

Правило параллелепипеда: сумма векторов в пространстве

Сумма трёх векторов равна пространственной диагонали
параллелепипеда.



Зачем это нужно в 11 классе

Параллелепипед появляется, когда вы строите на трёх некомпланарных векторах. Правило опирается на параллельный перенос: направление и длина сохраняются при смене точки. Его удобно применять в темах «Векторы в пространстве», «Координаты вектора» и «Стереометрические построения».



Что такое вектор и почему его можно переносить

1

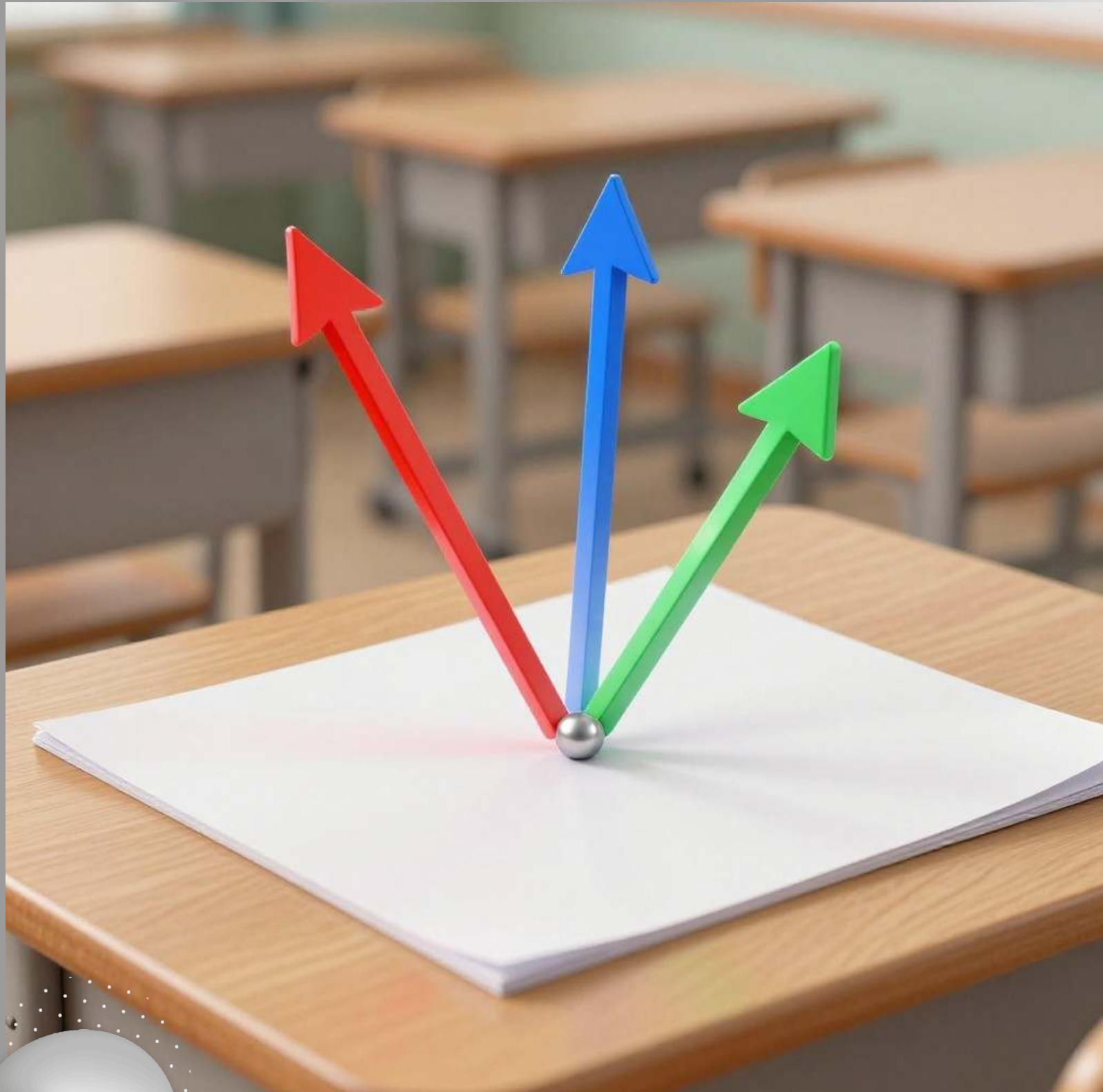
Вектор описывает длину, направление и ориентацию в пространстве. Поэтому одинаковые векторы — это не «одинаковая картинка», а совпадение длины и направления, даже если они начинаются в разных точках.

2

Параллельный перенос не меняет сам вектор: он лишь перемещается в пространстве. Именно поэтому для сложения можно откладывать векторы от одного общего начала, сохраняя их свойства.

3

Когда три вектора не лежат в одной плоскости, их перенос и «сшивание» превращают задачу на сумму в задачу на геометрию. Так и возникает правило параллелепипеда как наглядный метод.



Построение параллелепипеда на трёх векторах

- Возьмите общую точку и отложите от неё векторы a , b и c так, чтобы они не лежали в одной плоскости. Через концы каждого вектора проведите прямые, параллельные двум другим векторам, образуя каркас параллелепипеда.
- Одна вершина — это общее начало, а противоположная вершина задаёт пространственную диагональ. Именно этот вектор, выходящий из общей вершины к противоположной, представляет сумму $a + b + c$ на построении; на рисунке обычно выделяют рёбра и диагональ.

Как применить правило параллелепипеда

Пошаговая геометрическая модель суммы трёх векторов в пространстве.

5



Формула суммы трёх векторов

1

Если векторы a , b и c отложены из одной точки, их сумма записывается как $a + b + c$. Геометрически этот результат получается при построении диагонали параллелепипеда на данных векторах.

2

Алгебраически сумма не зависит от порядка сложения: коммутативность и ассоциативность позволяют переставлять слагаемые. Для нас это подтверждается и чертежом: итоговый вектор задаётся одной и той же диагональю.

3

Направление вектора $a + b + c$ совпадает с направлением пространственной диагонали. Длина же диагонали зависит от взаимного расположения векторов, то есть от углов между ними.

Свойства векторной суммы

- Диаграмма подчёркивает: даже при равных модулях векторов результат меняется из-за углов. Поэтому при решении нельзя ограничиваться одними длинами.
- Сумма «накапливает» вклад только тех направлений, которые работают в одном смысле. Когда направления противоречат друг другу, модули взаимно уменьшаются.

Параллелограмм и параллелепипед: сравнение геометрических моделей

Сколько векторов	Фигура построения	Размерность	Диагональ	Тип
2	Параллелограмм	Плоскость	Диагональ параллелограмма	Вектор в плоскости
3	Параллелепипед	Пространство	Пространственная диагональ	Вектор в пространстве

- Сопоставьте два случая: сложение двух векторов в плоскости и сложение трёх векторов в пространстве. В обоих вариантах итоговый вектор изображается диагональю, но модель и размерность различаются.
- Правило параллелепипеда естественно обобщает правило параллелограмма: переход от 2D к 3D расширяет задачу на работу с пространственными чертежами.

Координатная запись суммы векторов

9



Покомпонентное сложение

Если $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, $c = (x_3, y_3, z_3)$, то $a + b + c = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3)$. Это проверяется вычислением координат.



Сверка с чертежом

Координатная запись помогает контролировать построение: диагональ на рисунке должна соответствовать направлению результирующего вектора, которое видно по знакам и величинам координат.

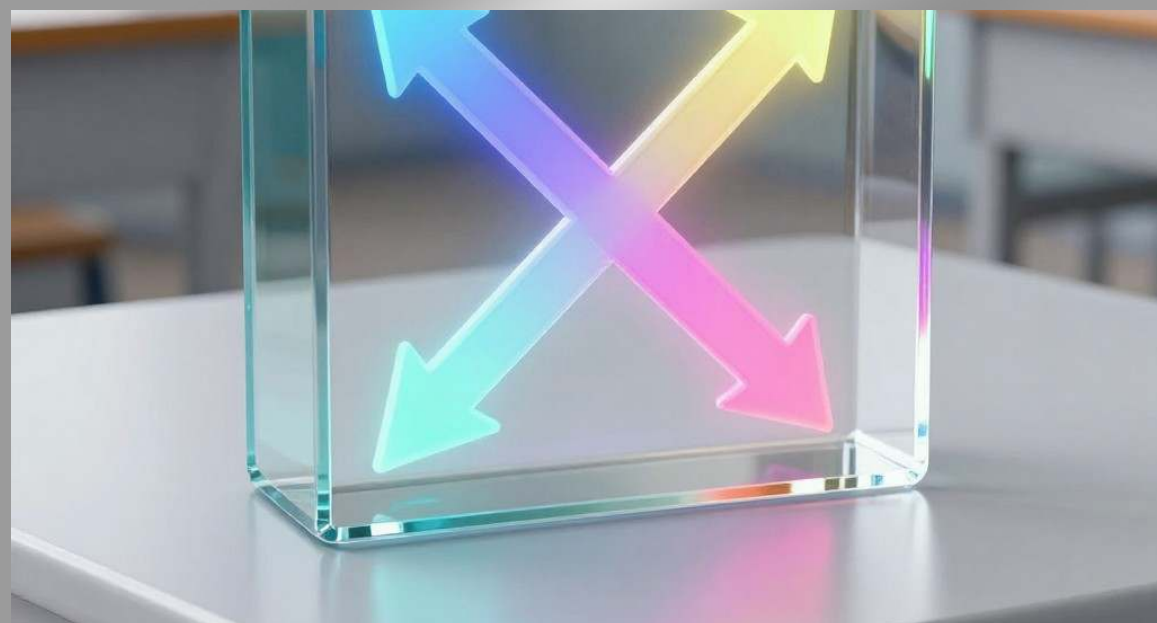


Удобно для задач 11 класса

Когда в условии векторы заданы числами, геометрическое построение остаётся «для смысла», а решение выполняется вычислениями. Так связка «геометрия + алгебра» даёт надёжный результат.

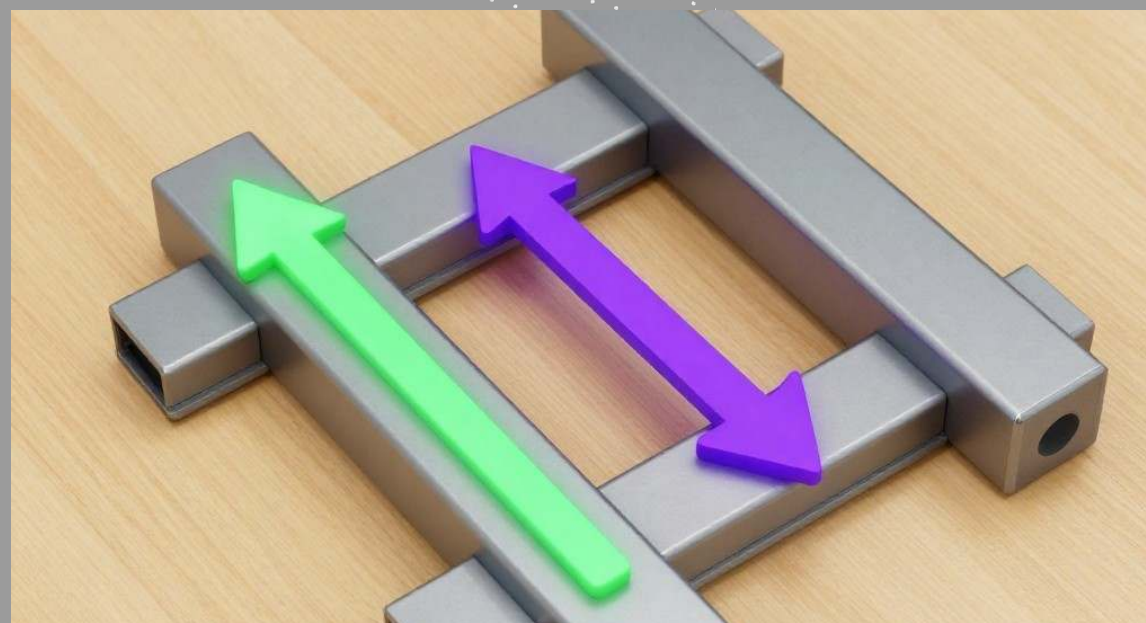
Частные случаи: откуда берутся ноль и «противодействие»

10



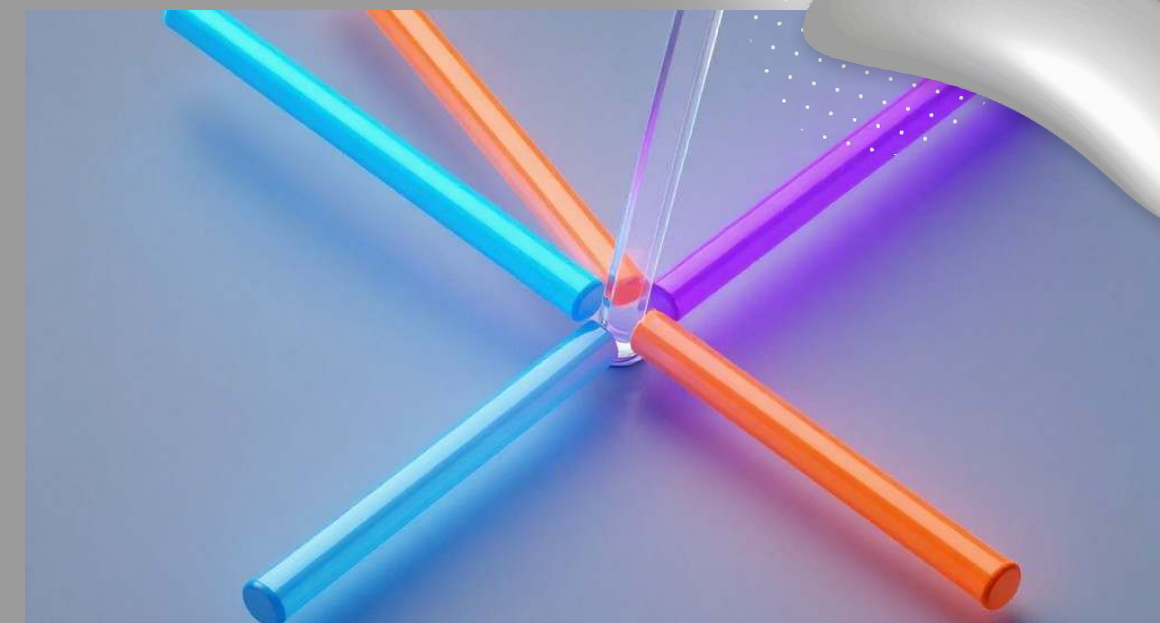
Когда сумма равна нулю

Если два вектора имеют равные модули и противоположные направления, они компенсируют друг друга. Тогда их сумма даёт нулевой вектор, а третий вектор определяет итог. На рисунке это особенно наглядно через диагональ, «которая не растёт».



Нулевой вектор как «пауза»

Нулевой вектор не имеет направления и длины. Поэтому если один из трёх векторов равен нулю, он не изменяет результирующую сумму: диагональ «строится» по двум оставшимся направлениям. Такой случай помогает быстро отсекать лишние шаги в решении.



Перпендикулярность и выразительная диагональ

Когда векторы попарно перпендикулярны, параллелепипед выглядит как «собрание» трёх направлений в один результат. Пространственная диагональ в этом случае особенно информативна: её направление сразу связано с тремя ортогональными составляющими. Для наглядности хорошо подходит отдельный фрагмент построения.

Геометрический смысл пространственной диагонали

11

1

Пространственная диагональ параллелепипеда соединяет противоположные вершины и показывает итог сложения трёх векторов, отложенных из одной точки. Она наглядно объединяет направления всех слагаемых.

2

Направление диагонали совпадает с направлением результирующего вектора $a + b + c$: куда «смотрит» диагональ на чертеже, туда же направлен и суммарный вектор в пространстве.

3

Длина этой диагонали определяется не только модулями a , b и c . На неё влияет взаимное расположение векторов — углы между их направлениями меняют «растяжение» результата.

4

Поэтому правило параллелепипеда — это не просто формула для чисел. Это геометрический объект, который связывает рисунок, направления и вычисляемую векторную сумму в одном наглядном образе.

Как меняется длина суммы при разных направлениях векторов

- На диаграмме показано, что при равных модулях исходных векторов результат меняется прежде всего из-за геометрии: диагональ «усиливается» или «погашается» углами.
- Рост значений соответствует согласованному направлению векторов, а уменьшение — частичной компенсации. Значит, модуль суммы в пространстве зависит от углов, а не только от длин.

Схематическая иллюстрация: условные значения отражают качественную зависимость $|a+b+c|$ от взаимных направлений при равных модулях векторов, без привязки к конкретным числам из учебных задач.

Применение правила в физике и задачах стереометрии

13



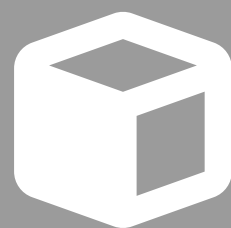
Равнодействующая сил

При одновременном действии нескольких сил их можно складывать как векторы. Геометрический итог удобно видеть через диагональ параллелепипеда, что помогает получить равнодействующую в пространственной модели движения.



Скорости и перемещения

Если тело движется сразу в нескольких направлениях, результирующая скорость определяется векторной суммой. Правило параллелепипеда позволяет перейти от отдельных перемещений к одному суммарному направлению.



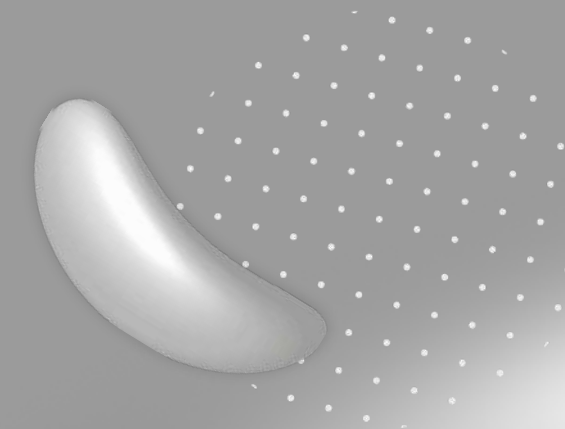
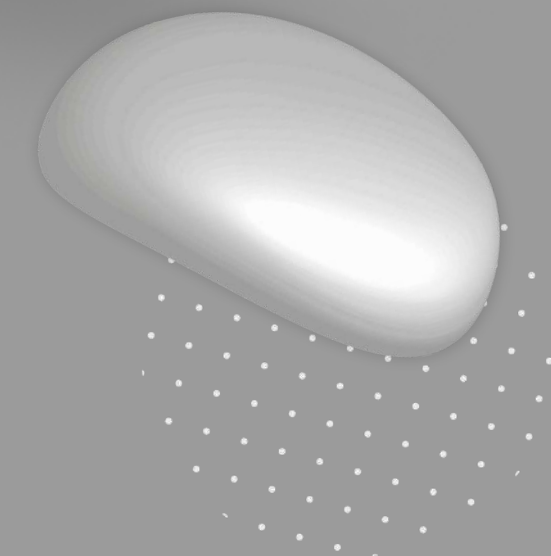
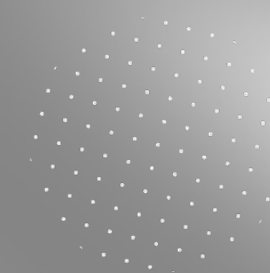
Задачи на куб и прямоугольный параллелепипед

В геометрии правило применяют при анализе пространственных чертежей: находят диагонали, направления результирующих отрезков и связи между рёбрами. Часто это опирается на построение диагонали параллелепипеда.



Проверка чертежа и вычисления

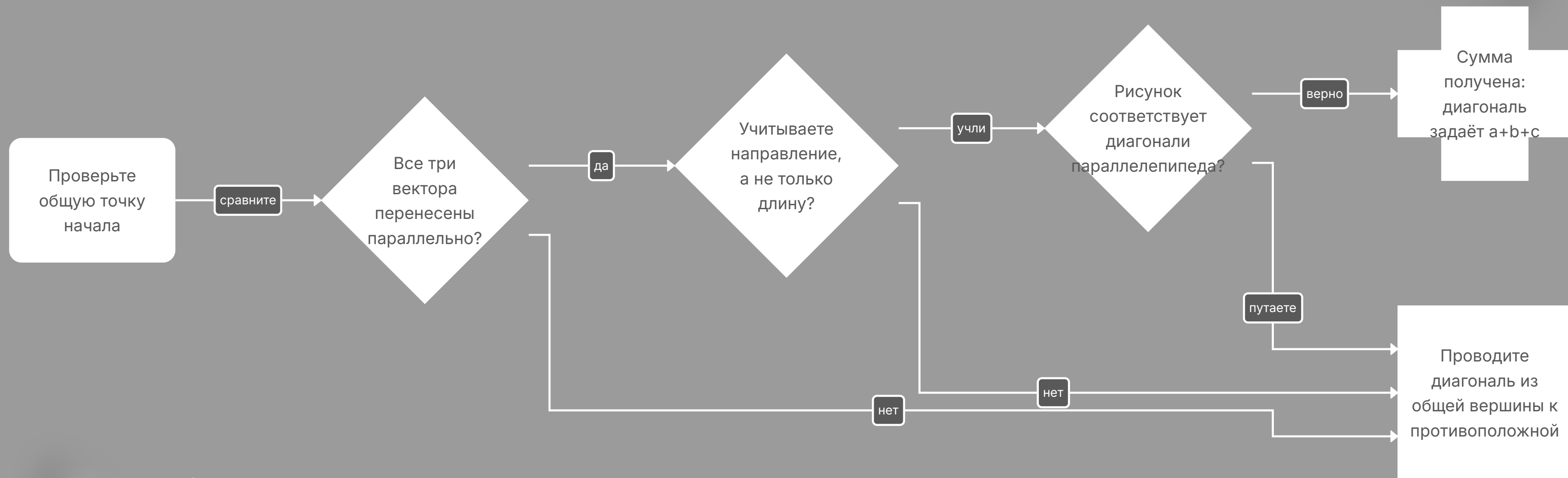
Правило помогает сопоставлять рисунок и координатный расчёт. Сначала конструируют диагональ по векторам, затем сравнивают полученный вектор с вычисленным, чтобы избежать ошибок в направлении и модуле результата.



Типичные ошибки при применении правила

14

Проверяйте, что три вектора складываются геометрически корректно — от одного начала и с учётом направления.



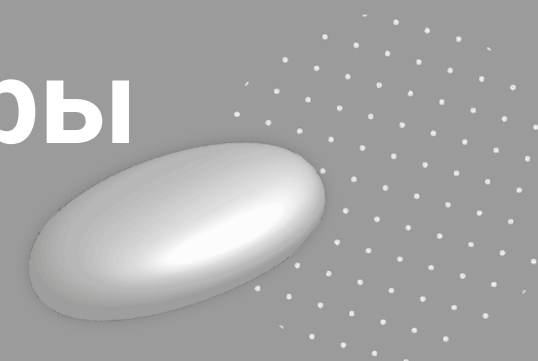
Типовые задания по теме и формы ответа

- Варианты заданий включают построение суммы по рисунку, вычисление координат результирующего вектора, распознавание случая нулевой суммы и применение правила в физическом сюжете. В ответе важно указывать и геометрию, и координатную запись, если это требуется.
- Во всех задачах ключ — корректный переход от «рисунка с векторами» к диагонали параллелепипеда, затем (при необходимости) координатная запись. Это уменьшает вероятность ошибок в направлении.

Тип задания	Исходные данные	Ожидаемый результат
Построение суммы	Векторы на рисунке в пространстве	Диагональ параллелепипеда = $a+b+c$
Координаты суммы	Координаты a, b, c	Вектор $(x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3, z_1+z_2+z_3)$
Нулевая сумма	Условия для противоположных или равных по модулю векторов	Результирующий вектор 0
Физическая интерпретация	Сюжет: силы/скорости в 3 направлениях	Равнодействующая/скорость как $a+b+c$

Связь правила параллелепипеда с объёмом фигуры

16



1

Параллелепипед рассматривают не только как модель суммы векторов: это ещё и пространственная фигура, для которой вводится объём. Поэтому одна и та же конструкция работает в двух разных темах.

2

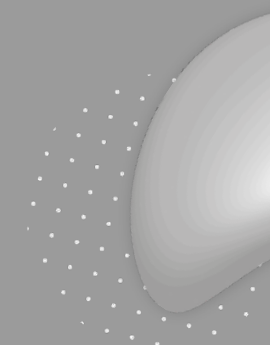
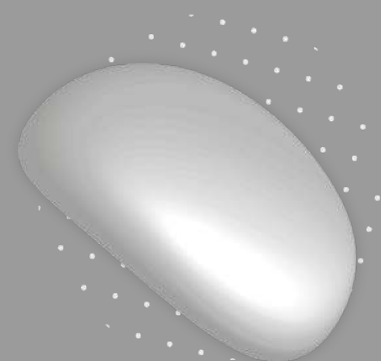
Для прямоугольного параллелепипеда объём выражается через произведение его измерений: по сути, это произведение длин вдоль взаимно перпендикулярных направлений.

3

В более общем случае применяются геометрические и координатные методы. Объём зависит от того, «насколько» векторы развёрнуты в пространстве, то есть от их взаимного расположения.

4

Такое объединение смысла важно для понимания: одно и то же пространственное тело становится и диаграммой векторной суммы, и объектом стереометрии. Это делает геометрию цельной и логически связанной.



Проверка решения на примере построения

- Линия показывает не значения величин, а структуру проверки: геометрия на чертеже проходит те же контрольные точки, что и алгебраическая запись.
- Если на каждом этапе совпадают и направление, и координатное выражение, решение считается согласованным. Иначе находят, где именно возникла ошибка в переносе или выборе диагонали.

Схема этапов проверки решения (логическая последовательность), не использующая экспериментальные измерения и конкретные числовые данные.

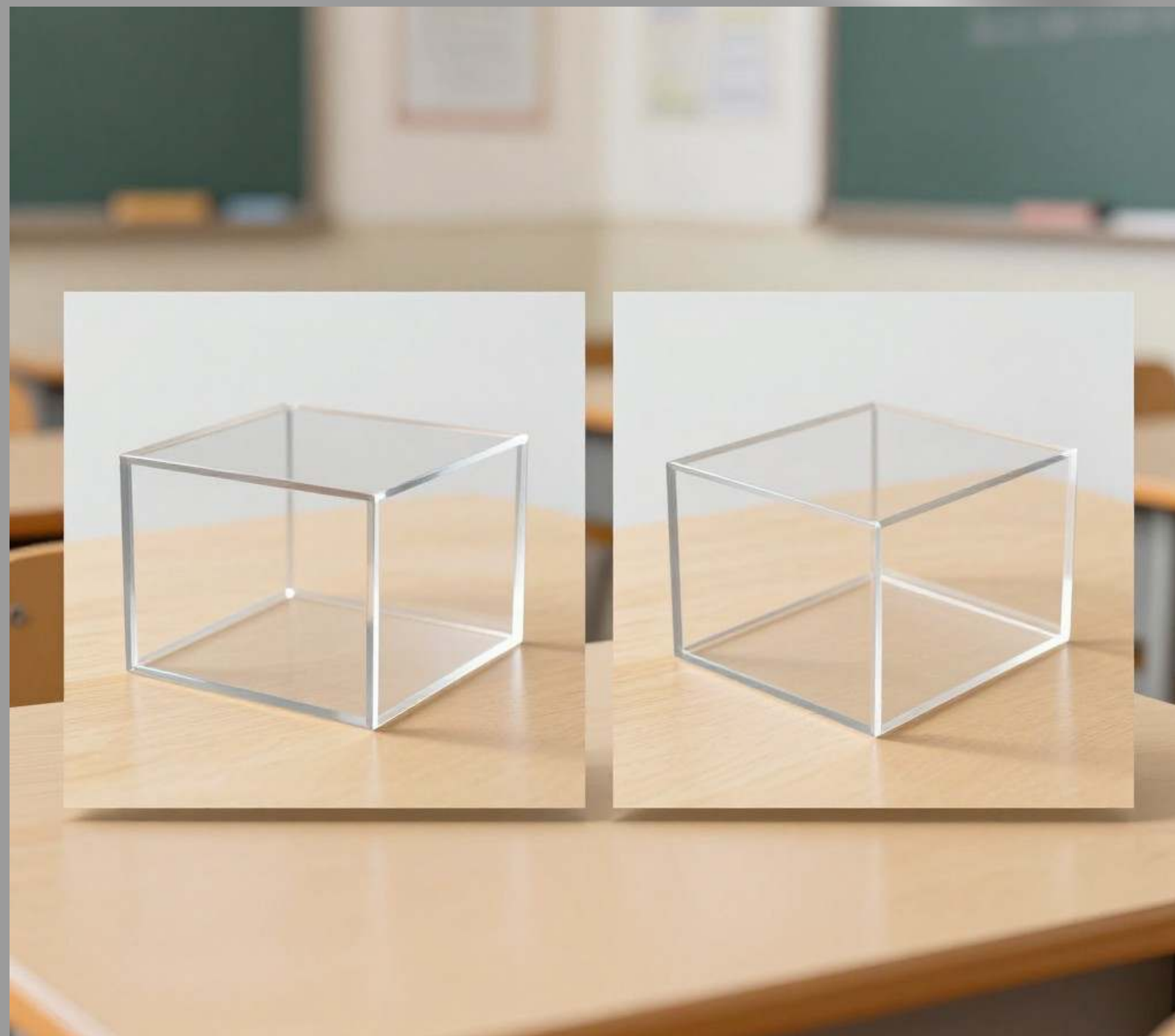
Наглядные модели для запоминания правила

Каркас и цветовые обозначения

Каркасный рисунок и цветовые метки для векторов помогают увидеть, как три направленных отрезка «собираются» в одну диагональ. Прозрачная модель подчёркивает соответствие вершин и направлений.

Два ракурса построения

Полезно сравнивать вид сверху для плоского анализа и перспективный вид для пространственного построения. Такие ракурсы особенно эффективны в 11 классе, когда важно уверенно переходить к координатам.



Почему это правило является базовым в векторной геометрии

Связь с вычислениями

Дальше появляется мост к координатам:
итоговая сумма выражается покомпонентно.
Поэтому чертёж можно контролировать
расчётом, а расчёт подтверждать
геометрически.

Образ в пространстве

Параллелепипед связывает рисунок и
операцию сложения: три вектора,
отложенные из одной точки,
превращаются в результирующую
диагональ.

Прикладная основа

На этом фундаменте решают задачи на
сложение направленных отрезков, строят
пространственные модели и интерпретируют
результаты в физике. Векторные операции
становятся закономерными, а не
случайными.

Итог: главная идея правила параллелепипеда

Сумма трёх векторов, отложенных из одной точки, изображается пространственной диагональю параллелепипеда. Правило объединяет наглядную геометрию, координатную запись и прикладные задачи физики и стереометрии.