

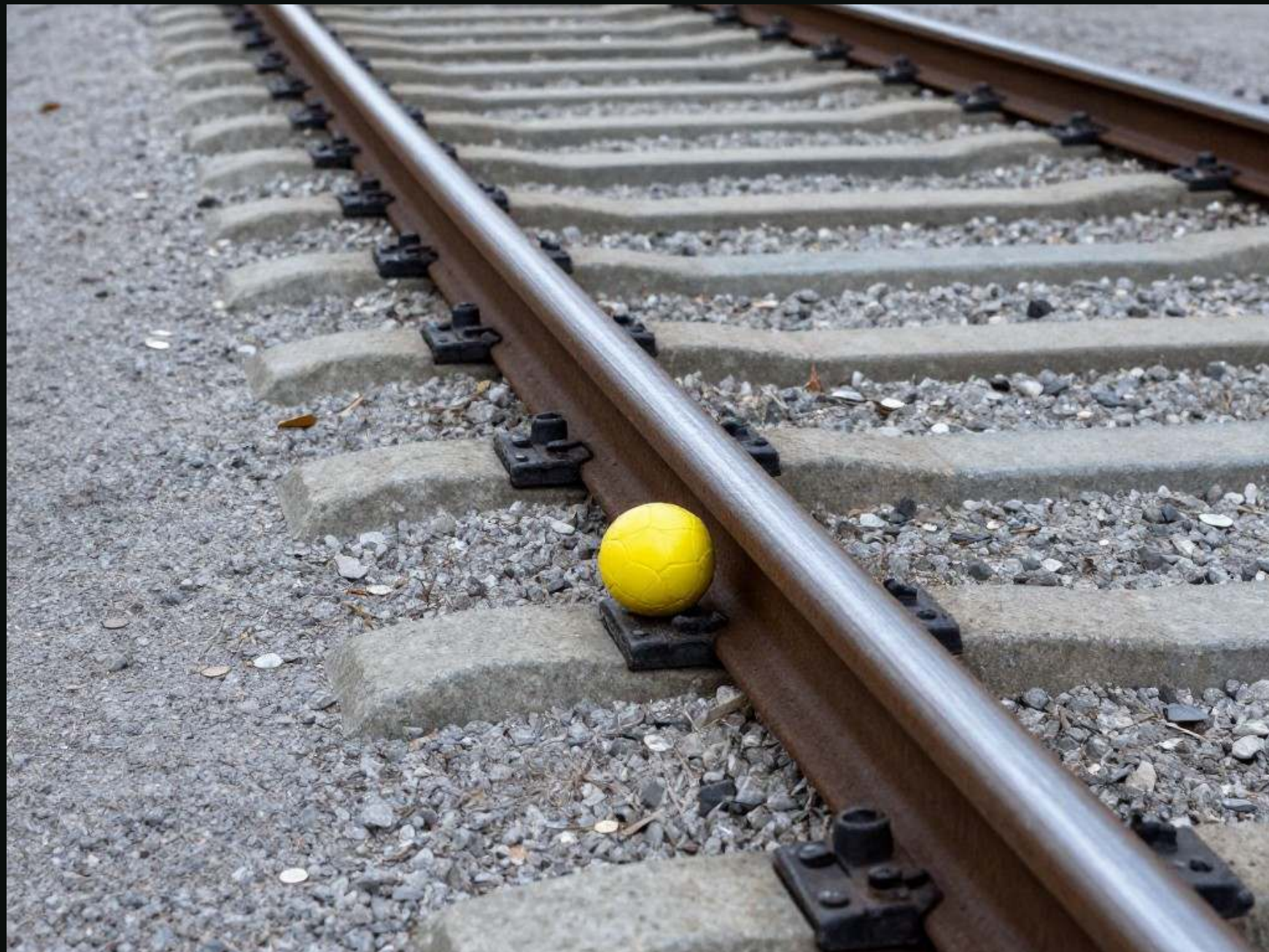
# Касательная: ключевая идея

---

Касательная: одна точка, важный признак,  
много задач



# Где мы видим касательную



Касательная встречается в окружностях, чертежах, колесах и графиках. Она помогает понять, где линия лишь касается фигуры, а где уже пересекает ее.

# Жизненный пример: колесо и дорога



## Колесо на дороге

Колесо катится по дороге, и в одной точке его обод «встречается» с поверхностью. На рисунке легко выделить окружность, точку касания, радиус и прямую, которая касается колеса. Именно так видна идея мгновенного направления движения.



## Линия у границы

Похожая ситуация возникает на чертежах и графиках: линия подходит к фигуре почти вплотную, но не проходит через нее рядом с точкой контакта. Такой образ удобно использовать, чтобы запомнить границу и аккуратное касание без пересечения.

# Идея касания

## Одна точка контакта

Касание всегда связано с одной общей точкой. Если линия идет рядом и не входит в фигуру около этой точки, это хороший признак касательной.

1

## Без второго пересечения

Для окружности касание особенно заметно: прямая как будто только прикасается к кругу. Рядом с точкой касания она не пересекает окружность снова.

2

## Смотрим на поведение линии

По рисунку важно смотреть не на «похожесть», а на поведение линии возле точки. Если она не режет фигуру поблизости, перед нами касательная.

3

# Определение касательной

## Одно пересечение

Касательная к окружности — это прямая, у которой с окружностью ровно одна общая точка. Эта точка называется точкой касания и отмечается на чертеже.

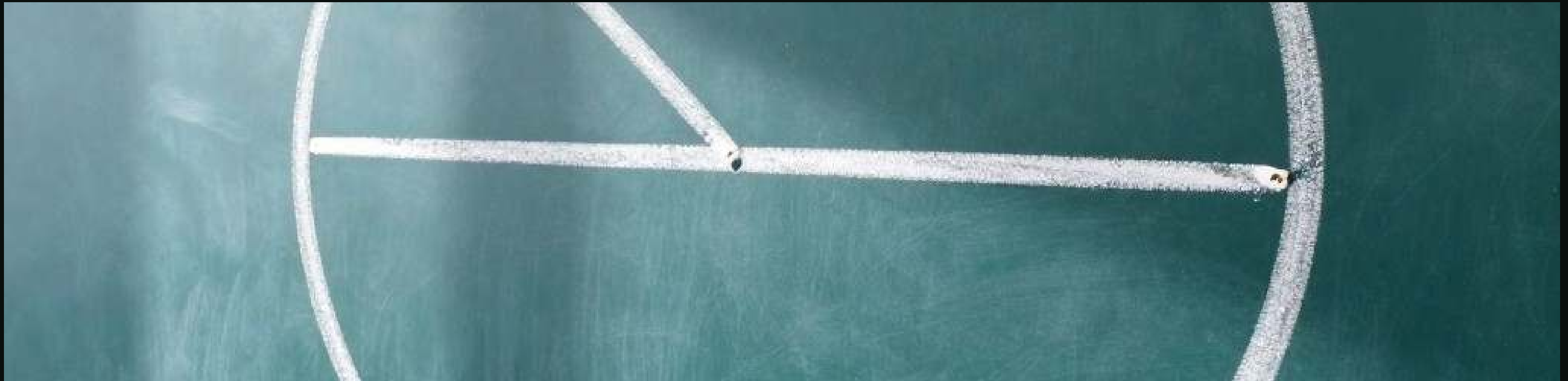
## Считаем точки

Если прямая имеет две общие точки с окружностью, это уже не касательная. Поэтому сначала считают точки пересечения, а потом делают вывод о линии.

## Не путать с рядом проходящей прямой

В школьных задачах важно не перепутать касательную с прямой, которая просто проходит рядом. Решение всегда опирается на точный рисунок и признаки.

# Окружность под прямой: постановка задачи



「1」

## Секущая на рисунке

Сначала на чертеже показывают окружность и прямую, которая пересекает ее в двух точках. Такая линия называется секущей и помогает увидеть отличие от касательной.

「2」

## Касательная на рисунке

Затем добавляют прямую, которая имеет только одну общую точку с окружностью. Это касательная: она касается фигуры и не дает второй точки пересечения.

「3」

## Хорда для сравнения

Полезно также отметить хорду — отрезок внутри окружности. Так легче сравнить, какие линии проходят через круг, а какие только касаются его края.

# Секущая и касательная: различие

Сравним две прямые по числу общих точек с окружностью и по их положению относительно круга.

| Линия       | Общие точки | Признак    |
|-------------|-------------|------------|
| Секущая     | 2           | пересекает |
| Касательная | 1           | касается   |

Главное различие видно сразу: число общих точек. Если точка одна, линия касательная; если две, это секущая.

Определения секущей и касательной к окружности

# Главный признак касательной

## Признак касательной

Если прямая касается окружности в точке  $T$ , то радиус  $OT$ , проведенный в эту точку, образует с касательной прямой угол. Это основной признак касательной.

1

## Как показать на рисунке

На чертеже обязательно отмечают прямой угол между радиусом и прямой. Такой знак показывает, что линия действительно касается окружности в точке  $T$ .

2

# Почему радиус перпендикулярен касательной

## Направление окружности

В точке касания окружность «разворачивается» так, что радиус показывает ее ближайшее направление. Поэтому касательная не может идти вдоль этого направления.

## Почему другие линии не подходят

Любая другая прямая около этой точки либо зайдет внутрь круга, либо уйдет наружу. Только касательная остается снаружи и касается края точно в одной точке.

## Почему получается прямой угол

Отсюда видно, почему радиус и касательная образуют прямой угол. Это самое удобное положение: линия касается окружности, но не пересекает ее рядом с точкой касания.

# 1

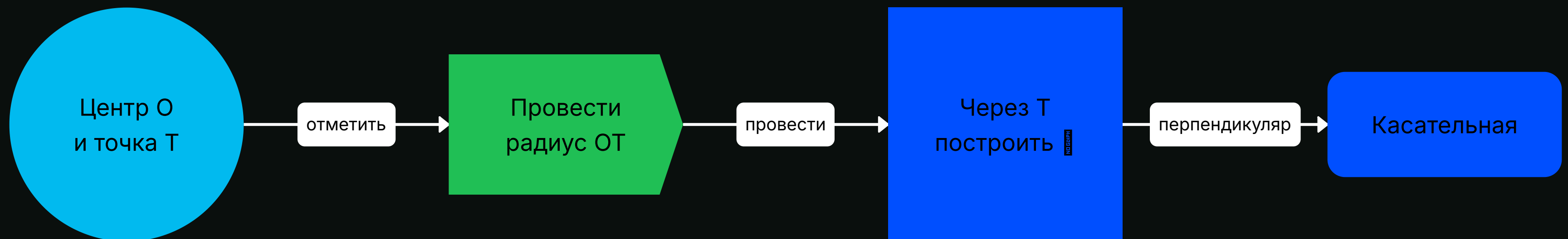
общая точка у касательной и окружности  
делает построение и распознавание  
простыми.

Свойство касательной к окружности

Это достаточно, чтобы по радиусу  
быстро построить касательную  
в точке касания.

# Как построить касательную в точке на окружности

Пошаговое построение по геометрическому признаку касательной.



# 1

вспомогательная окружность с диаметром АО позволяет получить точки касания.

Школьное построение касательной к окружности через внешнюю точку.

В построении используется одна вспомогательная окружность: она помогает найти точки касания аккуратно и без догадок.

# 1

и тот же дуговой участок делает углы равными.

Свойство угла между касательной и хордой.

Свойство связывает два угла с одной и той же дугой и позволяет быстро находить неизвестные значения в задаче.

# Как распознать касательную на чертеже



「1」

## Считаем точки

Сначала посчитай общие точки прямой и окружности. Если их две, это секущая; если одна, перед тобой возможная касательная.

「2」

## Ищем прямой угол

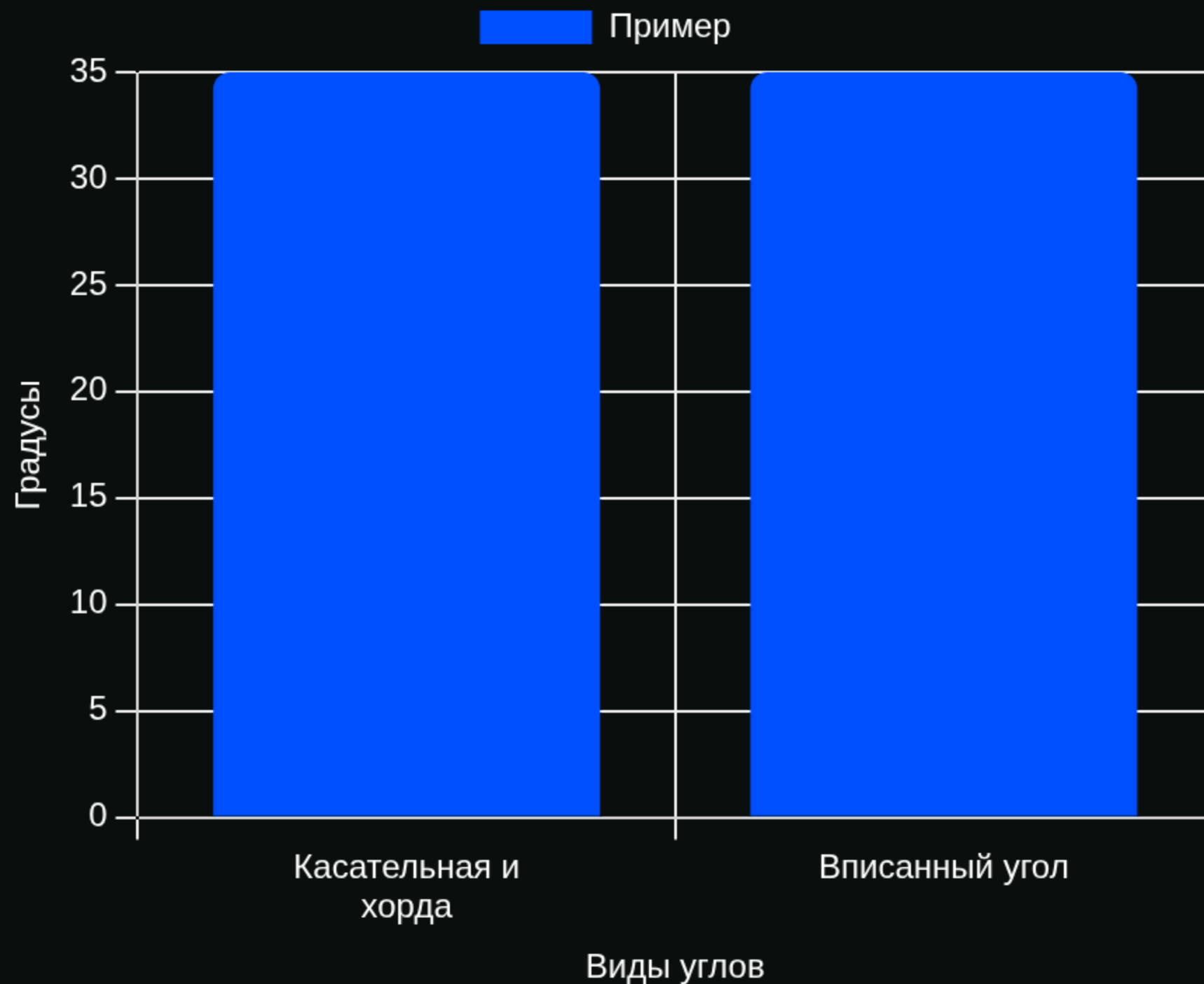
Затем проверь радиус  $OT$ : для касательной он должен быть перпендикулярен прямой в точке  $T$ . Без прямого угла вывод делать рано.

「3」

## Отсекаем лишнее

Если прямая проходит через  $T$ , но не перпендикулярна радиусу, она не касательная. Такой чертёж часто путают с секущей на рисунке.

# Связь угла с дугой



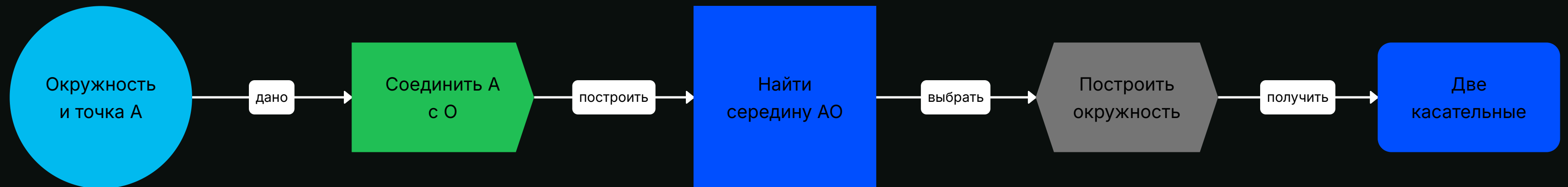
На рисунке показан пример: угол между касательной и хордой равен углу, опирающемуся на ту же дугу. Это позволяет быстро находить неизвестный угол.

Одинаковые значения подтверждают правило: углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Значит, достаточно найти один из них, чтобы определить второй.

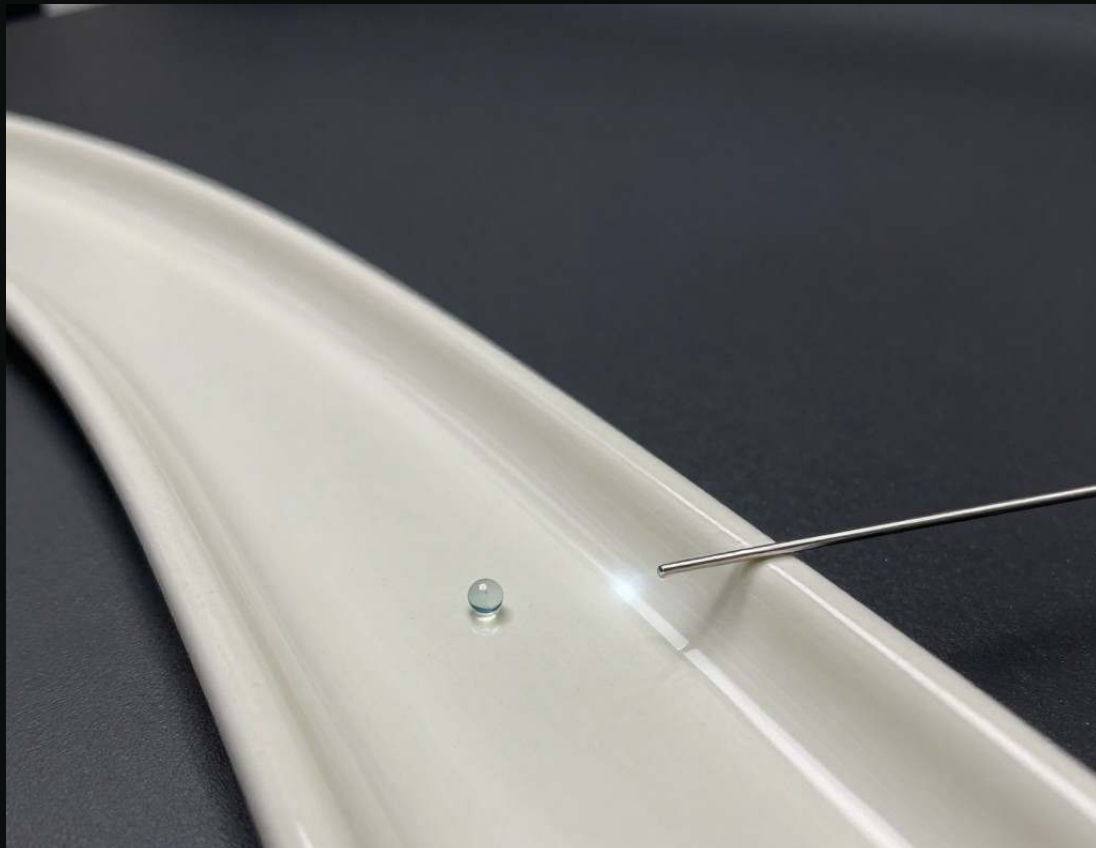
Иллюстрация к свойству угла между касательной и хордой.

# Построение касательной из внешней точки

Построение через вспомогательную окружность с диаметром  $AO$ .



# Касательная на графике: как это выглядит



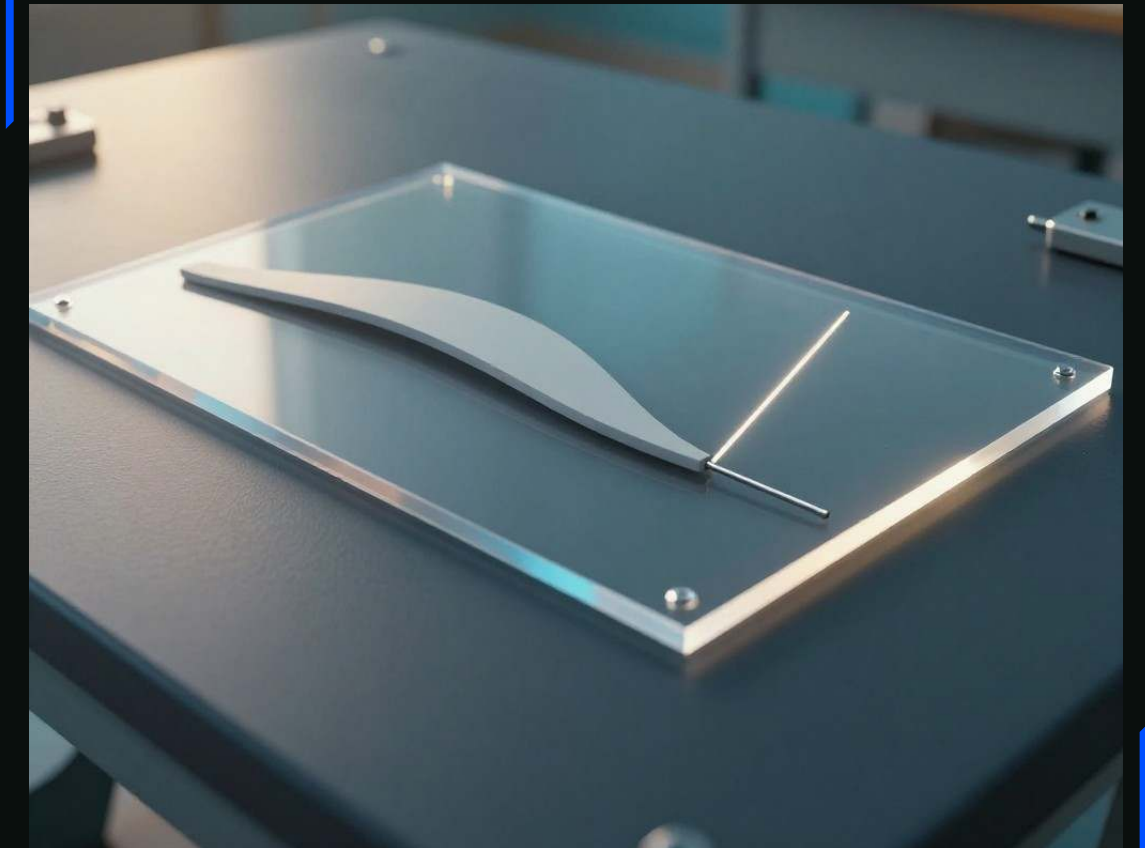
Направление в точке

На гладкой параболе касательная в одной точке показывает, куда график «смотрит» именно сейчас. Рядом с этой точкой линия почти совпадает с кривой, поэтому её удобно использовать как локальную замену участка графика.



Лучшее приближение

Если мысленно приблизить рисунок, касательная становится лучшей прямой для маленького участка кривой. Она не повторяет весь график, но очень точно передаёт его поведение возле выбранной точки.



Не просто рядом

На чертеже важно не путать касательную с линией, которая просто проходит рядом. Настоящая касательная касается графика в одной точке и задаёт его мгновенное направление без формул и вычислений.

# На что чаще всего ошибаются



## Путают с секущей

Если прямая пересекает окружность в двух точках, это секущая, а не касательная. Всегда начинай с подсчёта общих точек, а не с внешнего вида линии.



## Неверный радиус

Радиус должен идти именно к точке касания. Если он проведён к другой точке на окружности, признак касательной уже не работает и ответ становится неверным.



## Нет отметки прямого угла

На чертеже часто забывают прямой угол между радиусом и касательной. Без этого отметка касательной считается непроверенной, даже если линия кажется расположенной правильно.



## Неправильная точка

Точка вне окружности не может быть точкой касания сама по себе. Сначала нужно найти точку на окружности, а уже потом проверять её связь с прямой.

# Проверь, как ты понял тему

## Сколько точек?

У касательной и окружности всегда одна общая точка. Если точек больше, это уже другая прямая, и её нужно проверять отдельно.

1

## Как расположен радиус?

Радиус, проведённый в точку касания, образует с касательной прямой угол. Это главный признак, который помогает быстро проверить рисунок.

2

## Чем отличается секущая?

Секущая пересекает окружность в двух точках, а касательная лишь касается её. Поэтому сначала считают точки, а затем смотрят на перпендикулярность.

3

# Что важно запомнить

---

Касательная — это не просто линия рядом с окружностью, а точный геометрический объект с понятным признаком и полезными свойствами. Он помогает строить чертежи, находить углы и уверенно решать задачи.