

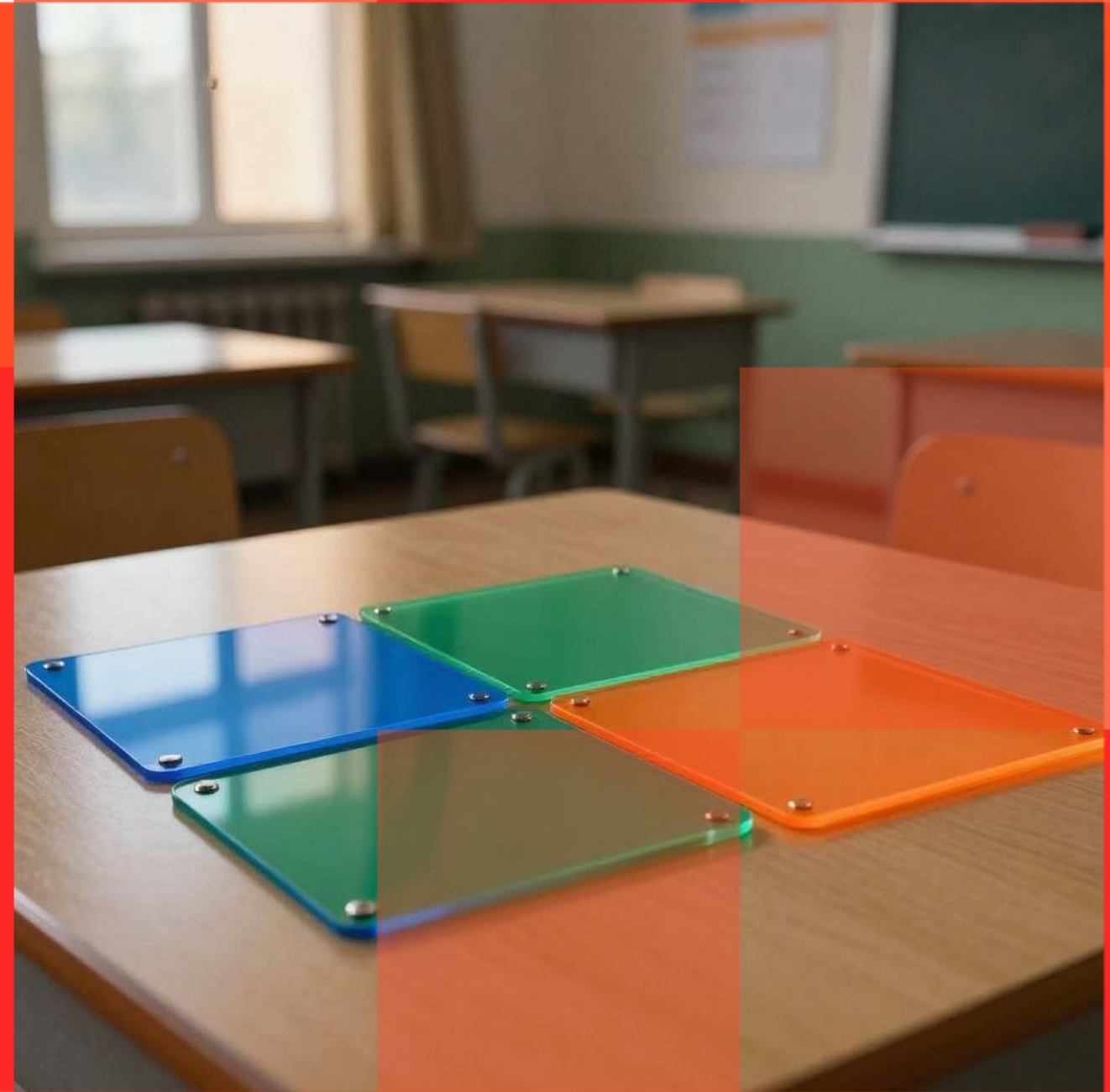
Системы рациональных неравенств: как решать пошагово

Пошаговый разбор рациональных неравенств
и систем без лишних ошибок.



Зачем нужны системы неравенств

Такие неравенства встречаются в задачах про дроби, скорость, время и ограничения. Система собирает несколько условий вместе, а ответом становятся только те значения, которые подходят всем сразу и не нарушают ОДЗ.



Основные определения

Рациональное выражение

Рациональное выражение — это дробь, в которой переменная может стоять в числителе или знаменателе. Главное помнить: знаменатель не должен обращаться в ноль, иначе выражение не определено.

Рациональное неравенство

Рациональное неравенство сравнивает такие выражения с числом или другим выражением. В ответе ищут не одно число, а все значения переменной, для которых сравнение верно.

Система условий

Система неравенств объединяет несколько условий, и каждое из них должно выполняться одновременно. Поэтому решение всегда проверяют по всем неравенствам сразу, а не по отдельности.

Как записывают ответ

Ответ удобно записывать как промежуток, объединение промежутков или пустое множество. Форма записи зависит от того, какие значения входят в решение и какие точки запрещены.

Почему нужны ограничения



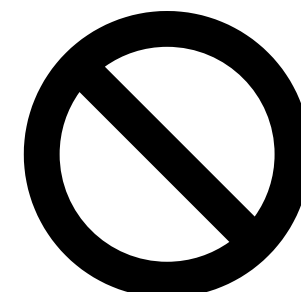
Ноль в знаменателе

Если знаменатель равен нулю, деление становится невозможным, поэтому такая точка никогда не входит в ответ. Её сразу отмечают как запрещённую ещё до построения промежутков.



Проверка границ

Перед записью ответа полезно ещё раз посмотреть на границы промежутков. Это помогает не включить точку, которая делает выражение не определённым или нарушает условие.

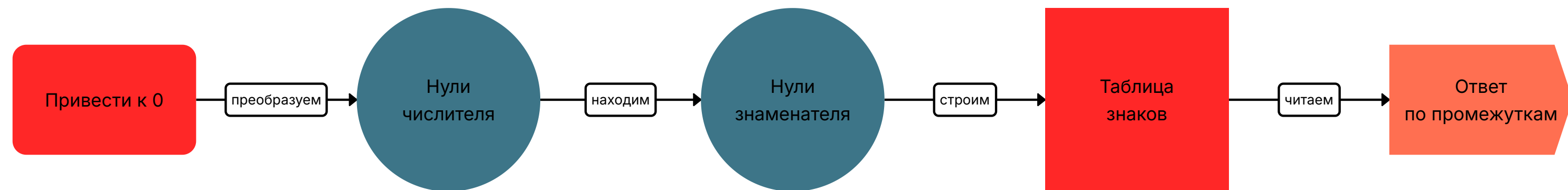


Отдельная проверка

Запрещённые значения нужно выписывать отдельно, чтобы не потерять их при дальнейшем решении. Даже если знак неравенства подходит, точка из ОДЗ всё равно исключается.

Как решать одно неравенство

Последовательность действий для одного рационального неравенства



Мини-пример с одной дробью

Записываем условие

Рассмотрим неравенство $\frac{(x-2)}{(x+1)} \geq 0$.
Сначала определяем, где дробь может
менять знак: это точки, в которых числитель
или знаменатель обращаются в ноль.

Находим точки

Критические точки: $x=2$ и $x=-1$. Точка $x=-1$ запрещена, потому что обращает знаменатель в ноль, а точка $x=2$ проверяется по знаку нестрогого неравенства.

Смотрим по промежуткам

На числовой прямой отмечаем обе точки
и рассматриваем промежутки слева, между
ними и справа. На каждом промежутке знак
дроби определяется отдельно, а затем
выбираются подходящие области.

Формулируем ответ

В ответ входят все значения, где дробь
неотрицательна, но без $x=-1$. Такая запись
показывает и знак неравенства, и запрет
на деление на ноль одновременно.

Что значит решить систему

1. Решить по отдельности

- 1 Сначала решают каждое неравенство отдельно, чтобы узнать его собственные промежутки. Это помогает увидеть, где выполняется первое условие и где выполняется второе условие.

2. Найти пересечение

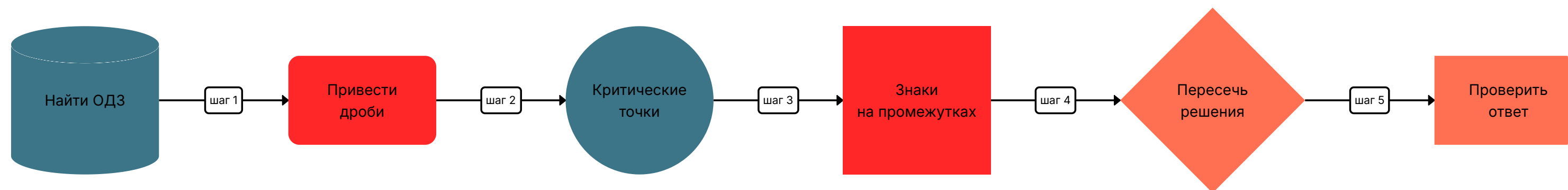
- 2 Потом сравнивают полученные ответы и оставляют только общую часть. Именно пересечение показывает значения переменной, которые удовлетворяют всем неравенствам системы одновременно.

3. Исключить запреты

- 3 После этого снова проверяют ОДЗ. Любая точка, запрещённая хотя бы в одном неравенстве, не может попасть в итоговый ответ, даже если знак в промежутке подходит.

Алгоритм решения системы

Шесть последовательных действий при решении системы рациональных неравенств



Пример 1: решаем первое и второе неравенство

1

Первое неравенство

Для неравенства $\frac{(x-1)}{(x+2)} > 0$ критические точки — -2 и 1 . Знак строгий, поэтому обе границы проверяются только как разделители промежутков, а точка -2 исключается из ОДЗ.

2

Второе неравенство

Для неравенства $\frac{(x+1)}{(x-3)} \leq 0$ критические точки — -1 и 3 . Точка 3 запрещена, потому что обращает знаменатель в ноль, а -1 может входить при нестрогом знаке.

3

Готовим пересечение

После анализа каждого условия получаем два набора подходящих промежутков. Теперь важно не смешивать их, а оставить только те значения, которые подходят одновременно обоим неравенствам.

Пример 1: пересечение решений

Ответы по отдельности

- 1 Для первого неравенства получаем промежутки, где дробь положительна, а точка -2 исключается как запрещённая. Для второго остаются промежутки, где дробь не превышает нуля, при этом точка 3 не входит в ответ.

Находим общую часть

- 2 Далее сравниваем оба набора промежутков на одной числовой прямой. Подходят только те значения, которые удовлетворяют сразу двум неравенствам, поэтому лишние части каждого ответа сразу отбрасываются.

Финальный вывод

- 3 Итог системы — пересечение решений с учётом ОДЗ. Если промежуток есть только в одном ответе, он не подходит. Если граница запрещена, она не включается даже при верном знаке.

Пример 2: общая схема критических точек

Критические точки

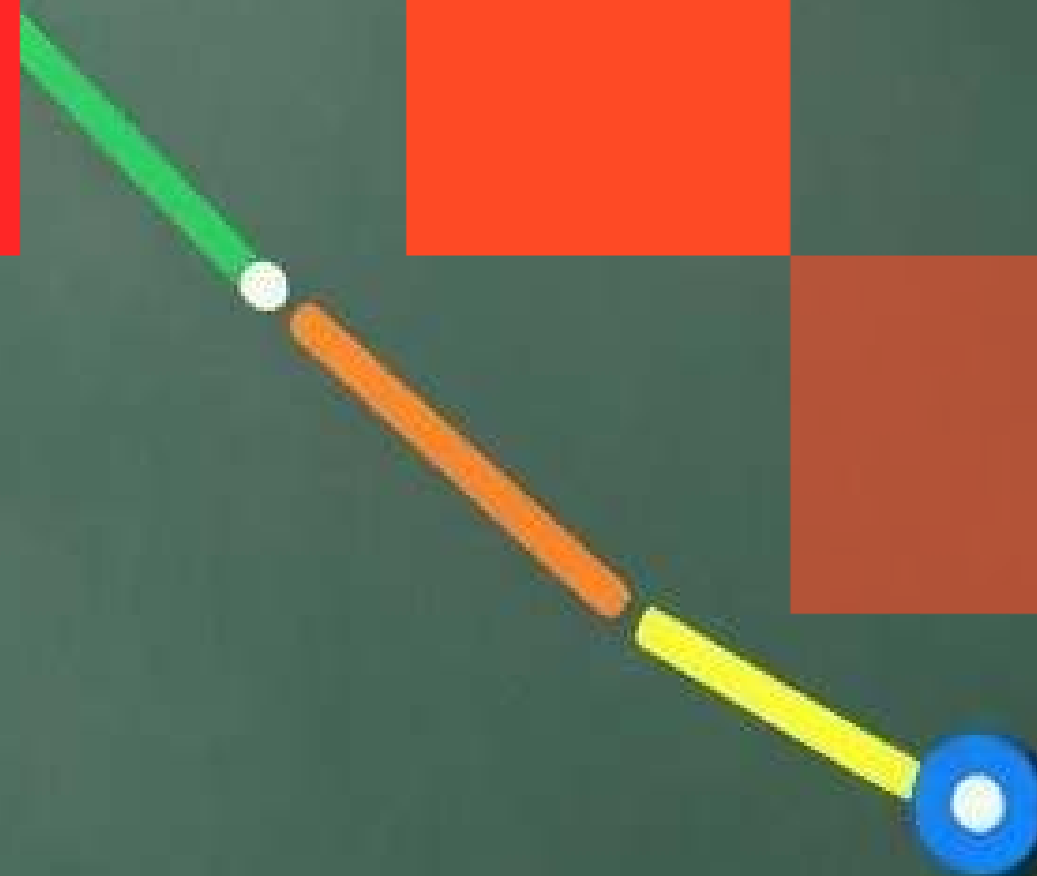
Сначала у каждой дроби выделяют запретные и нулевые точки: для первой это -1 и 4 , для второй — 2 и $-3/2$. Именно они делят прямую на удобные промежутки.

Общая прямая

Когда все точки собраны вместе, видно полную картину: $-3/2$, -1 , 2 , 4 . Такая схема позволяет не рассматривать выражения по отдельности и сразу сравнивать их поведение на одном рисунке.

Польза разметки

Единая разметка помогает не пропустить ни одной границы. На каждом промежутке удобно определить знак обеих дробей и понять, где выполняются оба неравенства одновременно.



Пример 2: работа по промежуткам

1

1. Разметка

Отметьте на числовой прямой все критические точки: $-3/2$, -1 , 2 и 4 . Они разбивают прямую на интервалы, на которых знак каждой дроби остаётся постоянным.

2

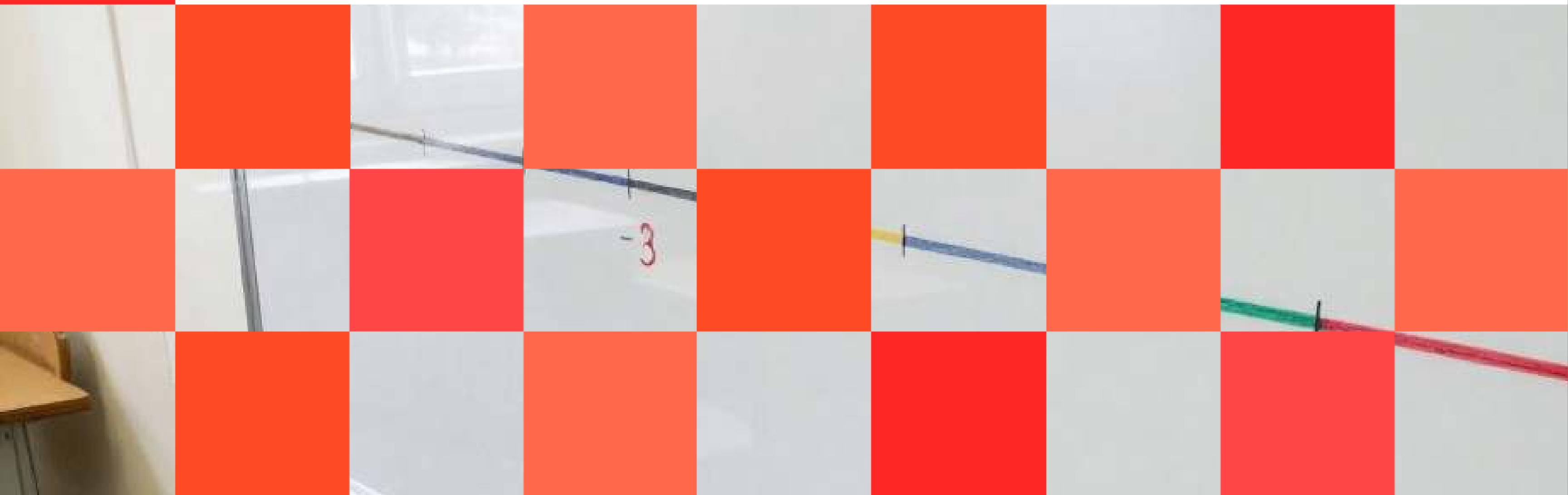
2. Проверка знаков

Для каждого промежутка проверьте знаки обеих дробей. Сравнивайте их с условиями < 0 и ≥ 0 , чтобы сразу видеть, какие участки подходят каждому неравенству.

3

3. Пересечение ответов

После этого оставьте только общую часть подходящих промежутков. Точки -1 и 2 обязательно исключаются, потому что они запрещены знаменателями, даже если знак на границе кажется верным.



Как записывать ответ

Записывайте ответ так, чтобы сразу было видно, какие точки входят в множество, а какие исключены. Формат зависит от знака неравенства и наличия запрета в ОДЗ.

Круглые скобки используют для запрещённых точек и строгих границ, квадратные — только там, где значение разрешено и входит в ответ.

Правила записи решений рациональных неравенств

Ситуация	Запись
Точка запрещена	$()$
Знак строгий	$()$
Знак нестрогий	$[]$

Типичные ошибки

Пропуск ОДЗ

Частая ошибка — забыть про ноль в знаменателе. Такие значения нельзя оставлять в ответе, даже если они подходят по знаку на промежутке.

Неверное преобразование

Иногда знак неравенства меняют без причины. Это неверно: знак сохраняют, а преобразования дроби делают аккуратно, чтобы не исказить условие задачи.

Путают операции

Ещё одна ошибка — объединять решения вместо пересечения. Для системы подходят только те значения, которые удовлетворяют обоим неравенствам сразу.

Не проверяют границы

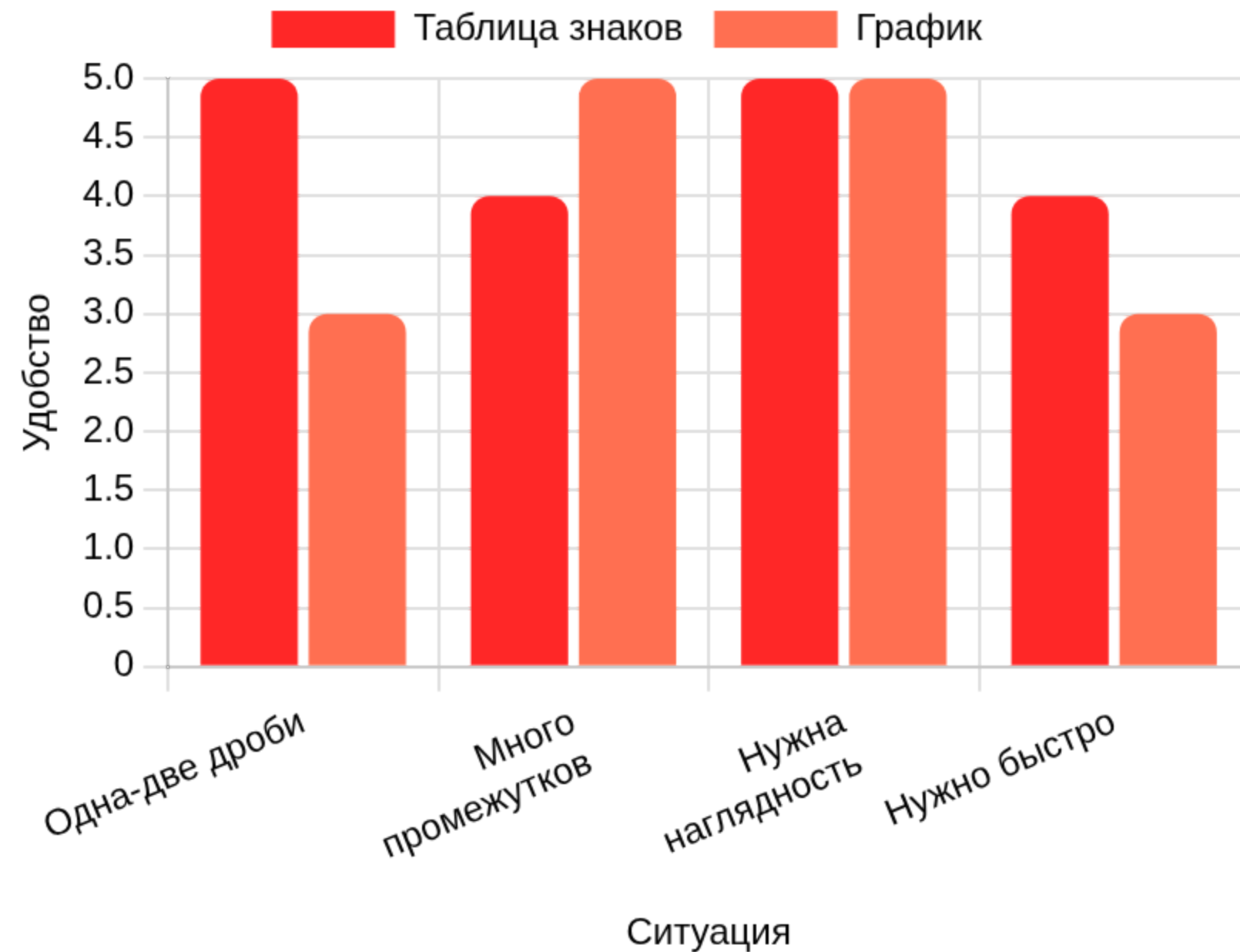
Границы промежутков тоже нужно проверять отдельно. Если точка не входит в ОДЗ или знак строгий, она не может попасть в ответ.

Когда использовать график, а когда таблицу знаков

Выбор способа зависит от числа дробей и количества промежутков. Если выражений немного, таблица знаков помогает быстро увидеть ответ и исключить лишние точки.

Таблица знаков удобнее для коротких примеров, а график — для сложных пересечений; оба метода дают один и тот же результат.

Сравнение способов решения рациональных неравенств



Практика 1

1. Первое неравенство

- 1** Для первого неравенства найдите критические точки -2 и 3 . Затем определите, на каких промежутках дробь положительна, и не забудьте исключить значение -2 из ОДЗ.

2. Второе неравенство

- 2** Для второго неравенства отметьте точки -1 и 1 . Здесь важно учесть, что знак ≤ 0 допускает ноль числителя, если знаменатель не обращается в ноль.

3. Сравнение

- 3** Запишите оба ответа в виде промежутков и сравните их. Пересечение покажет, какие значения подходят системе целиком, а не только одной дроби.

4. Проверка

- 4** В конце проверьте границы и исключённые точки. Если значение попадает в ОДЗ обоих неравенств и лежит в общей части, оно входит в ответ.

Практика 2: мини-тест

Выберите значение, которое точно не может входить в ответ системы. Внимательно смотрите на знаменатели: именно они задают запретные точки и отсекают часть числовой прямой.

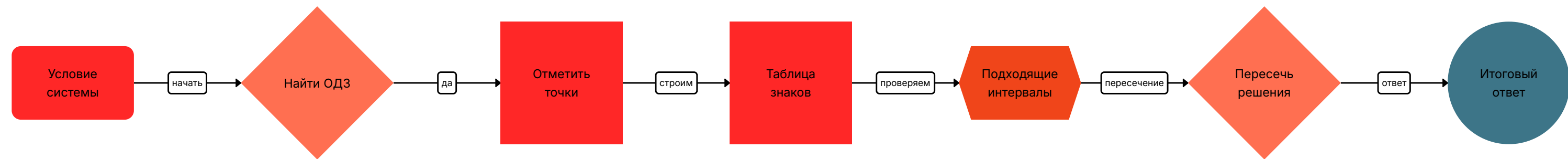
Вариант	Можно?
-2	нет
-1	да/нет
1	да/нет

Запрет определяется ОДЗ: если значение обращает знаменатель в ноль, оно исключается независимо от того, как выглядит знак на промежутке.

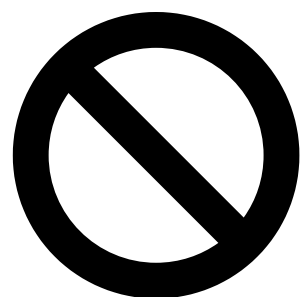
Мини-тест по ОДЗ и границам промежутков

Разбор тренировочного примера

Пошаговый разбор решения системы из двух рациональных неравенств



Три главных шага



ОДЗ

Сначала выпишите область допустимых значений. Это сразу убирает недопустимые числа и помогает не ошибиться на границах, где знаменатель обращается в ноль.



Критические точки

Потом отметьте все критические точки: нули числителя и знаменателя. Они делят числовую прямую на части, где знак дроби уже не меняется.



Пересечение

Далее сравните знаки на промежутках и оставьте только пересечение подходящих решений. Именно этот шаг показывает, какие значения подходят системе целиком.

Сначала границы, потом ответ

Запомните главное: в системах рациональных неравенств нельзя начинать с ответа. Сначала находят ОДЗ, затем критические точки, а после этого оставляют только общую часть решений.