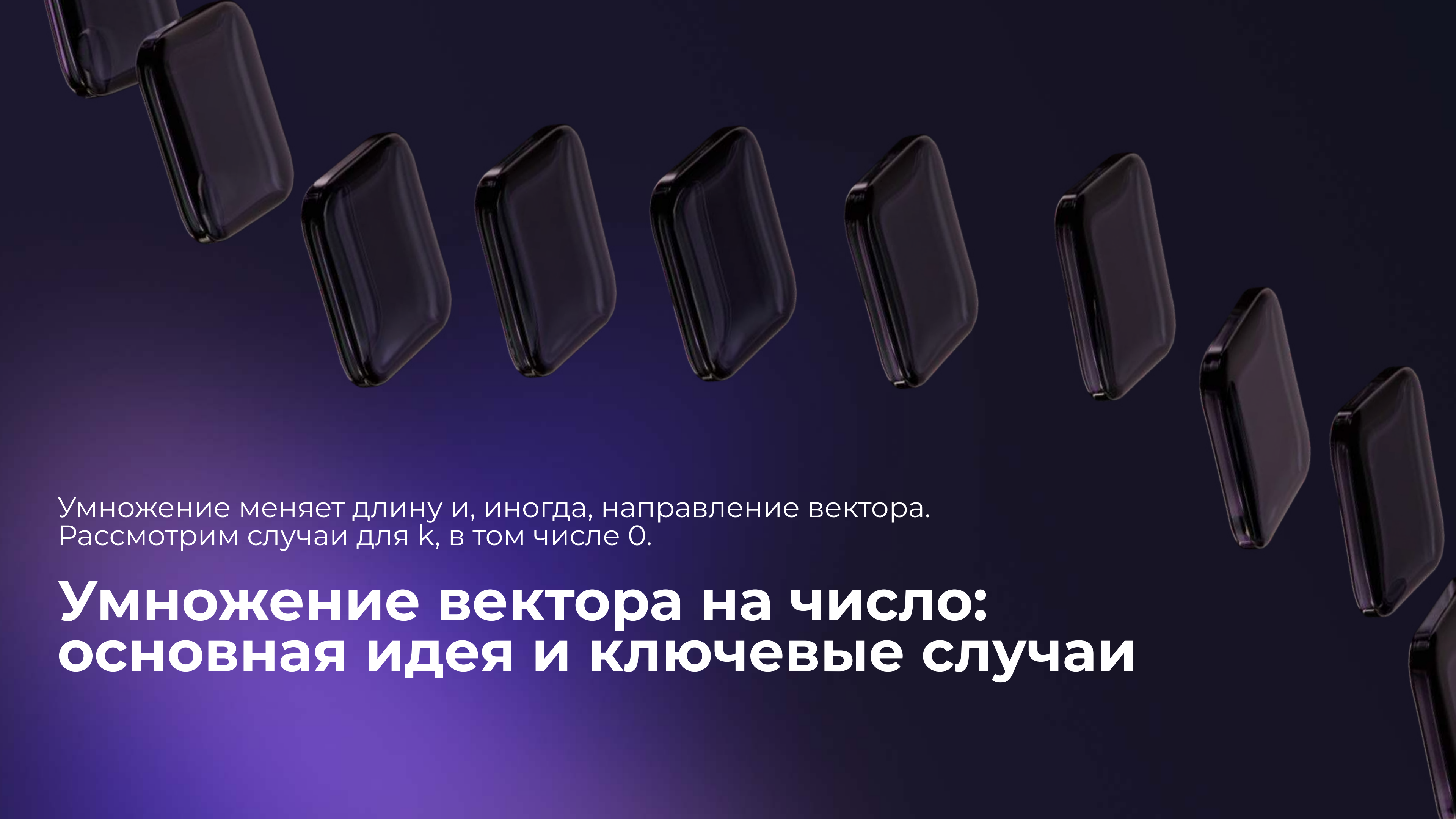




Умножение меняет длину и, иногда, направление вектора.  
Рассмотрим случаи для  $k$ , в том числе 0.

# Умножение вектора на число: основная идея и ключевые случаи

# Где пригодится умножение вектора на число

В геометрии операция помогает строить новые векторы и описывать отрезки с заданным масштабом. В физике она связывается со скоростью, силой и перемещением. В 9 классе тема готовит к координатным методам и преобразованиям фигур.

# Определение вектора, числа и записи $k \cdot a$

**01** Вектор характеризуется длиной и направлением. Число  $k$  называют скаляром, то есть оно не имеет направления. Запись  $k \cdot a$  означает умножение вектора  $a$  на  $k$ .

**02** Если  $a = (x, y)$ , то  $k \cdot a = (kx, ky)$ . Здесь коэффициент действует на каждую координату: обе числовые части умножаются на одно и то же  $k$  без изменений знаков внутри скобок.

**03** Если  $a = (x, y, z)$ , то  $k \cdot a = (kx, ky, kz)$ . Правило остаётся тем же: число умножается на каждую координату. Поэтому вычисления в координатах понятны и системны.

# Положительный коэффициент: длина меняется, направление сохраняется

## Масштаб при $k > 0$

Если  $k > 1$ , вектор становится длиннее: его длина увеличивается в  $k$  раз. При  $0 < k < 1$  длина уменьшается, то есть вектор «сжимается» пропорционально коэффициенту. Направление при этом не меняется.



## Смысл

### сонаправленности

Это значит, что новый вектор остаётся сонаправленным исходному. Например,  $2 \cdot a$  удваивает длину, а  $1/2 \cdot a$  уменьшает её вдвое. Аналогично,  $3 \cdot a$  увеличивает длину втрое, но стрелки остаются в одном смысле.

# Отрицательный коэффициент: разворот вектора

**01** Когда  $k < 0$ , длина нового вектора определяется модулем:  $|k|$  умножается на длину исходного. При этом знак коэффициента влияет не на величину, а на ориентацию вектора.

**02** Направление становится противоположным. Например,  $-2 \cdot a$  даёт вектор вдвое длиннее исходного, но направленный в обратную сторону. Поэтому видно: знак меняет «куда смотрит» стрелка.



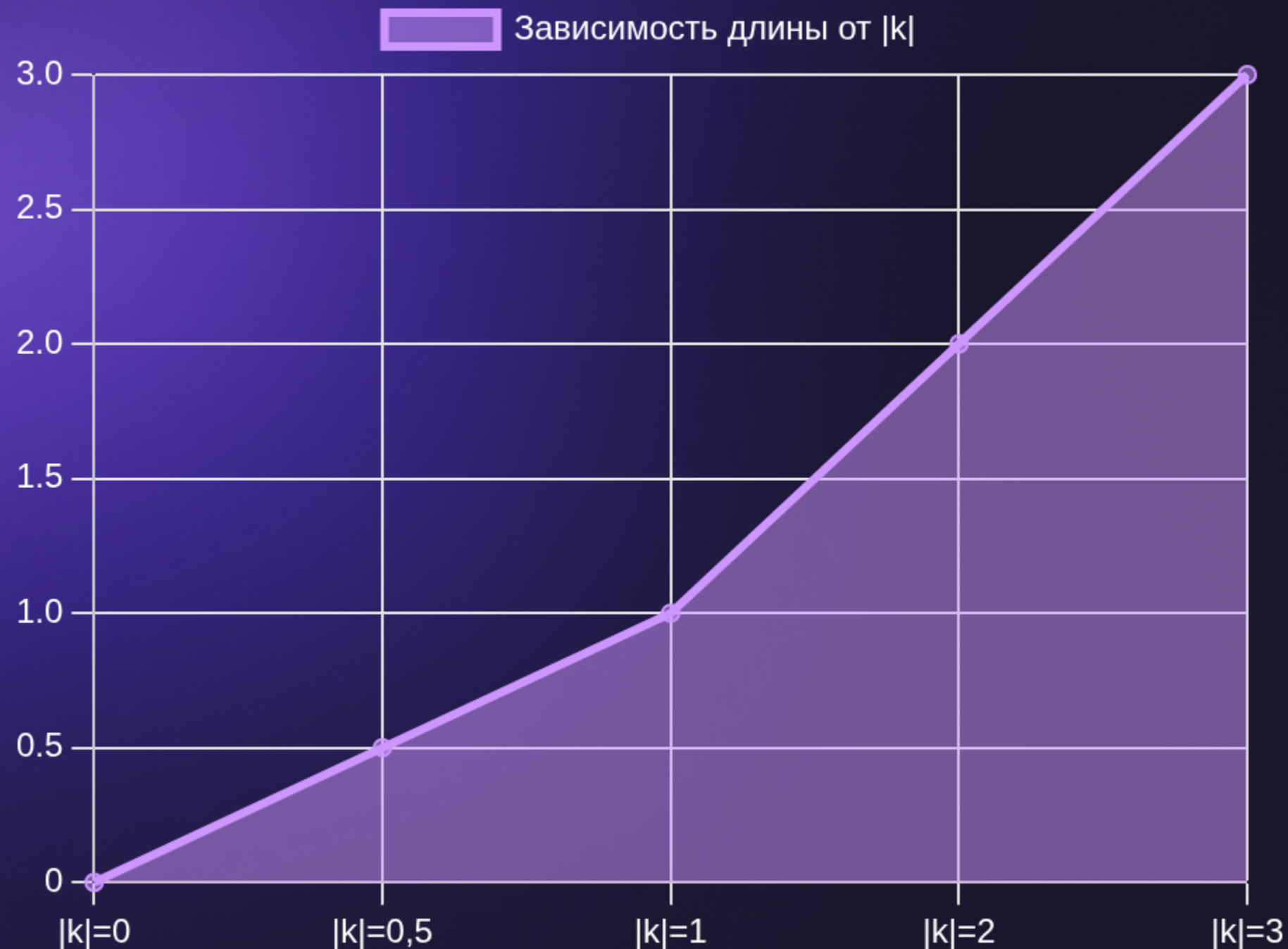
При  $k = 0$  любой вектор переходит в нулевой:  $0 \cdot a = 0$ . Нулевой вектор не имеет направления, а его длина равна 0.

0

Умножение на ноль превращает любой вектор в безнаправленный нулевой

Учебный материал по теме «векторы» (9 класс)

# Как зависит длина вектора от коэффициента



Длина меняется только от модуля  $|k|$ : для  $k$  и  $-k$  получается одинаковая величина, но разное направление.

На графике видно, что знак коэффициента не влияет на длину. Он определяет лишь ориентацию вектора относительно исходного.

Схема построения по значениям  $|k|$  из условия

# Примеры умножения вектора на число в координатах

Во всех примерах коэффициент умножается на каждую координату исходного вектора, формируя новый вектор.

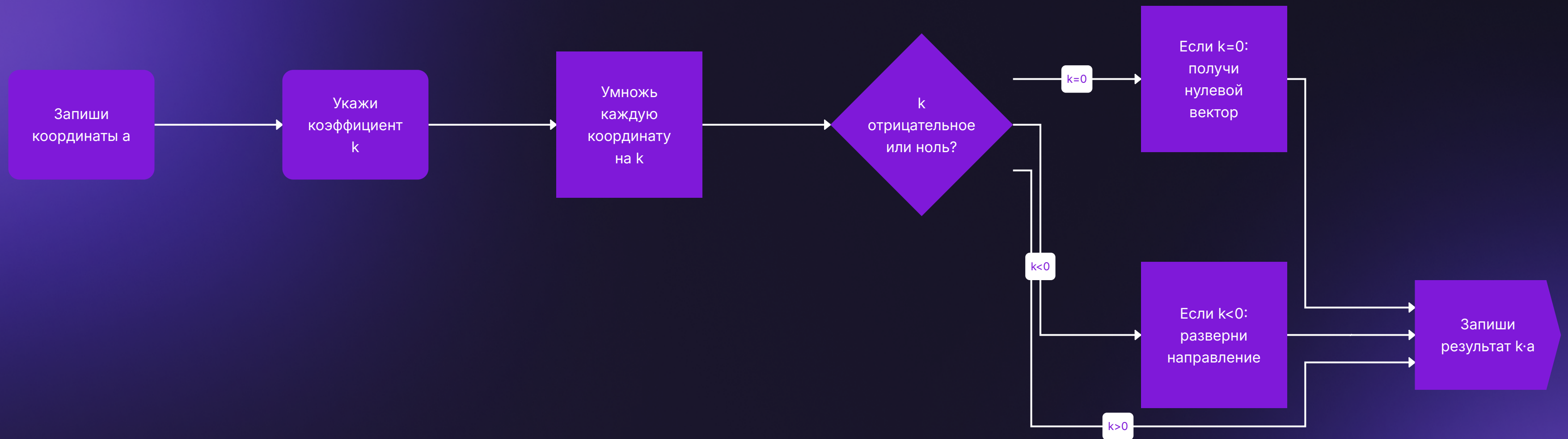
| Исходный вектор | Коэффициент | Новый вектор | Итог           |
|-----------------|-------------|--------------|----------------|
| (2; 3)          | 2           | (4; 6)       | длина ×2       |
| (2; 3)          | -1          | (-2; -3)     | разворот       |
| (4; -2)         | 0           | (0; 0)       | нулевой вектор |
| (-1; 5)         | 1/2         | (-0,5; 2,5)  | длина ÷2       |

Если k меняет знак, координаты меняются по обоим компонентам, поэтому направление тоже меняется. При k = 0 все координаты становятся нулевыми.

Собранные примеры из задания

# Алгоритм нахождения $k \cdot a$

Последовательность операций в координатной форме



# Правило координат для плоскости и пространства

01

Если вектор  $a = (x, y)$ , то при умножении на число  $k$  получаем  $k \cdot a = (kx, ky)$ . То есть каждая координата умножается на один и тот же коэффициент.

02

Для вектора  $a = (x, y, z)$  правило аналогичное:  $k \cdot a = (kx, ky, kz)$ . Все три координаты изменяются одинаково по масштабу, потому что  $k$  действует на каждую из них.

03

Это работает в любой размерности: число умножается на каждую координату вектора отдельно. Такой подход делает вычисления быстрыми и позволяет аккуратно проверять ответ.

# Свойства умножения вектора на число

**01** Сумма векторов ведёт себя предсказуемо: при умножении на число  $k$  сумма распадается на два действия. Поэтому  $k(a + b)$  равно  $ka + kb$ , и вычисления становятся аккуратнее и быстрее.

**02** Если к числу добавить ещё одно число  $m$ , то удобно объединять коэффициенты. Формула  $(k + m)a = ka + ma$  показывает, как «разложить» умножение по частям и не пропустить знак.

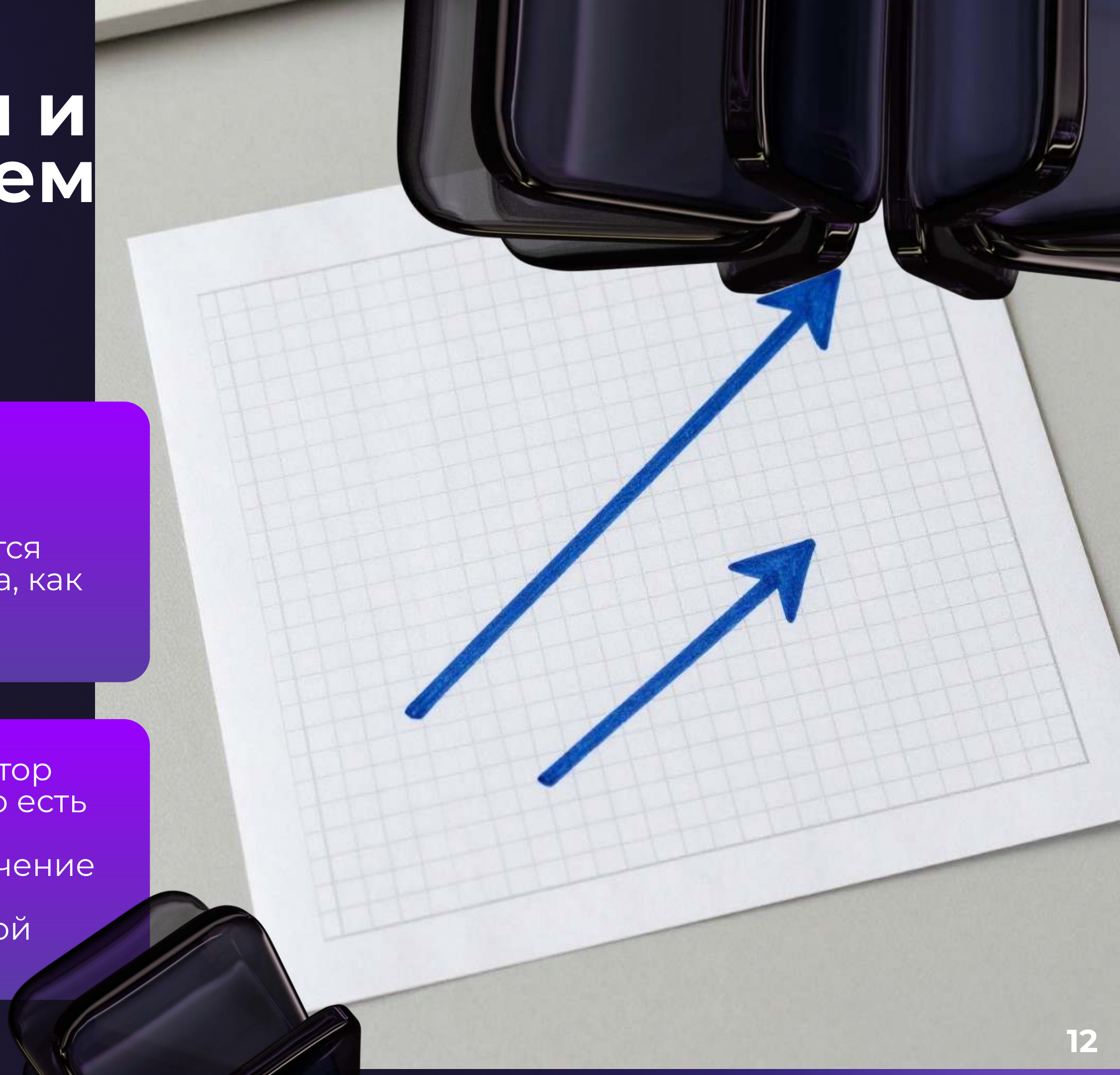
**03** Произведение коэффициентов также подчиняется правилу группировки:  $(km)a$  получается как  $k \cdot (ma)$ . Это помогает при сложных выражениях, когда сначала выгодно найти  $ma$ , а затем умножить результат на  $k$ .

**04** Умножение не теряет смысл при крайних значениях:  $1 \cdot a = a$ , а  $0 \cdot a = 0$ . Благодаря этим свойствам операция согласуется со сложением и служит опорой для геометрических преобразований.

# Связь с подобием и масштабированием фигур

Умножение вектора на число похоже на масштабирование на чертеже. Если коэффициент равен 2, длины соответствующих отрезков увеличиваются вдвое; при  $1/2$  — уменьшаются в два раза, как при уменьшении рисунка по масштабу.

При положительном коэффициенте вектор остаётся сонаправленным исходному, то есть «стрелки» не меняют сторону. Поэтому операция визуально напоминает увеличение или уменьшение одновременно направленных отрезков на координатной плоскости.



# Три типа коэффициентов и результат действия

- Положительный  $k$  (направление сохраняется)
- Отрицательный  $k$  (направление меняется на противоположное)
- Нулевой  $k$  (нулевой вектор)

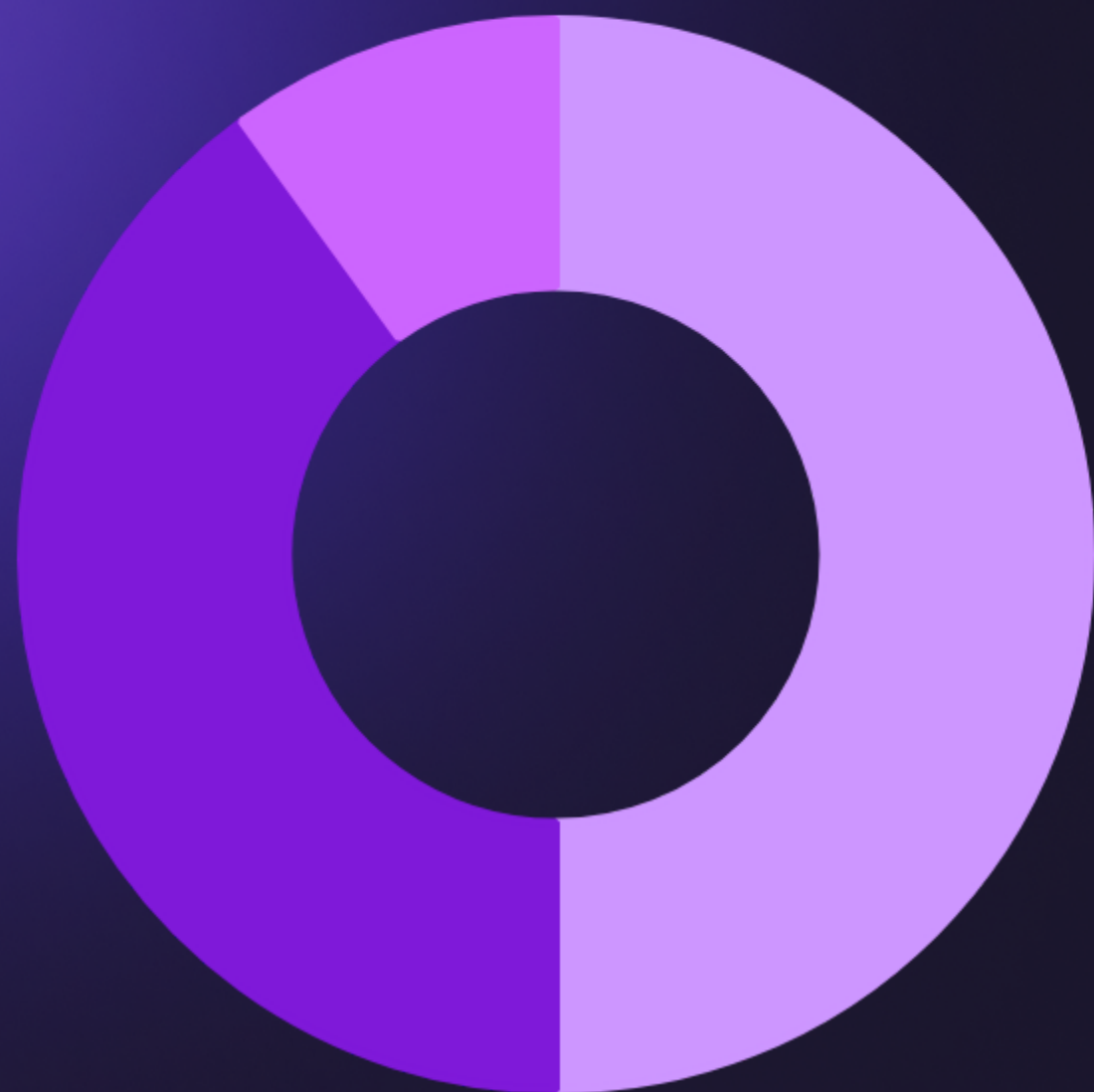


Диаграмма разделяет случаи по знаку и показывает: знак влияет на ориентацию, а нулевое значение полностью «обнуляет» вектор.

Во всех примерах разного  $k$  различаются только направление и факт существования вектора; модуль  $k$  определяет, во сколько раз меняется длина.

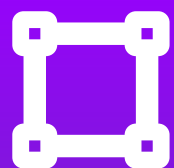
Примеры для случаев: 3, -2, 0, 1/4, -1/2 (иллюстративный набор).

# Типичные ошибки при умножении вектора на число



**Не учли разворот при  $k < 0$**

При отрицательном коэффициенте длина меняется по модулю  $|k|$ , а знак даёт разворот вектора на противоположное направление. Проверьте, куда «смотрит» стрелка, а не только величину координат.



**Умножили только длину**

Часто меняют «на глаз» длину, но забывают умножить каждую координату. Правильный подход: умножайте координаты  $(x, y)$  или  $(x, y, z)$  на  $k$  одинаково и только затем судите о длине.



**Путают с умножением векторов**

Ещё одна неточность — смешать умножение вектора на число с задачами, где умножаются два вектора (это другая тема). В школьных заданиях сейчас именно  $k \cdot a$ : каждый компонент умножается на одно и то же число.

# Как проверить правильность ответа



Проверяйте ответ по четырём признакам: знак коэффициента, направление, длина (по модулю) и координаты. Координатная проверка работает почти автоматически.

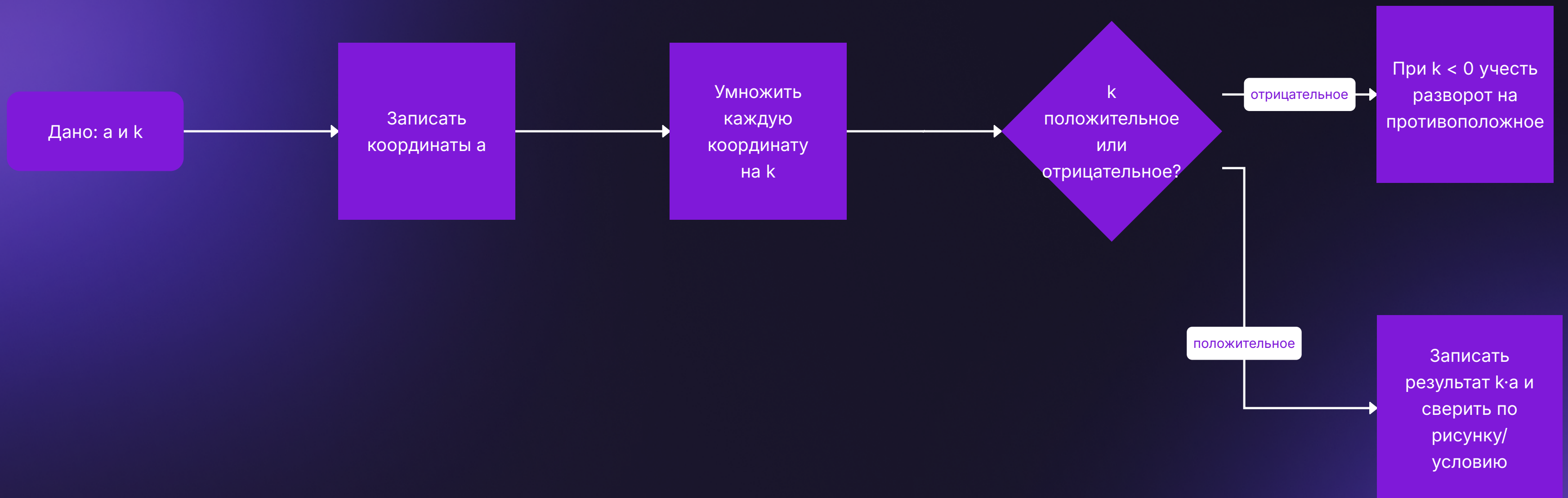
Если координаты получены умножением каждой компоненты на  $k$ , а знак отражён в направлении, ответ обычно корректен; случай  $k = 0$  сразу выявляет ошибки.

| Проверка    | Если $k > 0$           | Если $k < 0$                | Если $k = 0$    |
|-------------|------------------------|-----------------------------|-----------------|
| Направление | сохраняется            | меняется на противоположное | направление нет |
| Длина       | меняется по $ k $      | меняется по $ k $           | равна 0         |
| Координаты  | каждая умножена на $k$ | каждая умножена на $k$      | каждая равна 0  |

Метод проверки следует из определения  $k \cdot a$  и правил знака и модуля.

# Решение задач на координатной плоскости

Схема вычислений для нахождения нового вектора  $k \cdot a$  и учёта знака коэффициента.



# Применение в физике и движении



## Скорость: «стрелка темпом»

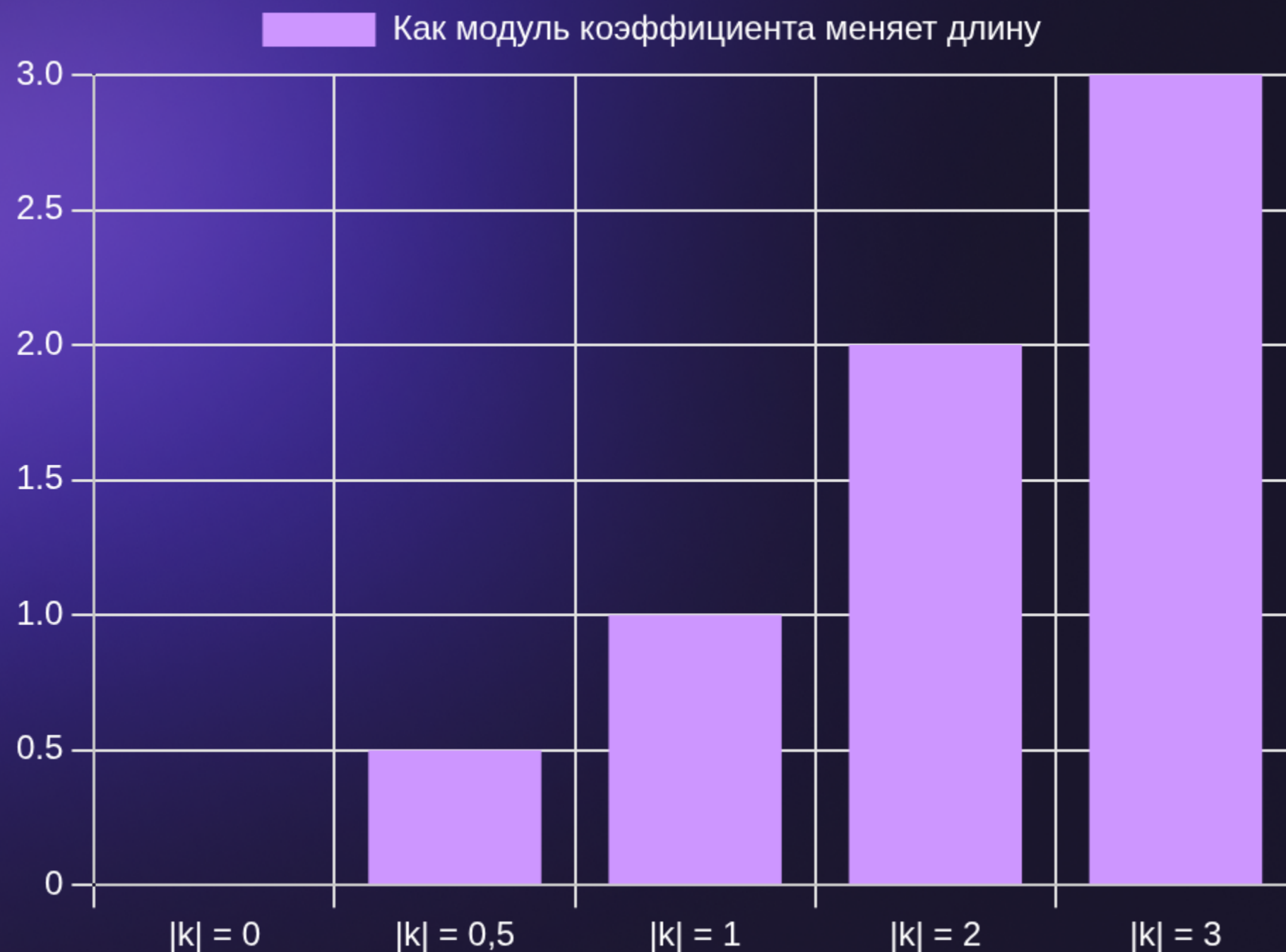
Скорость часто изображают вектором: её направление показывает, куда движется тело, а длина — насколько быстро. Увеличение скорости в 2 раза соответствует умножению вектора скорости на 2. Если сменить направление, в формуле появляется минус.



## Перемещение по прямой и по плоскости

Перемещение тоже удобно рассматривать как вектор. Когда шаг становится вдвое больше и по той же траектории, вектор перемещения увеличивается по длине, но остаётся сонаправленным. Если идти в обратную сторону, умножение получают с отрицательным коэффициентом.

# Связь модуля коэффициента и изменения длины



Величина длины нового вектора определяется модулем  $|k|$ : знак отвечает только за направление, а не за масштаб.

По данным столбцов видно, что при  $|k|$  увеличивается в целое число раз, длина растёт во столько же раз; при  $|k| = 0$  вектор становится нулевым.

Иллюстративные значения из примера:  $|k| = 0, 0,5, 1, 2, 3$  (связь с длиной).

# Задания для закрепления

01

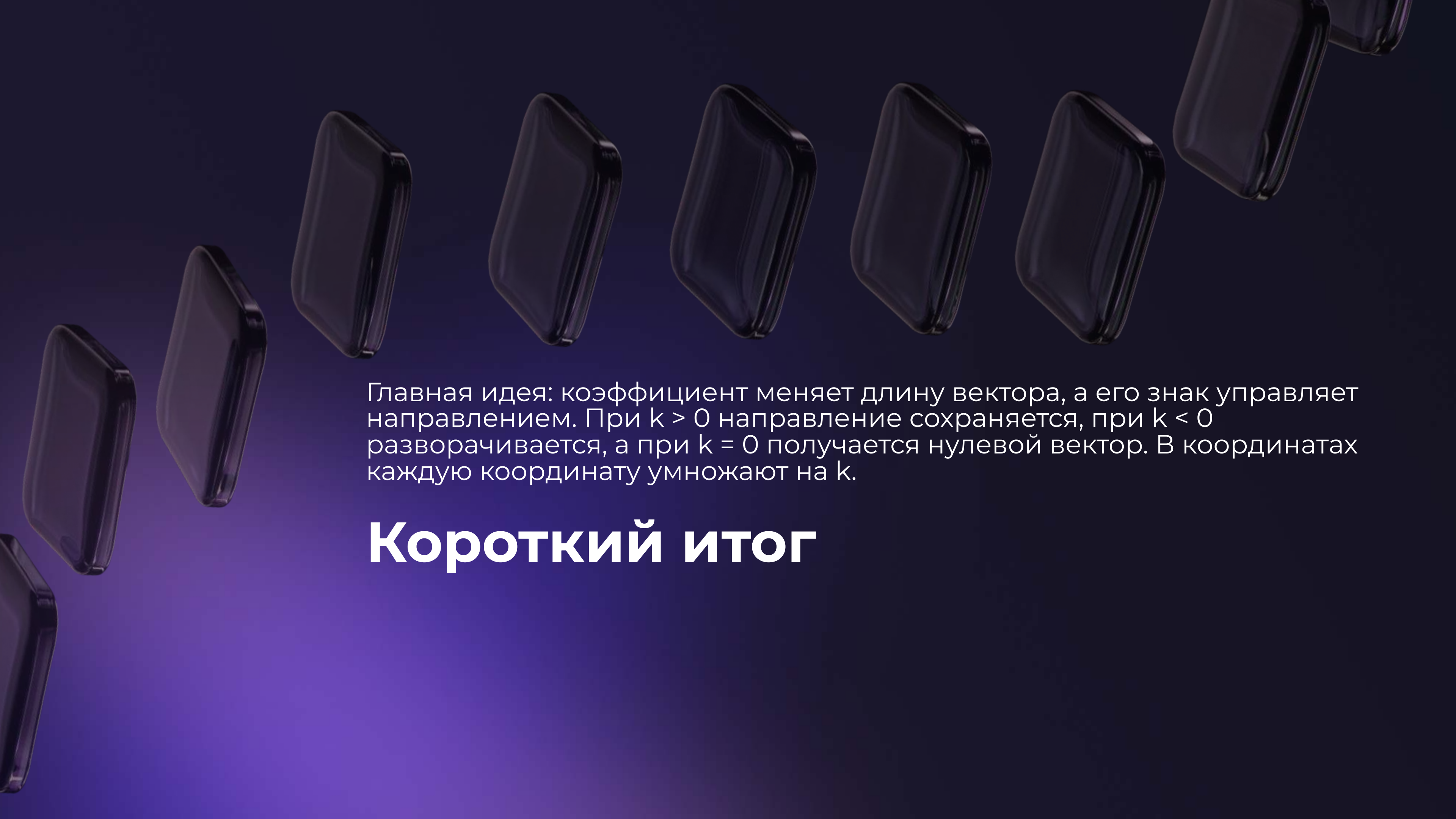
Найдите  $3 \cdot (1, -2)$  и запишите координаты результата. Обратите внимание: коэффициент больше нуля, поэтому направление сохраняется, а длина должна увеличиться в 3 раза относительно исходной.

02

Выполните  $-2 \cdot (4, 0)$ . Здесь отрицательный коэффициент меняет направление на противоположное, а длина определяется модулем  $|-2|$ , то есть увеличивается в 2 раза; вторая координата остаётся 0.

03

Решите  $1/2 \cdot (6, 8)$  и  $0 \cdot (-3, 5)$ . В первом случае координаты уменьшаются вдвое, во втором все координаты становятся нулевыми, и получается нулевой вектор без направления.



Главная идея: коэффициент меняет длину вектора, а его знак управляет направлением. При  $k > 0$  направление сохраняется, при  $k < 0$  разворачивается, а при  $k = 0$  получается нулевой вектор. В координатах каждую координату умножают на  $k$ .

## Короткий итог