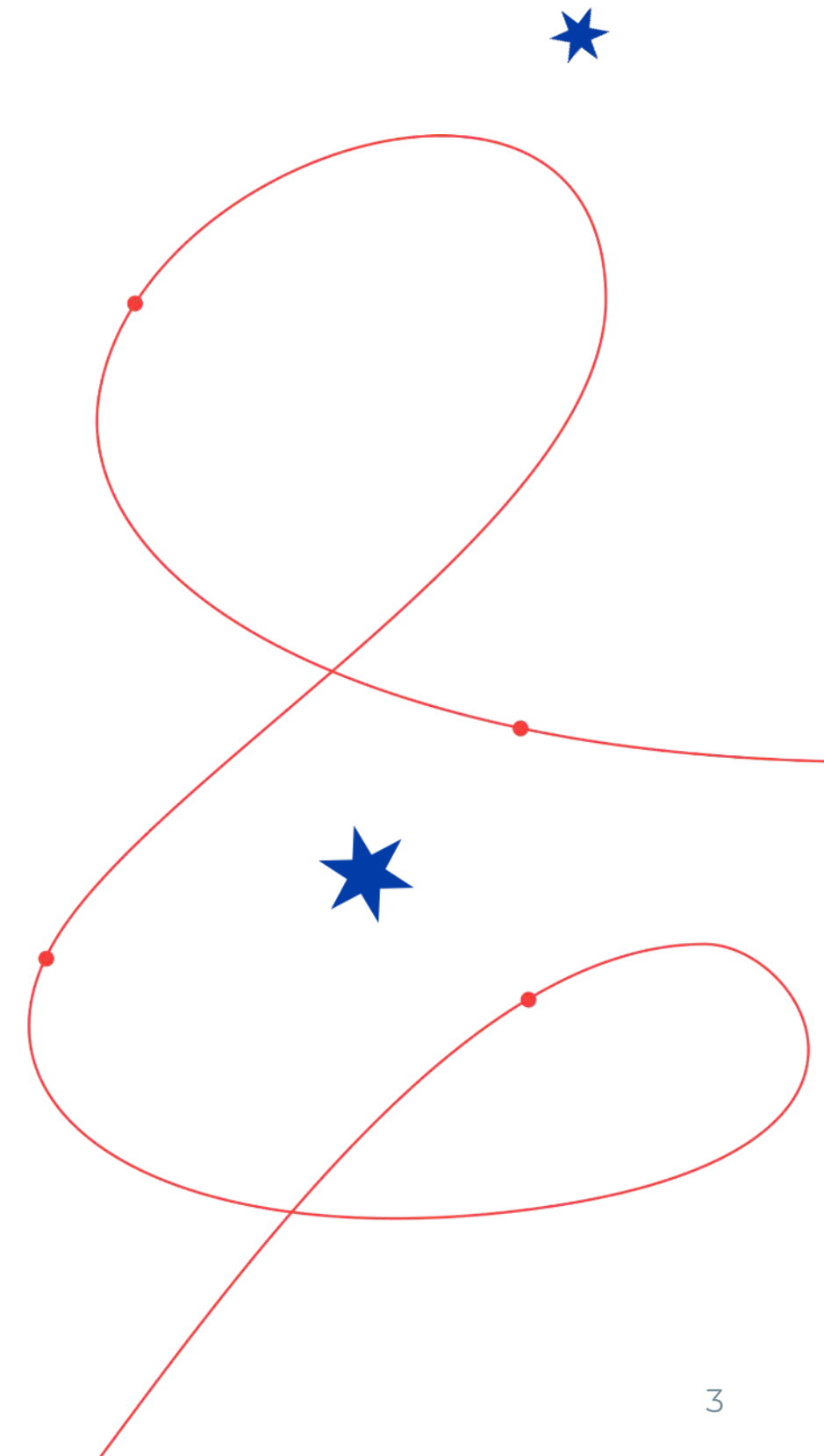


Определение перпендикулярных плоскостей

Две плоскости называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90° . Такой угол связывает идею прямого угла сразу с двумя плоскостями в пространстве.

Линия пересечения этих плоскостей называется ребром двугранного угла. Именно вдоль ребра удобнее рассматривать взаимное положение плоскостей.

Если одна плоскость содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости, то плоскости перпендикулярны. Так определение соединяет прямую и плоскость в единую логическую схему.



Основные признаки и формулировки



Три удобных способа распознать перпендикулярность плоскостей и понять, как их использовать при доказательствах.

Во многих задачах достаточно перейти от прямого угла к перпендикулярности двух плоскостей через одну подходящую прямую и ребро.



Признак	Формулировка	Смысл
Определение	Угол между плоскостями равен 90°	Базовое условие
Через прямую	Плоскость содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости	Удобно для доказательств
Через линию пересечения	В одной плоскости прямая перпендикулярна ребру двугранного угла и второй плоскости	Помогает использовать ребро
Типовой пример	Соседние грани куба	Наглядная модель
Ключевой вывод	Доказательство часто сводится к одной прямой	Упрощает решения



Наглядная модель на кубе

Соседние грани как прямой двугранный угол

У куба любые две соседние грани образуют прямой двугранный угол. На чертеже это помогает быстро понять, где именно «включается» перпендикулярность плоскостей. Важно находить общую линию их пересечения.



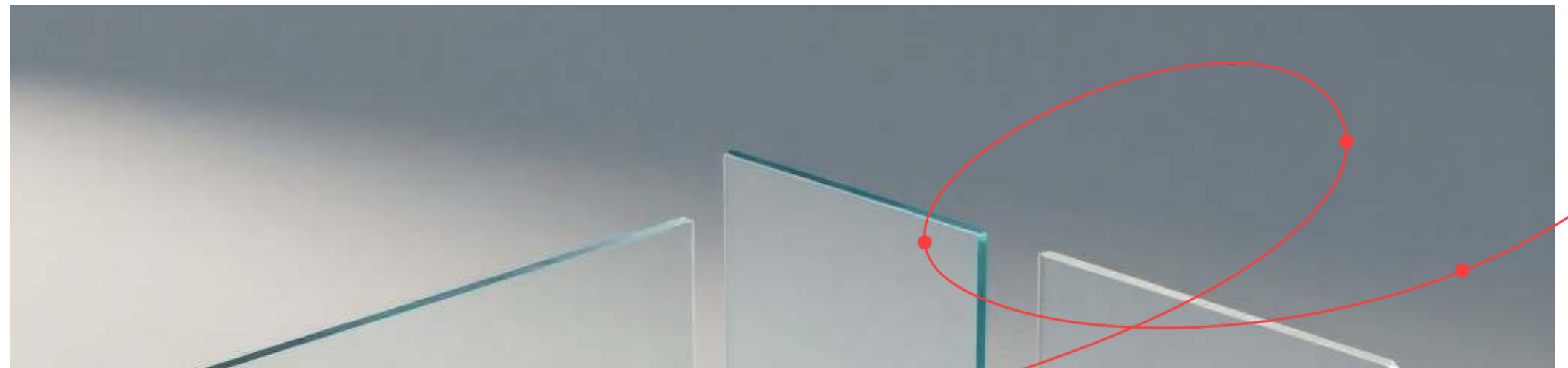
Ребра из одной вершины задают взаимную ориентацию

Три ребра, выходящие из одной вершины куба, попарно взаимно перпендикулярны. Именно они помогают воспринимать три направления в пространстве как «координатные оси». Так легче удерживать связь между прямыми и плоскостями при доказательствах.



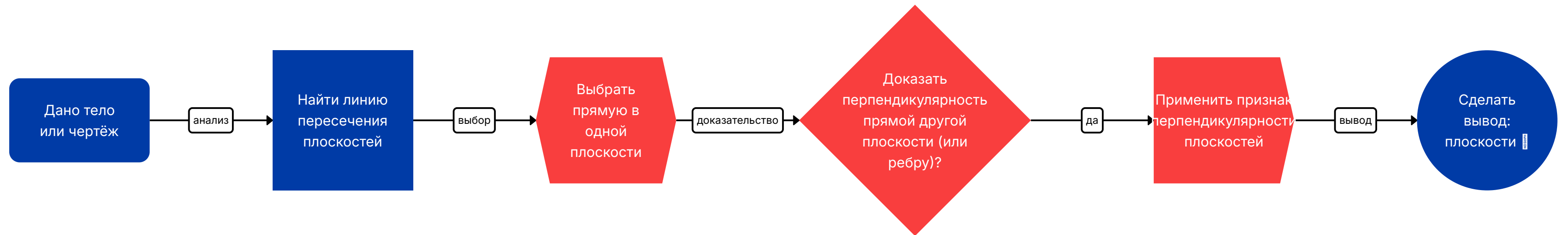
Как выделяют на рисунке главное

На учебных схемах обычно показывают одну грань, соседнюю грань и отмечают прямой угол между ними. Общая линия пересечения граней становится опорой для дальнейших построений и проверок. Это тренирует навык «видеть конструкцию».



Общая схема доказательства в задачах

Алгоритм рассуждений от условия к выводу о перпендикулярности двух плоскостей.



Признак перпендикулярности через прямую



От прямой — к плоскостям

Если плоскость содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости, то плоскости перпендикулярны. Это превращает задачу о плоскостях в проверку условия на прямой.



Короткое доказательство вместо длинных построений

Переход от прямой к целой плоскости обычно сокращает рассуждения. Вместо множества шагов вы опираетесь на один проверяемый перпендикуляр и сразу получаете требуемый результат.



Когда условие уже «задано» ребром

Признак особенно удобен, если в условии встречаются перпендикулярные ребра, высоты, боковые грани или осевые линии многогранника. Тогда достаточно аккуратно выбрать нужную прямую.

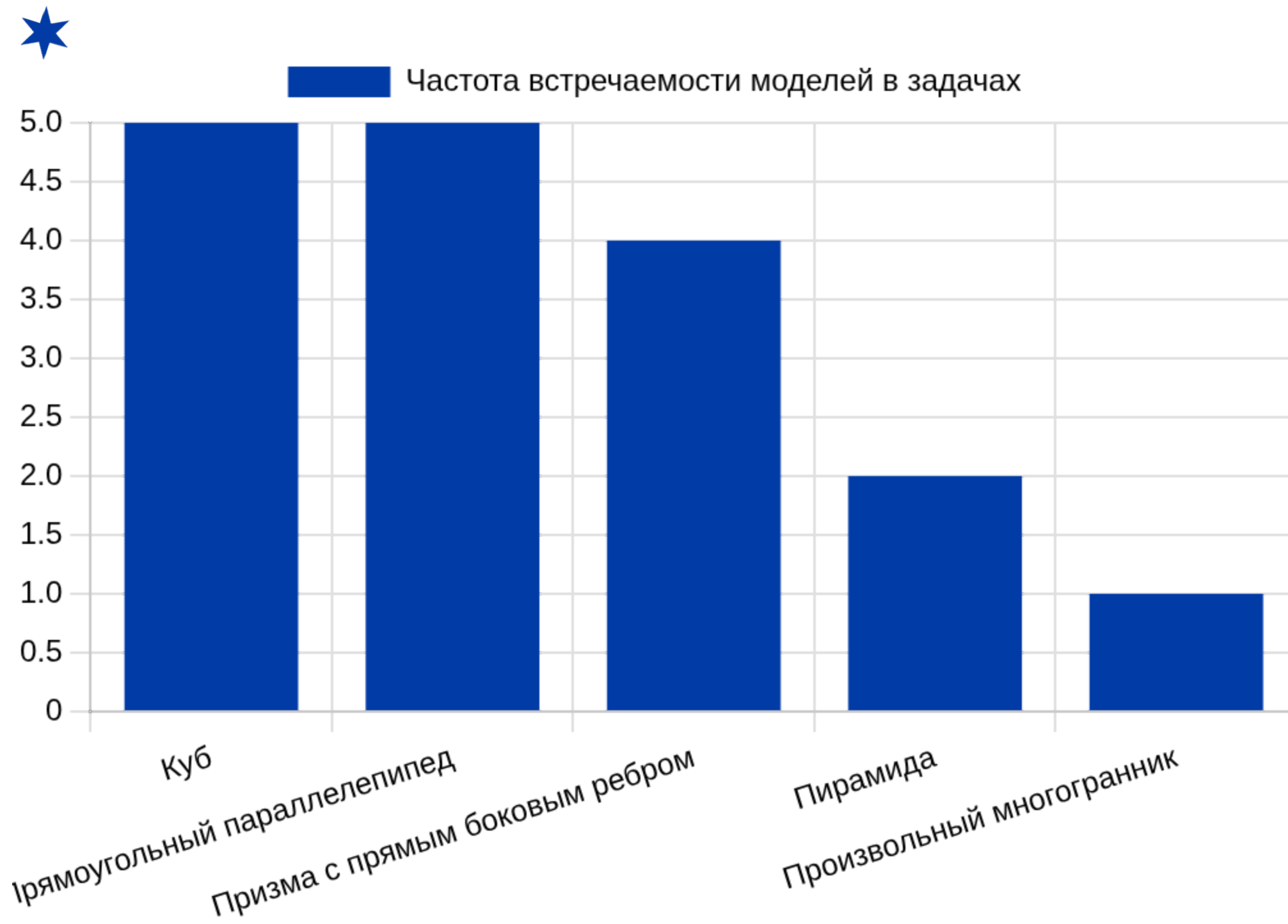


Фокус на точном выборе прямой

Чтобы применить признак, важно, чтобы выбранная прямая лежала в одной из плоскостей и была перпендикулярна другой. Тогда вывод о перпендикулярности двух плоскостей становится логически строгим.



Где перпендикулярность плоскостей встречается чаще всего



★

Большинство школьных задач строится на прямоугольных «каркасах», где есть очевидные прямые углы и удобные ребра. Поэтому доказательства получаются наглядными и последовательными.

Чем проще геометрическая модель и больше прямоугольных граней, тем легче выделить линию пересечения и опереться на прямые, лежащие в плоскостях. Это ускоряет доказательства и снижает вероятность ошибок.

★

Роль линии пересечения плоскостей



Сначала найти опорное ребро

Сначала выделяют общую линию, по которой плоскости пересекаются. Эта линия становится «центром» всех дальнейших рассуждений о двугранном угле.



Провести прямую в одной плоскости

Затем в одной из плоскостей проводят прямую, удобную для проверки. Ключевая цель — получить прямой угол относительно линии пересечения.

Привязать перпендикулярность к двум плоскостям

Когда удаётся установить перпендикулярность проведённой прямой к линии пересечения и связать её с другой плоскостью, вывод о взаимной ориентации становится обоснованным.



Двугранный угол и его элементы



- Перпендикулярные плоскости образуют прямой двугранный угол. У двугранного угла выделяют две полуплоскости, а также ребро — линию пересечения этих плоскостей.
- Величина прямого двугранного угла равна 90° . На схеме обычно показывают обе плоскости, их общую линию и отметку прямого угла, чтобы связать визуальную модель с определением.



Термины, которые должны быть в решении задач

Краткий словарь для доказательств: как назвать плоскости, линию их пересечения, прямую, перпендикулярную плоскости, и сам угол между плоскостями. Эти записи помогают не терять логические связи.

Когда термины записаны точно, доказательство становится проверяемым: видно, что именно вы сравниваете (плоскости), где фиксируете угол (ребро) и как используете перпендикулярность (через прямую).

Термин	Значение	Пример записи
Плоскости	две плоскости пространства	α и β
Ребро двугранного угла	линия пересечения плоскостей	AB
Перпендикулярные плоскости	плоскости, образующие угол 90°	$\alpha \perp \beta$
Перпендикуляр к плоскости	прямая, образующая прямой угол с плоскостью	AN $\perp$ β
Двугранный угол	угол между двумя плоскостями	прямой двугранный угол

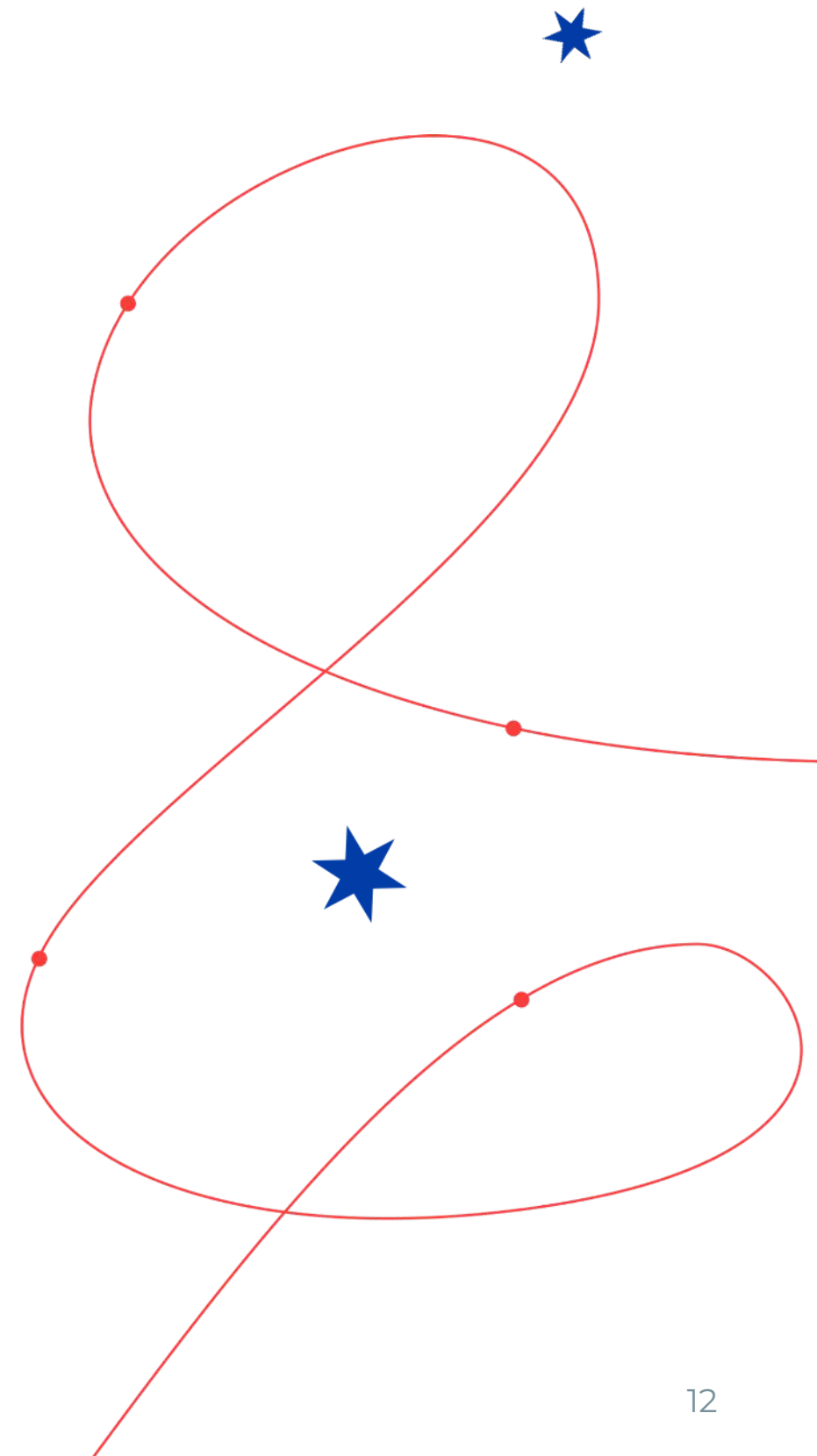
Свойства перпендикулярных плоскостей

Если две плоскости перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная их линии пересечения, оказывается перпендикулярной другой плоскости.

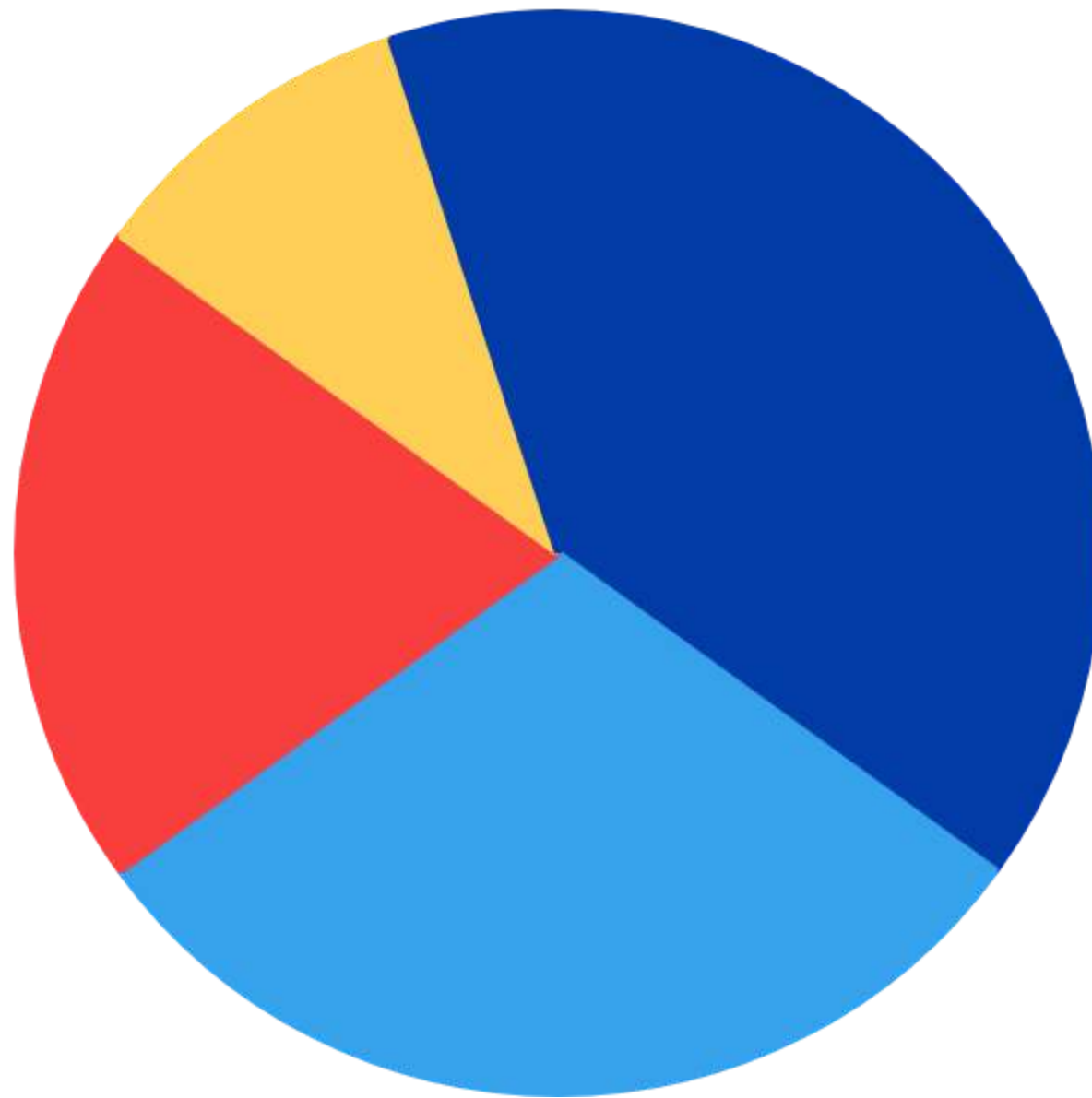
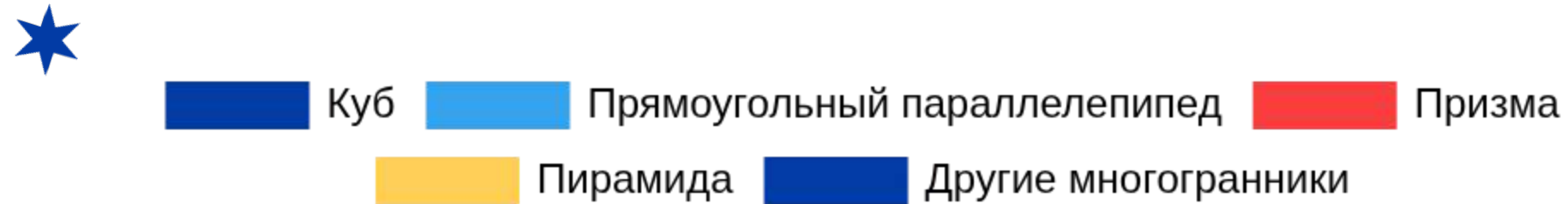
Через точку пересечения можно провести в одной плоскости разные прямые, удовлетворяющие условию перпендикулярности к линии пересечения; соответствующие сечения будут различными, но вывод о перпендикулярности сохранится.

Эти факты позволяют переносить информацию с чертежа на доказательство: достаточно один раз установить связь прямой с линией пересечения, чтобы затем распространить ее на всю плоскость.

При работе с многогранниками свойства перпендикулярных плоскостей помогают перейти от локального угла (вдоль ребра) к общему взаимному расположению граней и тем самым упростить рассуждения.



Основные многогранники и их учебные модели



Оценочное распределение по типичным темам школьных задач (по данным автора материала)

★

В таких телах часто можно сразу выделить соседние грани, провести нужные перпендикуляры и работать с прямыми углами, не перегружая доказательство лишними конструкциями.

Наибольшая доля приходится на куб и прямоугольный параллелепипед: эти модели дают надежный «каркас» для освоения ориентации плоскостей в пространстве.



Типичные ошибки в теме



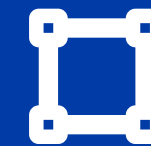
Ориентация «на глаз»

Ошибка: считать плоскости перпендикулярными только по внешнему виду рисунка. Чертеж может быть неточным, а в решении нужно обосновывать 90° через определения или признаки перпендикулярности.



Смешивание перпендикулярностей

Ошибка: путать перпендикулярность прямой и плоскости с перпендикулярностью двух плоскостей. Это разные по смыслу утверждения, и доказываются они разными шагами.

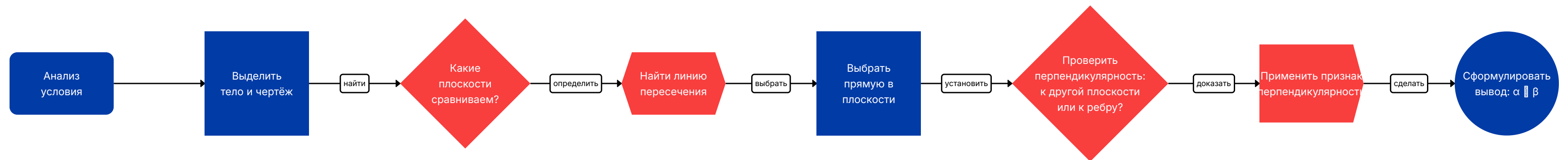


Забытое ребро двугранного угла

Ошибка: не указать линию пересечения плоскостей в записи доказательства. Без ребра двугранного угла остается неясным, к чему именно относится прямой угол и где проверяется условие.

Логика решения задач на доказательство

Типовой алгоритм для куба, призмы, пирамиды и прямоугольного параллелепипеда: от условия к нужному признаку перпендикулярности.



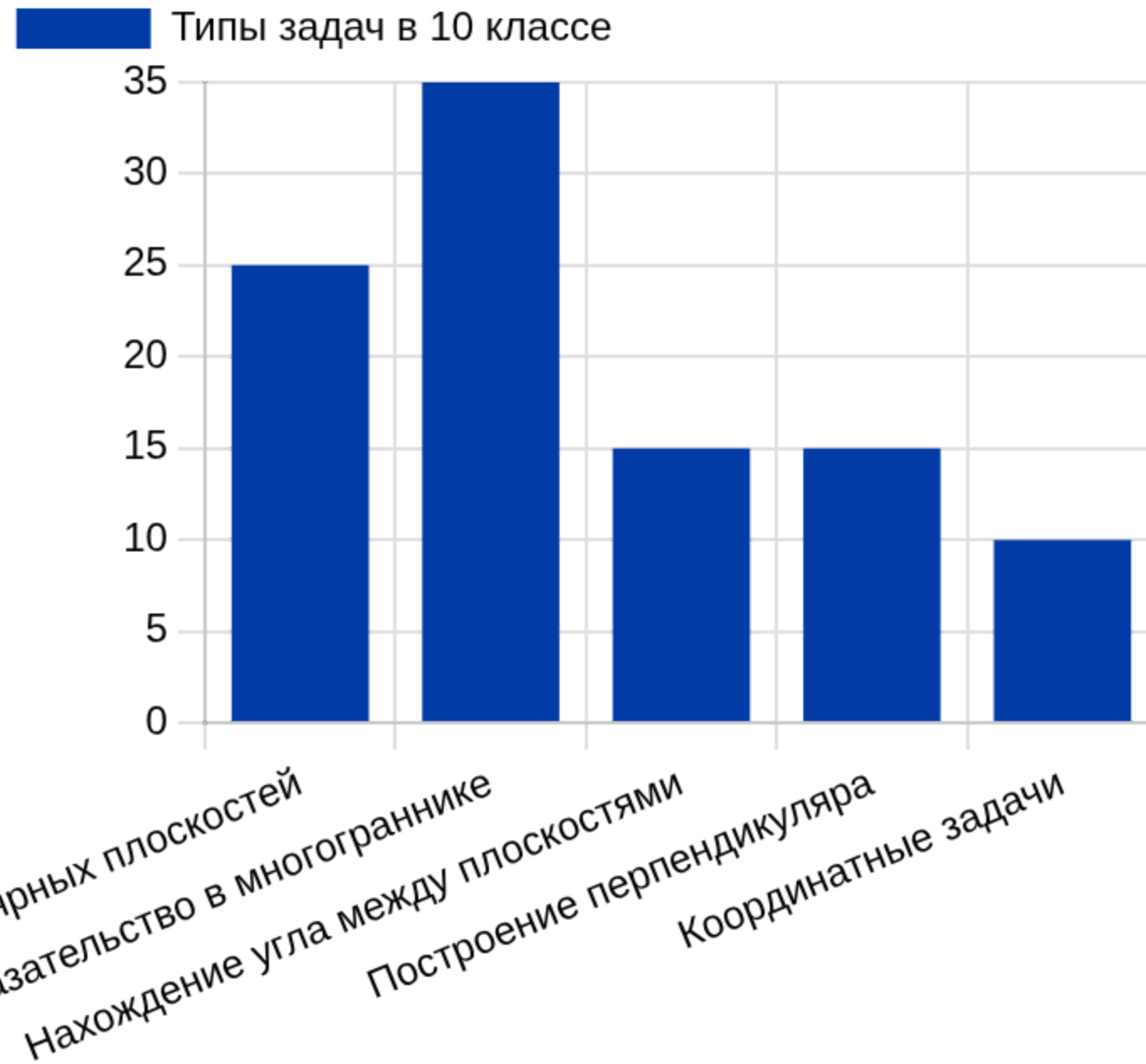
Примеры из окружающей среды



- В комнате пол и стена обычно образуют прямой угол: они задают наглядный образ двух перпендикулярных плоскостей. По сути, это «простая» модель двугранного угла, знакомая каждому с детства.
- Похожее соответствие есть у коробки и книги, поставленной вертикально: одна грань играет роль основания, другая — боковой поверхности. Даже крышка ноутбука в открытом положении относительно основания демонстрирует ту же идею с жесткими соединениями.



Какие виды задач встречаются в 10 классе



Преобладают задания на доказательство: они тренируют перенос условия на чертёж и выбор подходящей прямой в одной плоскости.

Чаще всего учащиеся отрабатывают модели куба и прямоугольного параллелепипеда: в них удобно выделять ребро и строить доказательства через прямые углы.



Оценка по типичным темам школьных упражнений (по данным авторского материала)

Связь с координатной геометрией



В координатной геометрии перпендикулярность плоскостей проверяют через нормальные векторы. Если нормали двух плоскостей взаимно перпендикулярны, то в заданной постановке плоскости образуют прямой угол.



Такой подход полезен, когда на рисунке трудно «увидеть» ребро двугранного угла, а условие дано формулами или координатами точек. Тогда переход к векторам делает задачу вычислимой.

Уравнения плоскостей переводят пространственную задачу в алгебраическую: вместо построений достаточно подставлять координаты и работать с коэффициентами. Это снижает зависимость от качества чертежа.

Связь с координатной геометрией помогает глубже понять смысл перпендикулярности: геометрический факт превращается в свойство направлений, которое можно проверять строго по формулам.



Ключевые выводы по теме

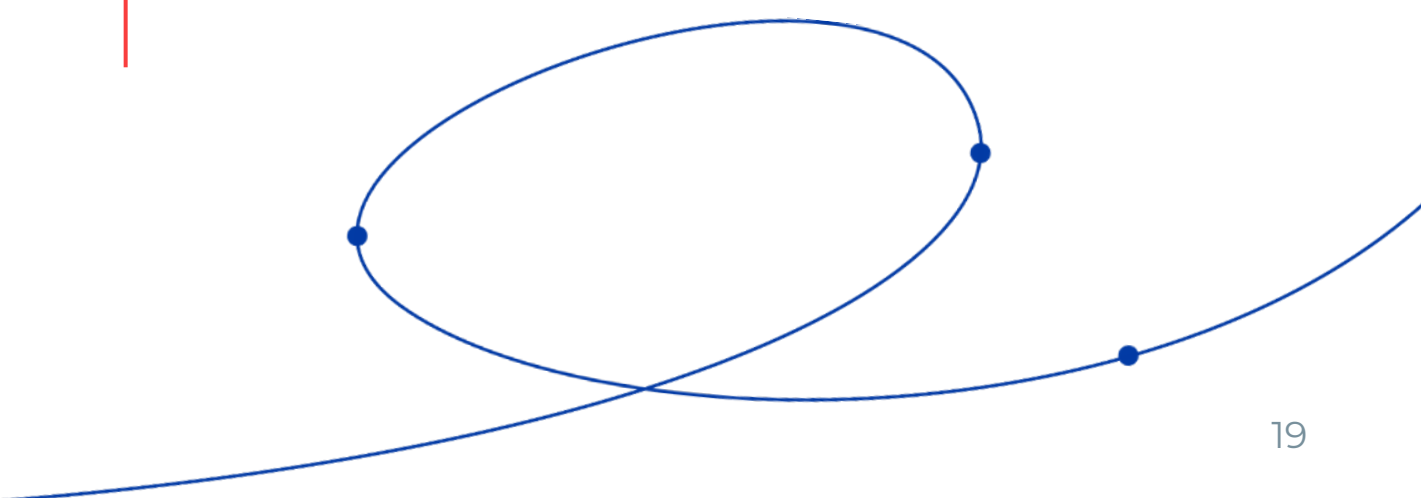


Перпендикулярность плоскостей задается прямым двугранным углом: в доказательстве важно указать, какие именно плоскости рассматриваются и где проходит их линия пересечения.

Чтобы обосновать 90° , часто достаточно перейти к перпендикулярной прямой: она строится или выбирается в одной плоскости так, чтобы она была перпендикулярна ребру двугранного угла, и тогда вывод становится корректным.



Главные опорные элементы — линия пересечения плоскостей, найденные перпендикуляры в многогранниках и признаки взаимного расположения прямых и плоскостей. Уверенность в этих шагах делает решения короче.



Итог урока: что нужно знать о перпендикулярных плоскостях

Перпендикулярные плоскости связывают определение двугранного угла, признаки перпендикулярности и свойства многогранников в одну систему. В задачах опирайтесь на линию пересечения, выбор прямой и точные геометрические признаки — это основа для будущих тем: расстояний, углов и координатных методов.

