

Выражение и множество его значений

Как одно выражение даёт разные ответы и какие из них возможны?

Expression

Зачем изучать выражения в 7 классе

Эта тема помогает понимать, какие ответы возможны, как проверять вычисления и почему одно и то же выражение меняется при разных значениях переменной.



Что называют алгебраическим выражением

Состав выражения



Алгебраическое выражение — это запись из чисел, букв, знаков действий и скобок. Оно показывает правило вычисления и позволяет работать с неизвестными и изменяющимися величинами.

Примеры записи



К таким выражениям относятся $7+3x$, $2(a-5)$, $(x+1)/4$ и $5m-2n$. В них буквы заменяют разные числа, а результат зависит от выбранных значений.

Числовое выражение



Если в записи нет букв, получается числовое выражение. После выполнения всех действий оно имеет единственный конкретный результат, который можно сразу вычислить без подстановок.

Буквенное выражение

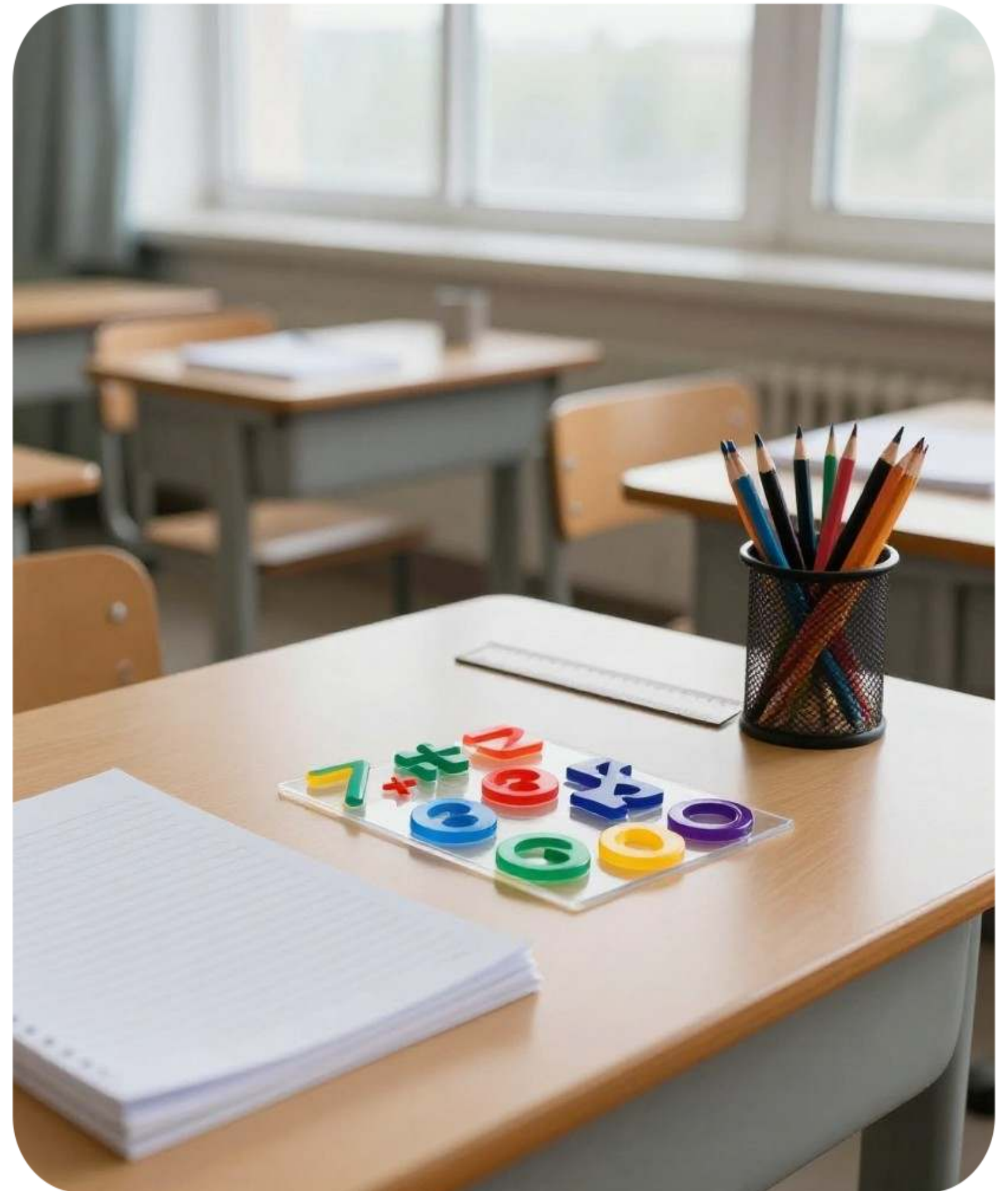


Буквенное выражение может принимать разные значения. Чтобы найти результат, вместо букв подставляют числа и затем выполняют действия по правилам порядка вычислений.

Зачем различать



Понимание вида выражения помогает не путать обычный счёт с формулой. Это особенно важно при решении задач, где нужно учитывать подстановку и ограничения на переменные.



Переменная и её значение



Что такое переменная

Переменная — это буква, которая обозначает число, ещё не выбранное или меняющееся в задаче. Она помогает кратко записывать общие правила и зависимости между величинами.



Одна запись — разные ответы

Если $x=2$, то $x+4$ равно 6. Если $x=5$, то получится 9. Одно и то же выражение даёт разные результаты при разных подстановках.



Подстановка числа

Чтобы найти значение выражения, вместо буквы подставляют нужное число. Затем выполняют все действия по порядку и получают конкретный ответ для этого случая.



Наглядное представление

Переменную удобно показывать таблицей подстановок, числовой прямой, линейкой или весами. Такие изображения помогают увидеть, что значение выражения зависит от выбранного числа.



Примеры выражений и их значений

Таблица показывает, как одно выражение меняется при разных значениях x и где возникает ограничение.

Для одних выражений значения меняются плавно, для других есть ограничения: в $6/x$ при $x=0$ результат не определён.

Составлено по правилам подстановки и вычисления выражений.

Выражение	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=0$
$x+4$	5	6	7	4
$2x-1$	1	3	5	-1
$6/x$	6	3	2	не опр.
x^2	1	4	9	0

Допустимые значения переменной

01

Не любое число подходит

В выражение нельзя подставлять произвольное число. Некоторые значения нарушают смысл записи, например делают деление невозможным или приводят к запрещённым действиям.

02

Деление на ноль

В выражении $6/x$ нельзя брать $x=0$, потому что деление на ноль не определено. Поэтому ноль исключают из допустимых значений переменной.

03

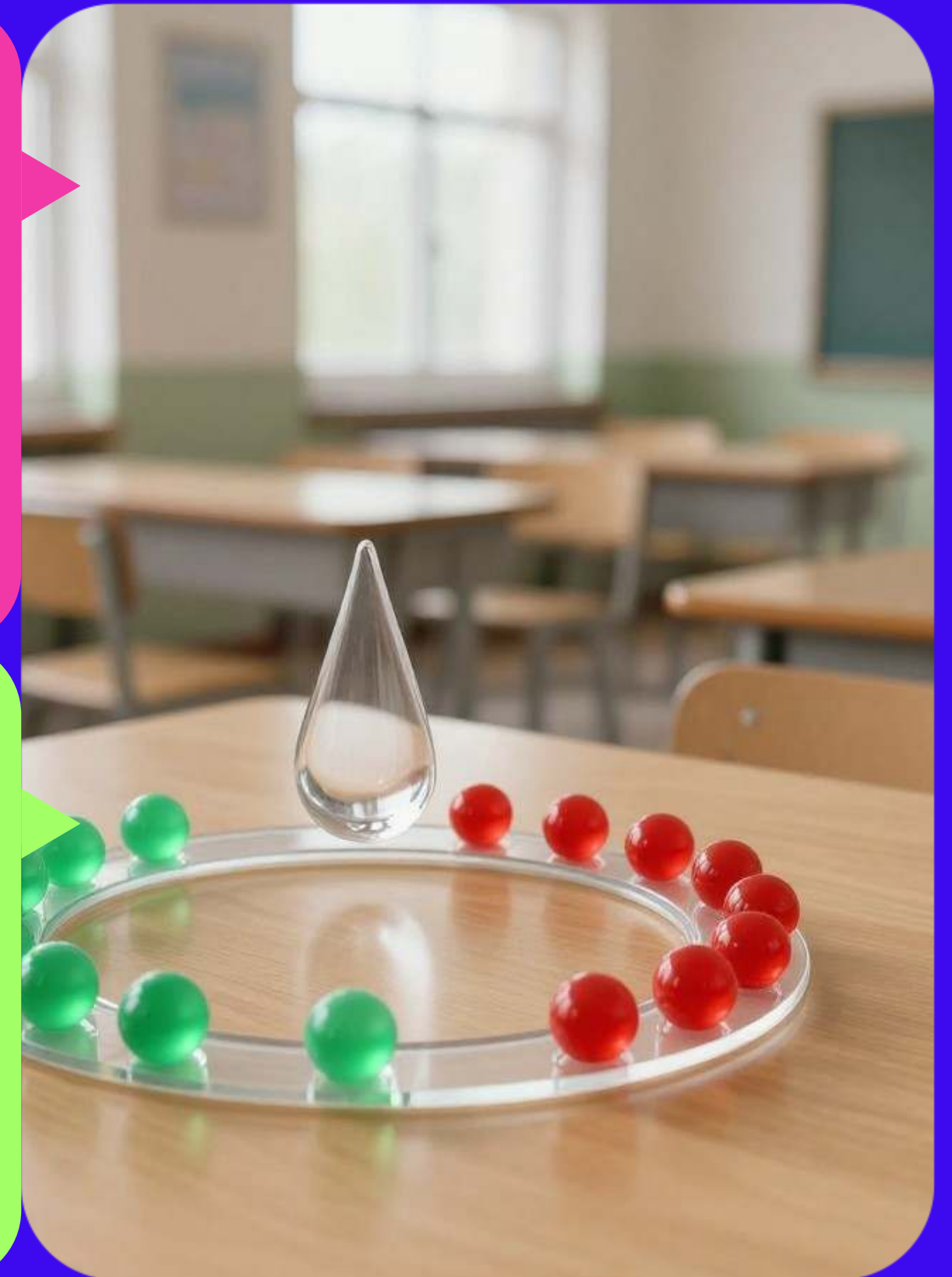
Ограничения в дробях и корнях

Если в выражении есть дробь, знаменатель не должен быть равен нулю. В корне чётной степени подкоренное выражение обязано быть неотрицательным.

04

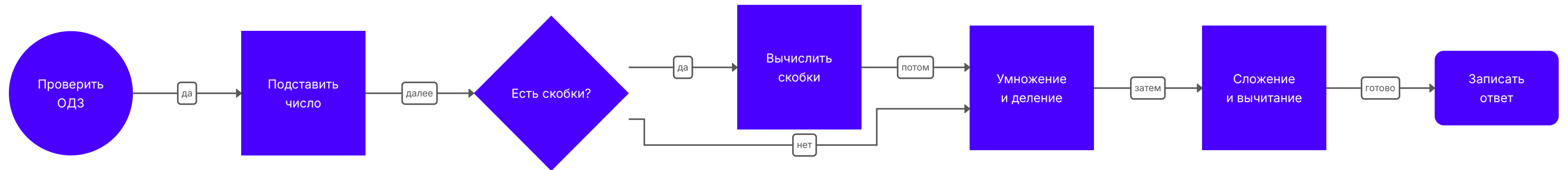
Область допустимых значений

Все разрешённые значения переменной образуют область допустимых значений. Она показывает, какие подстановки можно делать, чтобы выражение имело смысл и давало правильный результат.



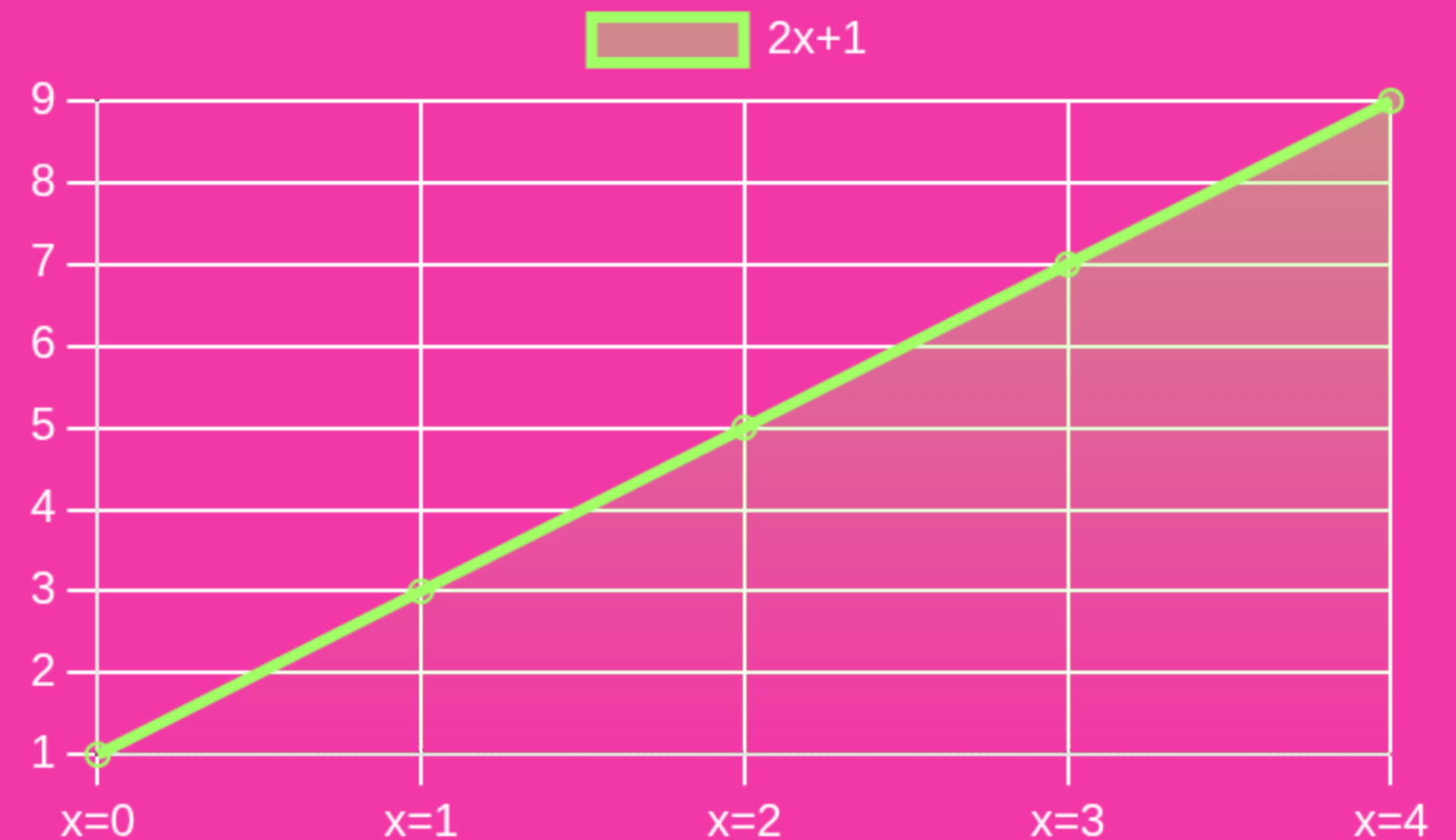
Как находят значение выражения

Алгоритм вычисления значения с учётом допустимых значений и порядка действий.



Как меняется значение выражения $2x+1$

- Каждый следующий шаг по x увеличивает результат на одну и ту же величину.
- Это линейная зависимость: при увеличении x на 1 значение выражения возрастает на 2.



Вычислено по формуле $2x+1$ для $x=0,1,2,3,4$.

Что такое множество значений выражения



01

Смысл понятия

Множество значений — это все результаты, которые может принимать выражение при допустимых значениях переменной. Оно показывает не один ответ, а весь возможный набор.

02

Конечный набор

Если переменная может принимать только несколько чисел, множество значений можно перечислить полностью. Тогда ответ записывают как список отдельных полученных чисел.

03

Бесконечный набор

Когда переменная меняется на промежутке или принимает бесконечно много значений, множество значений тоже может быть бесконечным. В таких случаях используют промежутки или неравенства.

04

Примеры из алгебры

Для $x+1$ при $x=1,2,3,4$ получаются 2, 3, 4, 5.
Для x^2 при целых x — 0, 1, 4, 9, 16 и другие неотрицательные числа.

Почему разные значения переменной дают одинаковый результат

Симметрия выражения

У некоторых выражений есть симметрия. Например, x^2 одинаково работает для противоположных чисел: 3 и -3 дают один результат, потому что квадрат убирает знак.

Одинаковые значения

Для x^2 при $x=-2$ и $x=2$ получается 4, а при $x=-3$ и $x=3$ — 9. Значение зависит не только от величины числа, но и от формы выражения.

Графический смысл

Такое поведение хорошо видно на параболе: её левая и правая части зеркально похожи. Поэтому разные значения переменной могут приводить к одному и тому же ответу.



Одинаковые и разные значения для нескольких выражений

x	x^2	$x+5$
-2	4	3
-1	1	4
0	0	5
1	1	6
2	4	7



Таблица показывает, как два выражения ведут себя при одинаковых значениях x .



Квадрат даёт одинаковые результаты для противоположных чисел, а линейное выражение увеличивается на 1 при каждом шаге x .

По значениям $x = -2, -1, 0, 1, 2$, заданным в условии.

Множество значений на промежутке чисел



$$0 \leq x \leq 3$$

Сначала задают допустимый промежуток для переменной. Это ограничение определяет, какие подстановки можно использовать при вычислении значения выражения.



Подстановка в выражение

Для $x+2$ получаются значения от 2 до 5, а для $2x$ — от 0 до 6. Разные выражения на одном промежутке дают разные наборы результатов.



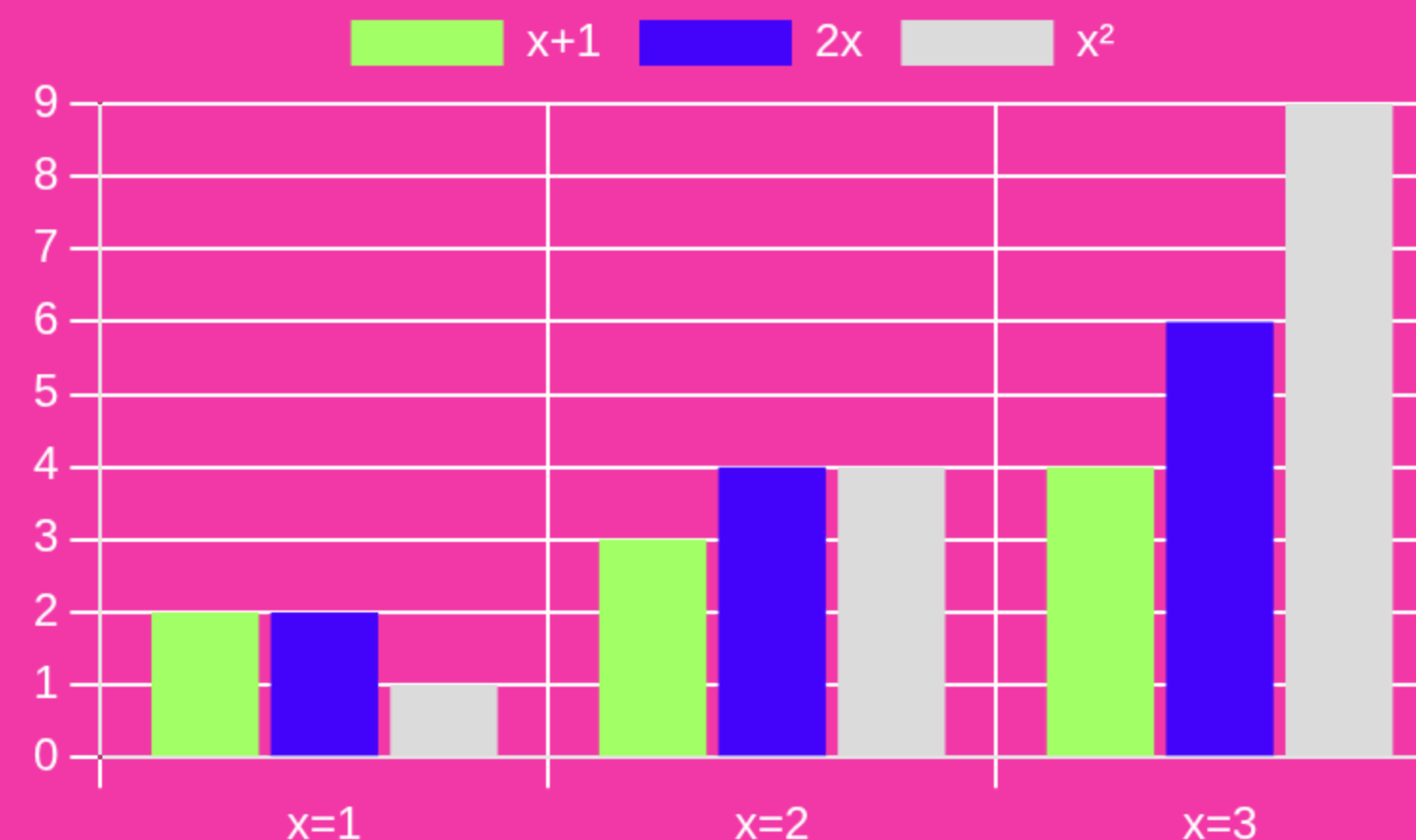
Как записать ответ

Набор значений можно перечислить, записать неравенством или указать промежутком. Выбор зависит от того, являются ли значения отдельными числами или непрерывным отрезком.

Сравнение наборов значений разных выражений

➤ На диаграмме удобно сравнить, как быстро растут значения при одинаковых x .

➤ Линейные выражения меняются равномерно, а квадрат растёт быстрее и заметно опережает их уже при $x=3$.



Значения вычислены для $x = 1, 2, 3$ по заданным выражениям.

Выражение как правило для решения задач

01

Цена за единицу

Если одна тетрадь стоит 25 рублей, то выражение $25x$ показывает стоимость x тетрадей. Оно сразу задаёт правило, по которому можно находить цену покупки без лишних рассуждений.

02

Подстановка числа

При $x=3$ получаем 75 рублей, а при $x=4$ — 100 рублей. Подстановка помогает быстро проверить, как меняется ответ при изменении количества предметов.

03

Множество возможных сумм

Если x — целое число, множество значений состоит из всех возможных сумм за целое число тетрадей. Это удобно для задач, где количество предметов нельзя дробить.

04

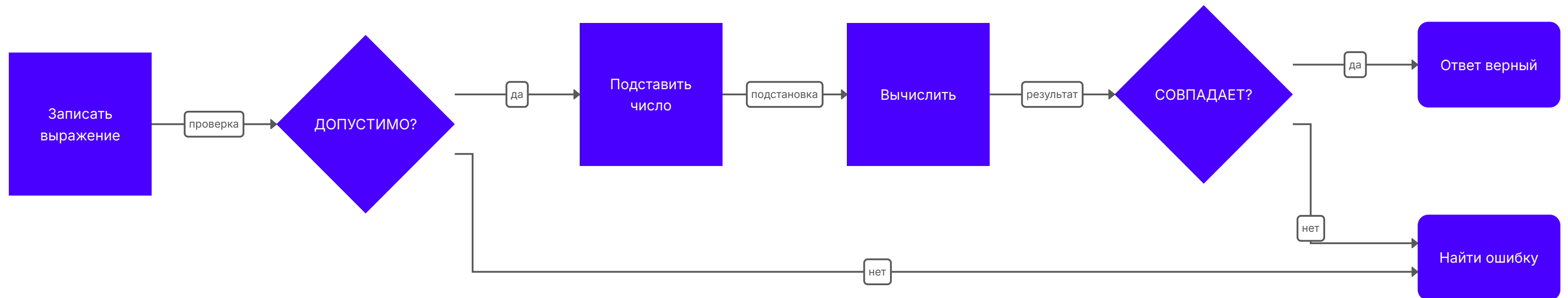
Широкое применение

Такие выражения встречаются в задачах на стоимость, расстояние, время и количество. Они описывают связь между величинами и позволяют записывать её одной короткой формулой.



Проверка ответа в задаче с выражением

Алгоритм помогает не только вычислить значение, но и убедиться, что ответ подходит по условию задачи.



Типичные ошибки при вычислении значений выражений

Пропуск скобок

Если не учитывать скобки, результат меняется уже на первом шаге вычислений. Из-за этого даже правильная подстановка числа не спасает ответ от ошибки.

Деление на ноль

Иногда подставляют
число, при котором
знаменатель
обращается в ноль.
Такое значение
недопустимо,
и выражение в этом
случае не имеет смысла.

Нарушение порядка действий

Сначала выполняют умножение и деление, а потом сложение и вычитание. Когда этот порядок нарушают, итоговое значение выражения получается неверным.

Неверная подстановка

Порядок действий в выражении

Таблица напоминает, в какой последовательности нужно выполнять вычисления.

Соблюдение порядка действий даёт единственный правильный результат; нарушение последовательности меняет ответ даже при тех же числах.

Правила порядка действий в арифметических выражениях.

Действие	Очередь	Пример
Скобки	1	$(2+3)$
Степени	2	2^2
$\times$ и $\div$	3	$6:2$
$+$ и $-$	4	$4-1$

Задания с ограничением на значения переменной



Конечный набор

Если x может принимать только 1, 2 и 3, то все значения выражения можно найти заранее и перечислить полностью. Такой ответ будет конечным списком.



Разные формы записи

Набор результатов можно записывать числами, неравенством или промежутком. Выбор зависит от того, какие значения разрешены и насколько удобно их описать.



Промежуток чисел

Когда в условии задан промежуток, например $x > 0$, переменная принимает много значений. Тогда множество значений выражения обычно нельзя перечислить по одному числу.



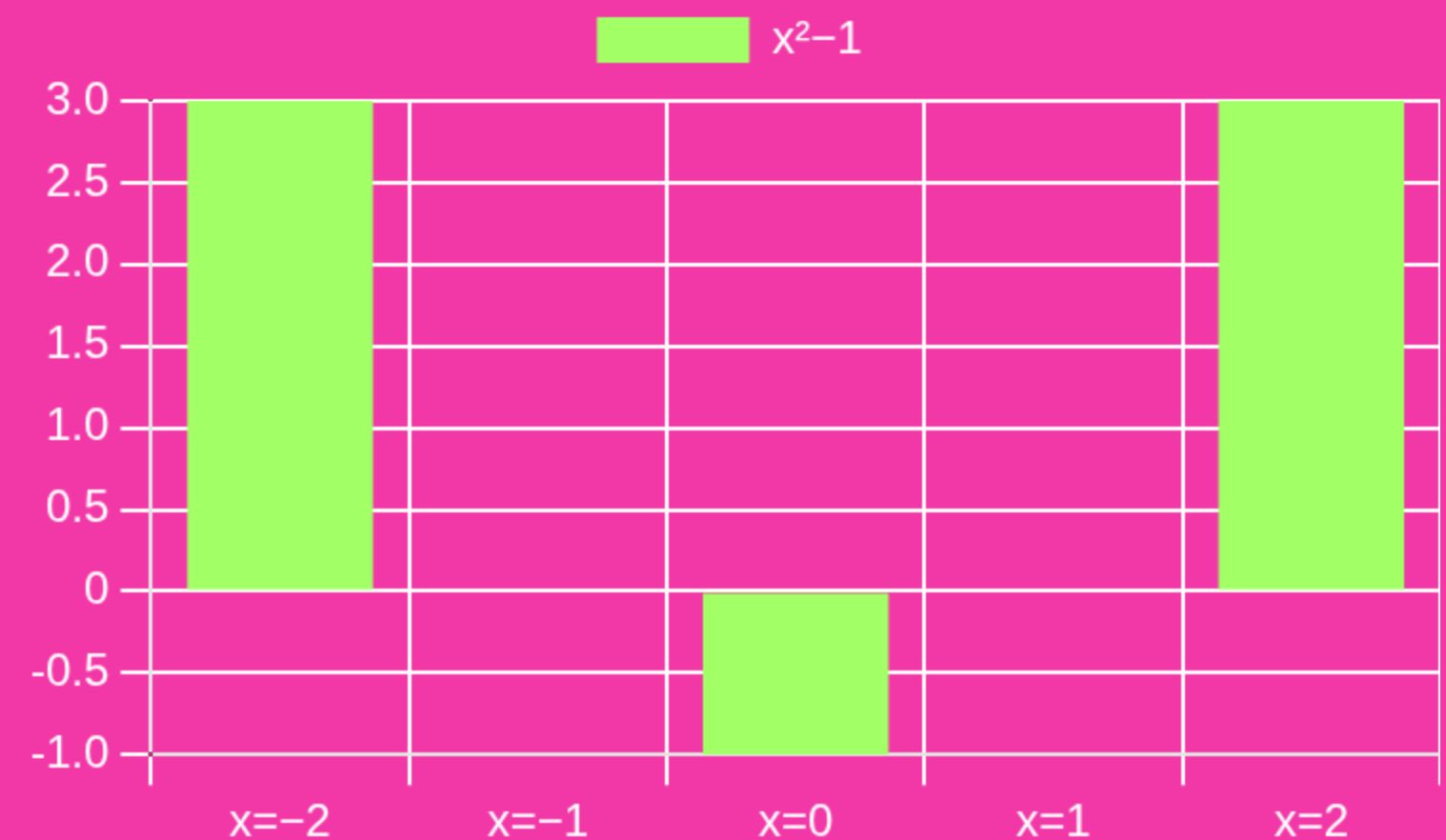
Чтение условия

Важно внимательно смотреть, где переменная ограничена отдельными числами, а где — целым промежутком. Это помогает не ошибиться при записи ответа и не включить лишние значения.

Какие ответы даёт выражение x^2-1

➤ Одинаковая формула может давать разные ответы в зависимости от выбранного значения x .

➤ Выражение бывает положительным, нулевым и отрицательным; знак результата определяется подстановкой и не является постоянным.



Значения вычислены для $x = -2, -1, 0, 1, 2$ по формуле $x^2 - 1$.

Выражение открывает все ВОЗМОЖНЫЕ ОТВЕТЫ

Алгебраическое выражение задаёт правило вычисления, а множество его значений показывает, какие результаты допустимы. Если учитывать область допустимых значений, порядок действий и смысл ответа, ошибки становятся заметно реже.