

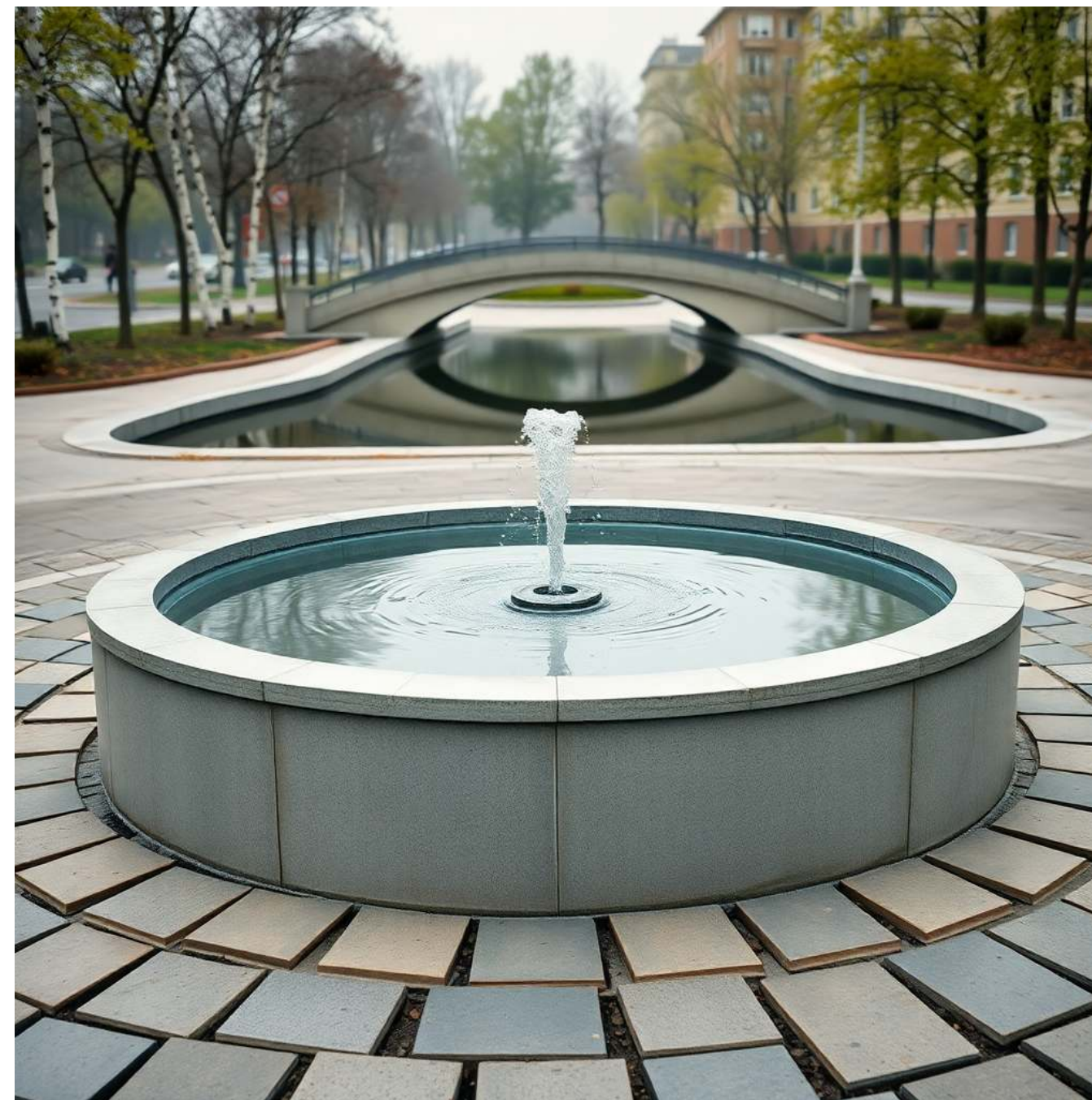


Квадратный трёхчлен и его корни

Разберём, как находить корни и понимать график параболы.

Где встречается квадратный трёхчлен

Квадратные трёхчлены помогают решать задачи из физики, геометрии и повседневных ситуаций. Они нужны, когда требуется найти неизвестную длину, площадь или понять, как движется тело. Это важная тема для 9 класса.



Определение квадратного трёхчлена

1 Общий вид

Квадратный трёхчлен записывают в виде ax^2+bx+c , где x — переменная. Это многочлен, в котором самая большая степень переменной равна двум, поэтому он называется квадратным.

2 Три слагаемых

В записи обязательно присутствуют три части: член с x^2 , член с x и свободный член. Именно поэтому выражение называют трёхчленом, а не просто многочленом.

3 Условие для a

Коэффициент a не должен быть равен нулю. Если $a=0$, член x^2 исчезает, и выражение перестаёт быть квадратным. Тогда получается уже линейное уравнение или выражение.

4 Коэффициент при x

Число b называют коэффициентом при x . Оно показывает, как сильно выражение зависит от линейной части и влияет на положение параболы и её оси симметрии.

5 Свободный член

Число c называется свободным членом. Оно не содержит x и показывает значение трёхчлена при $x=0$, то есть помогает найти точку пересечения графика с осью y .

Что называют корнями трёхчлена

Нулевые значения

Корень квадратного трёхчлена — это такое значение x , при котором выражение ax^2+bx+c обращается в ноль. Именно поэтому корни ищут как решения соответствующего уравнения.

Связь с уравнением

Если записать уравнение $ax^2+bx+c=0$, его решения и будут корнями трёхчлена. Одни и те же числа подходят и для алгебраической записи, и для проверки на графике.

Разложение на множители

Когда корни x_1 и x_2 известны, трёхчлен можно представить как $a(x-x_1)(x-x_2)$. Такая запись показывает, при каких значениях x выражение становится равным нулю.

Парабола и точки пересечения с осью x

График функции

График функции $y=ax^2+bx+c$ всегда является параболой. По её форме можно понять, есть ли у уравнения корни и сколько раз график пересекает ось x.

Две точки пересечения

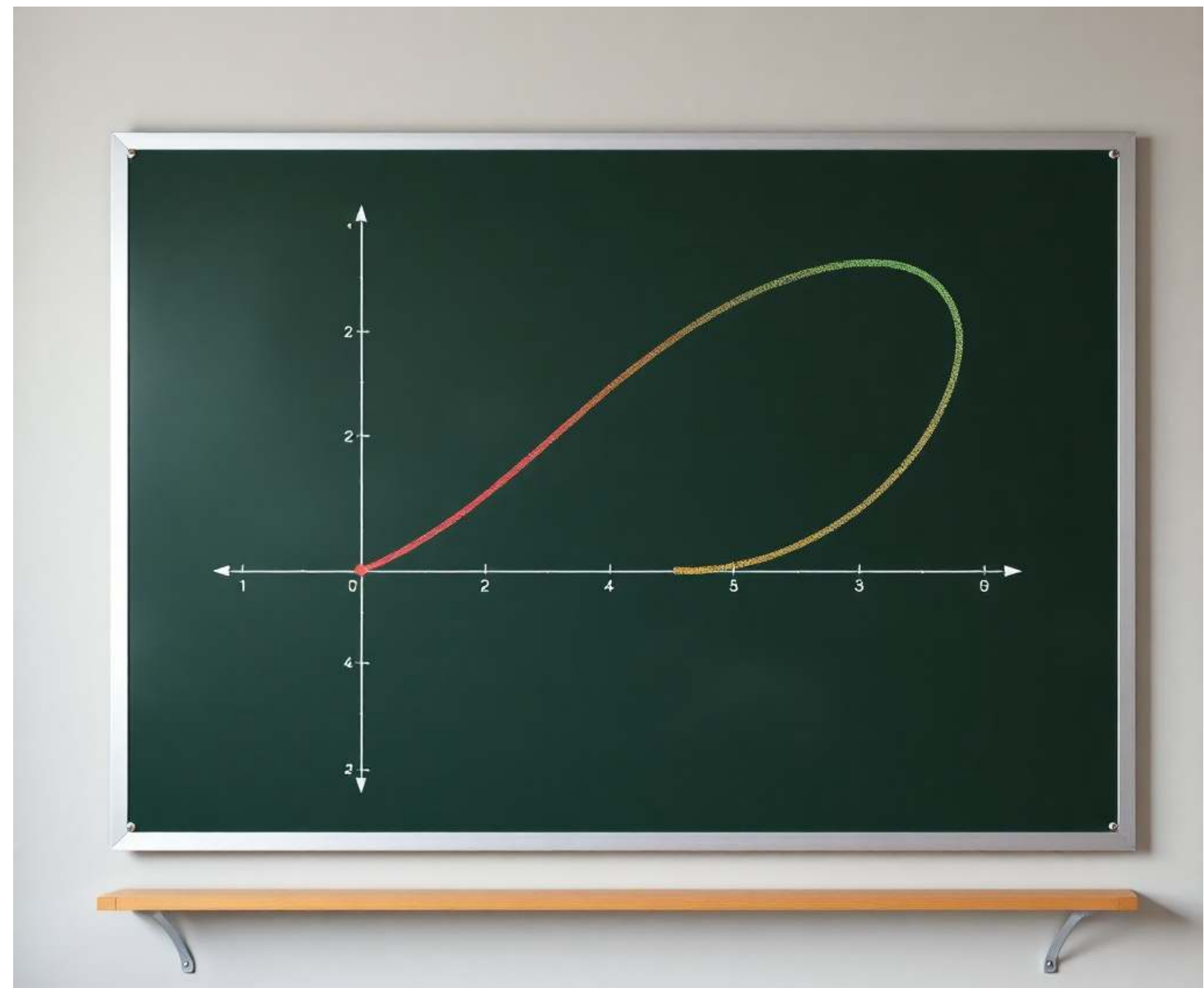
Если парабола проходит через ось x в двух местах, это означает два различных действительных корня. Каждая точка пересечения соответствует одному решению уравнения.

Одна точка касания

Когда парабола касается оси x только в одной точке, уравнение имеет один действительный корень. Такой случай означает, что вершина параболы лежит на оси x.

Нет пересечений

Если парабола не встречает ось x, действительных корней нет. Это значит, что уравнение нельзя решить с помощью обычных действительных чисел.



Формула дискриминанта

1

Запись формулы

Дискриминант обозначают буквой D и находят по формуле $D=b^2-4ac$. Для вычисления нужны только коэффициенты квадратного уравнения, записанного в стандартном виде.

2

Знак D

Если D больше нуля, уравнение имеет два различных действительных корня. Когда D равен нулю, корень один. Если D меньше нуля, действительных корней нет.

3

Почему это удобно

Дискриминант позволяет заранее понять, сколько ответов нужно искать. Это экономит время и помогает не делать лишних вычислений, особенно в больших и длинных примерах.

4

Что влияет на результат

Значение дискриминанта зависит только от чисел a , b и c . Если изменить хотя бы один коэффициент, изменится и D , а значит, может измениться число корней.

Как знак дискриминанта связан с числом корней

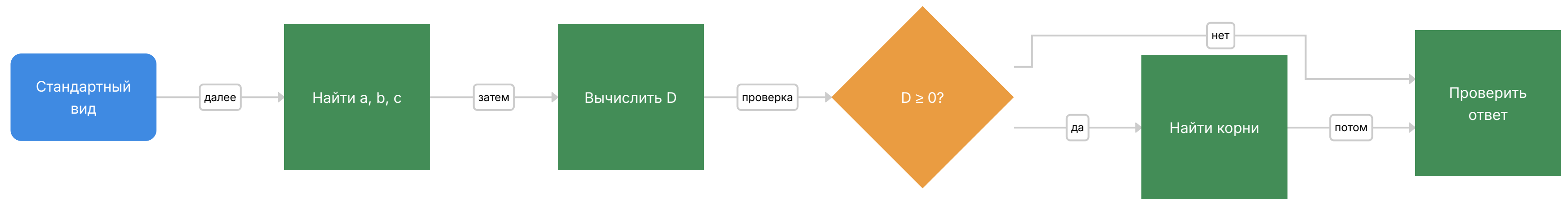


По диаграмме легко увидеть, как меняется количество решений в зависимости от знака D .

Чем больше дискриминант, тем больше действительных корней; отрицательное значение означает их отсутствие.

Алгоритм решения квадратного уравнения

Последовательность действий при решении уравнения по дискриминанту



Формула корней квадратного уравнения

1 Основная запись

Если дискриминант не отрицателен, корни находят по формуле $x_{1, 2} = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$. Она подходит для большинства квадратных уравнений стандартного вида и даёт точный результат.

2 Два возможных ответа

Знак $\pm$ означает два вычисления: одно с плюсом, другое с минусом. Когда $D > 0$, получаются два разных числа, и оба нужно записать как корни уравнения.

3 Один или два корня

Если $D = 0$, выражения с плюсом и минусом совпадают, поэтому получается один корень. Важно внимательно считать знаменатель $2a$ и не пропускать его при вычислении.

Роль коэффициентов a , b и c

Коэффициент a



Он задаёт направление ветвей параболы. При положительном a ветви направлены вверх, при отрицательном — вниз. Чем больше $|a|$, тем уже выглядит график.

Коэффициент c



Это значение функции при $x=0$. По нему легко найти точку, где парабола пересекает ось y , поэтому коэффициент c помогает быстро ориентироваться на графике.

Коэффициент b



Он влияет на положение оси симметрии параболы. Эта ось проходит через $x = -b/(2a)$, поэтому изменение b сдвигает вершину вправо или влево.

Неполные квадратные уравнения

Когда пропадает один из членов

Если в уравнении отсутствует член при x или свободный член, оно становится неполным. Такие примеры удобно упрощать до более простого вида и решать не только по общей формуле, но и через знакомые преобразования.



Два коротких примера

Уравнение $x^2 - 9 = 0$ можно увидеть как разность квадратов: $(x-3)(x+3) = 0$. А в записи $2x^2 + 8x = 0$ сначала выносят x за скобки: $2x(x+4) = 0$, после чего легко найти оба корня.



Сравнение случаев по дискриминанту

Случай	Корни	График
$D > 0$	2 корня	2 точки
$D = 0$	1 корень	касание
$D < 0$	0 корней	не пересекает

Таблица показывает, как знак дискриминанта связан с числом действительных корней и поведением параболы относительно оси x .

Знак D сразу подсказывает, сколько действительных решений нужно искать и как расположен график относительно оси x .

Как меняется график при разных коэффициентах

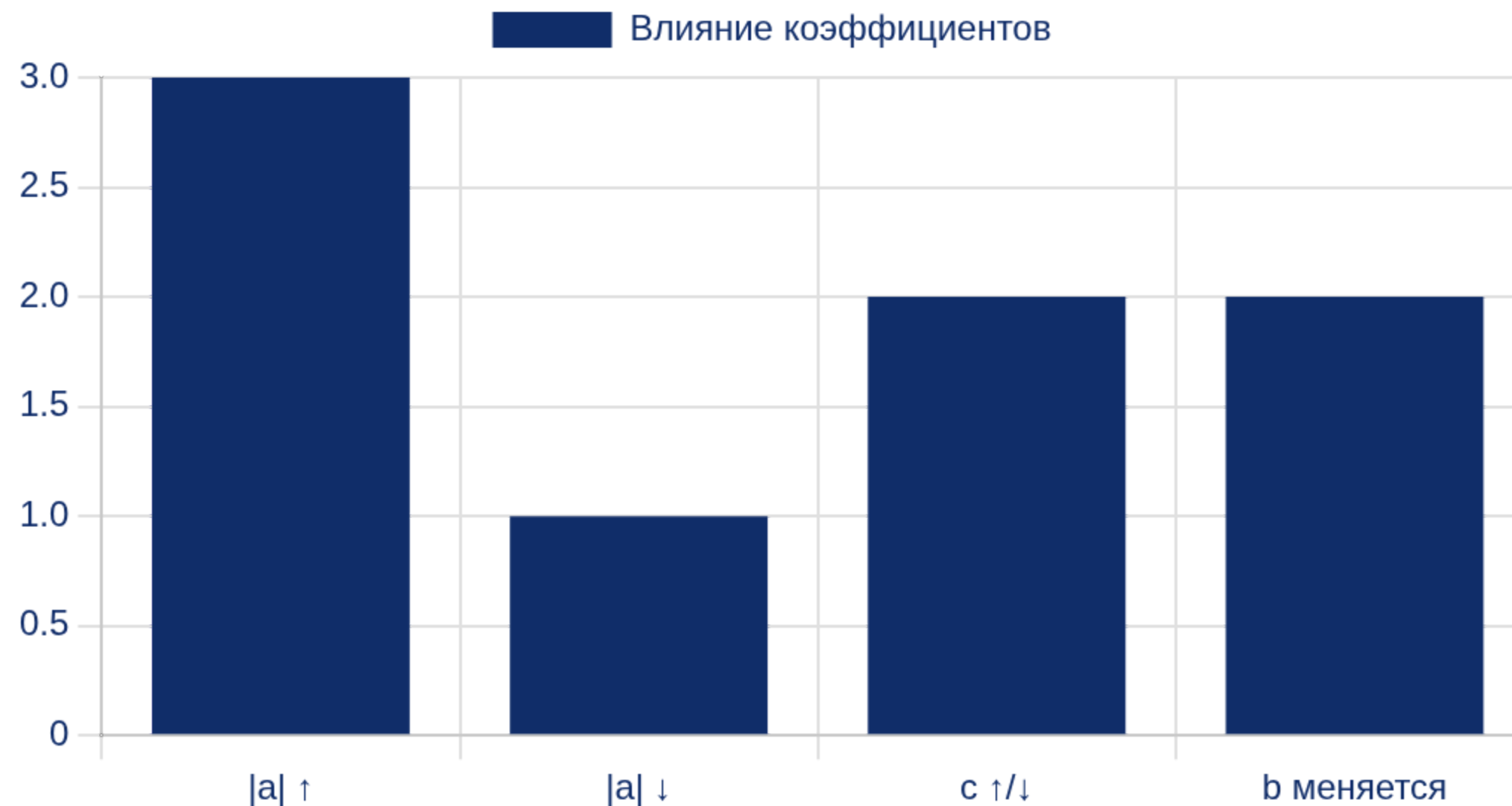


Диаграмма показывает, какие изменения чаще всего заметны на глаз: ширина параболы, её вертикальный сдвиг и положение вершины.

Коэффициент a управляет «шириной», c — высотой, а b — положением вершины и оси симметрии.

Связь корней и разложения на множители

1

Если корни известны

Когда у квадратного трёхчлена найдены корни x_1 и x_2 , его удобно записать как $a(x-x_1)(x-x_2)$. Такое представление сразу показывает, где график пересекает ось x .

2

Если корень повторяется

Иногда оба корня совпадают. Тогда выражение принимает вид $a(x-x_0)^2$, и парабола касается оси x в одной точке. Это помогает понять, почему решений только одно.

3

Зачем это нужно

Разложение на множители ускоряет решение уравнений и облегчает проверку ответа. Если выражение уже записано в виде произведения, достаточно приравнять каждый множитель к нулю.

Способы решения квадратных уравнений

Три основных способа помогают выбирать удобный путь решения в зависимости от вида уравнения.

Универсального «самого лучшего» способа нет: выбор зависит от записи уравнения и того, насколько легко его преобразовать.

Способ	Когда удобен	Особенность
Дискриминант	Всегда	Универсален
Множители	Если раскладывается	Быстрый
Полный квадрат	Если видно структуру	Преобразует вид

Типичные ошибки при решении



Пропуск знака $\pm$

При записи формулы корней легко забыть, что знак $\pm$ даёт два возможных ответа. Из-за этого теряется один корень, хотя он должен быть найден.



Ошибка в дискриминанте

Часто неверно считают b^2 или путают знаки в выражении $b^2 - 4ac$. Тогда получается неправильное число корней и неверные ответы.



Неправильное деление на $2a$

В формуле корней знаменатель $2a$ нужно учитывать точно. Ошибка в знаке или вычислении меняет оба результата и сбивает весь ход решения.

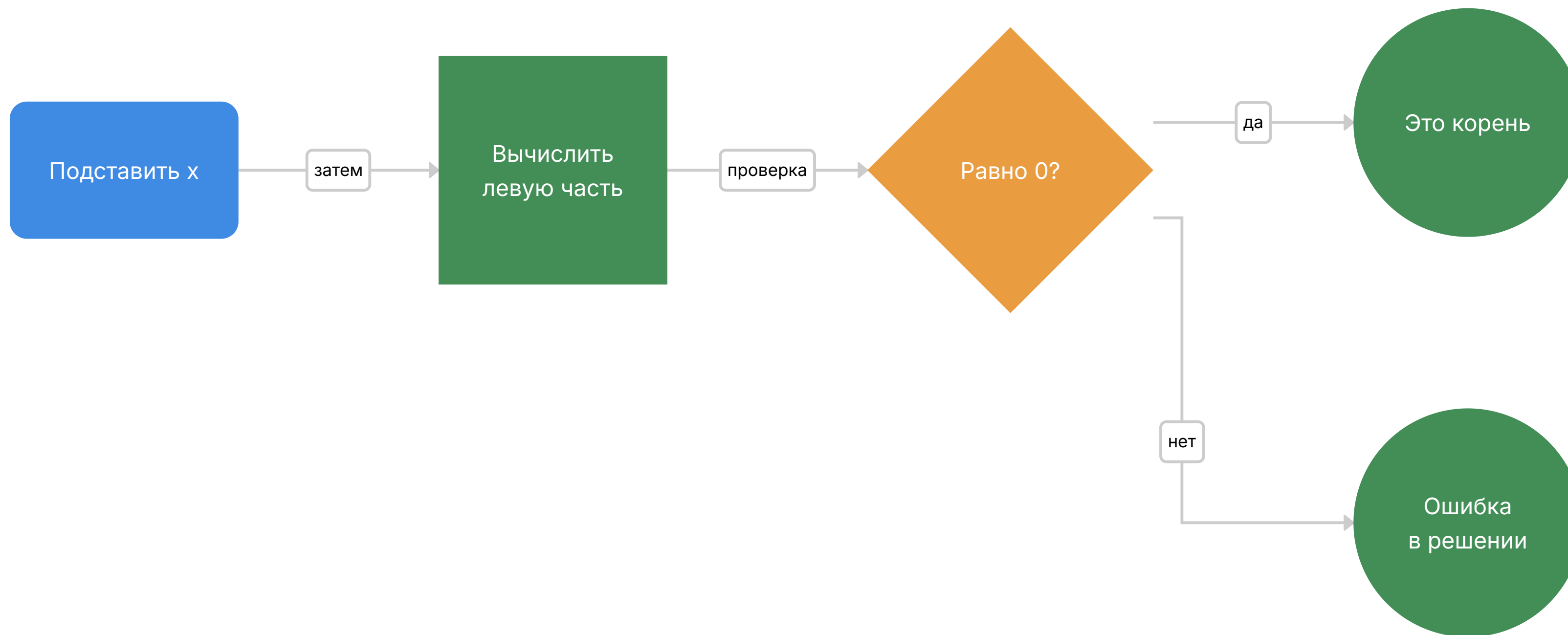


Отсутствие проверки

После вычислений важно подставить корни в исходное уравнение. Проверка помогает заметить случайные ошибки и убедиться, что ответ действительно подходит.

Проверка найденных корней

Последовательность действий при проверке ответа в квадратном уравнении



Пример решения уравнения $x^2-5x+6=0$

1 Записываем коэффициенты

В уравнении $x^2-5x+6=0$ коэффициенты равны $a=1$, $b=-5$, $c=6$. Это сразу позволяет подставить их в формулу дискриминанта и не запутаться в вычислениях.

2 Находим дискриминант

Сначала считаем $D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6$. Получаем $25-24=1$, значит уравнение имеет два действительных корня. Малое значение D подсказывает, что ответы будут близкими.

3 Вычисляем корни

По формуле $x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$ получаем $x_1=(5-1)/2=2$ и $x_2=(5+1)/2=3$. Оба значения легко проверить подстановкой в исходное уравнение.

4 Смотрим на график

Парабола пересекает ось x в точках 2 и 3, а её вершина находится между ними. График помогает увидеть, что найденные корни согласуются с изображением функции.



Что важно запомнить

Общий вид

Квадратный трёхчлен записывают как ax^2+bx+c , где a не равно нулю. Именно наличие члена x^2 делает уравнение квадратным и отличает его от линейного.

Корни

Корни — это значения x , при которых выражение обращается в ноль. Их находят с помощью дискриминанта, разложения на множители или других удобных преобразований.

Дискриминант

Знак D показывает число действительных корней: больше нуля — два, равно нулю — один, меньше нуля — ни одного. Это быстрое правило экономит время.

График

Парабола помогает увидеть решение наглядно: пересечения с осью x показывают корни, а форма графика зависит от коэффициентов a , b и c .

Проверка ответа

Даже после вычислений полезно подставить найденные корни в исходное уравнение. Такая проверка помогает избежать случайных ошибок и закрепляет навык решения.

Квадратные уравнения становятся понятнее, если видеть их график

Мы познакомились с квадратным трёхчленом, его корнями, дискриминантом и параболой. Эти идеи помогают не только решать уравнения, но и уверенно проверять ответы в алгебре.

