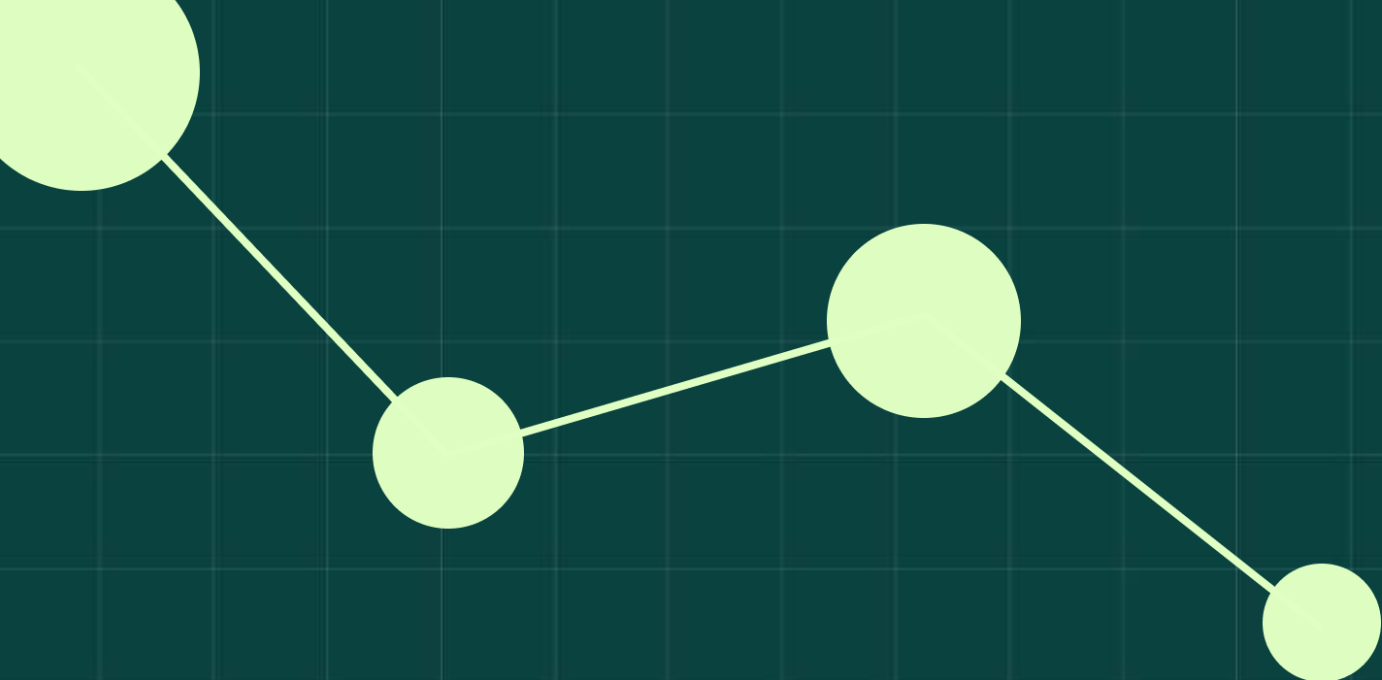




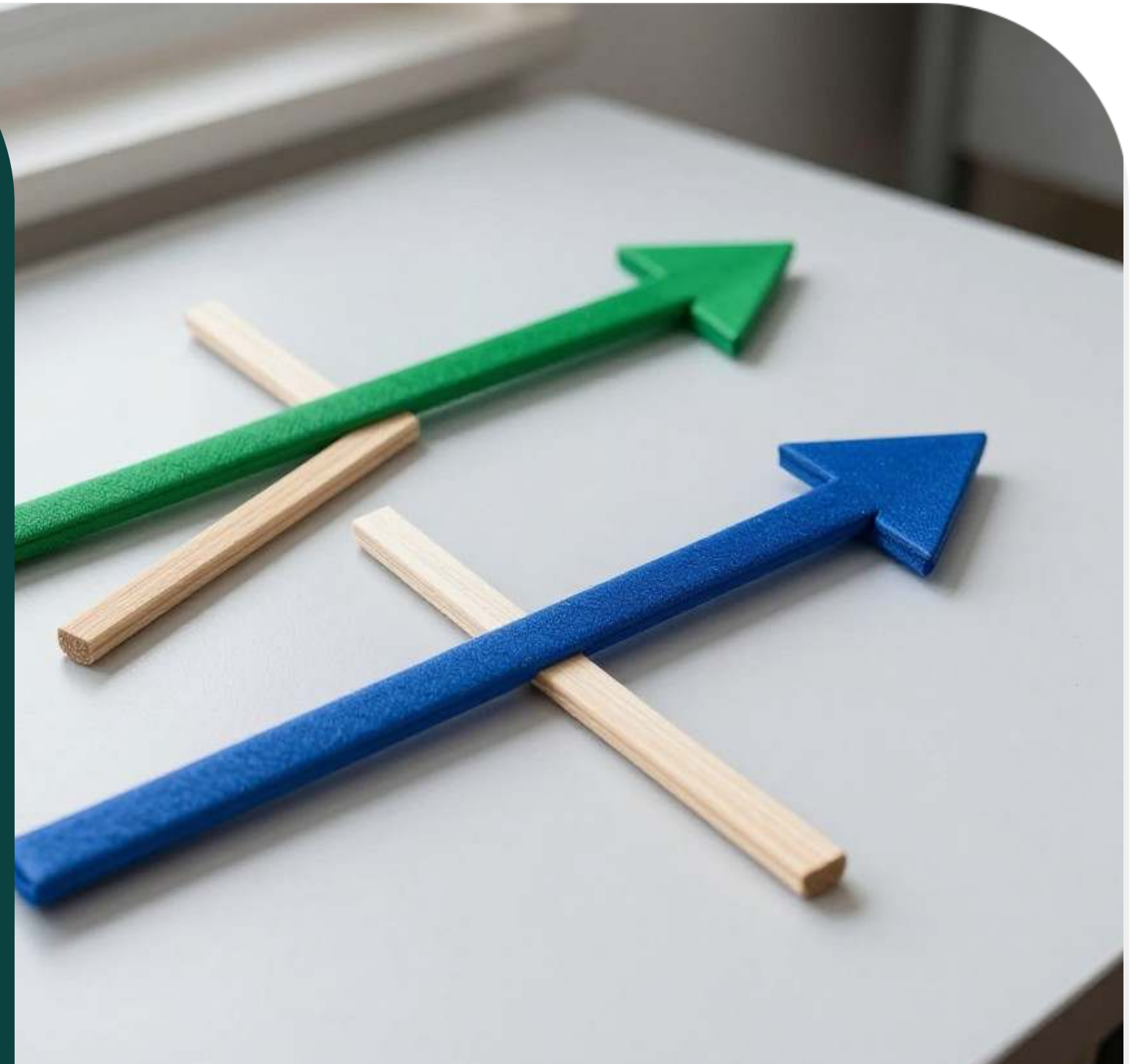
Сложение и вычитание векторов

Как одна стрелка превращается
в результат двух действий.



Где работают векторы и как с ними считать

Векторы описывают движение, скорость и силу там, где важны направление и длина. Сегодня мы научимся складывать и вычитать такие «стрелки» двумя способами.



Перемещение как векторная величина

3

● Итоговый сдвиг

Если пройти сначала один маршрут, а потом другой, получится одно итоговое перемещение. Вектор показывает именно этот результат — от начальной точки до конечной.

● Не путь, а результат

Путь может быть извилистым, но вектор его не запоминает. Для него важны только направление и длина, то есть конечный эффект движения.

● Примеры из жизни

Так удобно описывать шаг человека, движение лодки по течению или снос предмета ветром. Во всех случаях важна не траектория, а общий перенос.

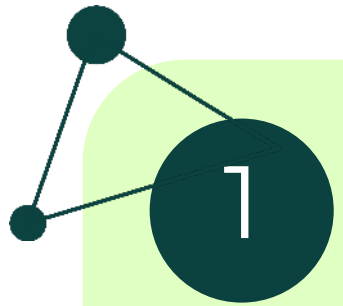
● Стрелка на схеме

На рисунках векторы изображают стрелками: длина стрелки показывает величину, а наконечник указывает направление. Это помогает быстро сравнивать разные перемещения.



Что такое вектор: обозначения и виды

4



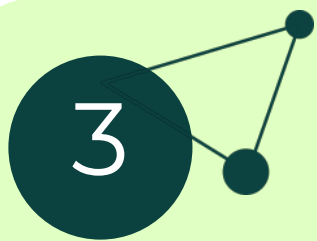
Основные признаки

Вектор изображают направленным отрезком: есть начало, конец, длина и направление. Именно эти признаки отличают его от обычного отрезка.



Равные векторы

Равные векторы могут находиться в разных местах, но они совпадают по длине и направлению. Для сложения и вычитания это особенно важно.



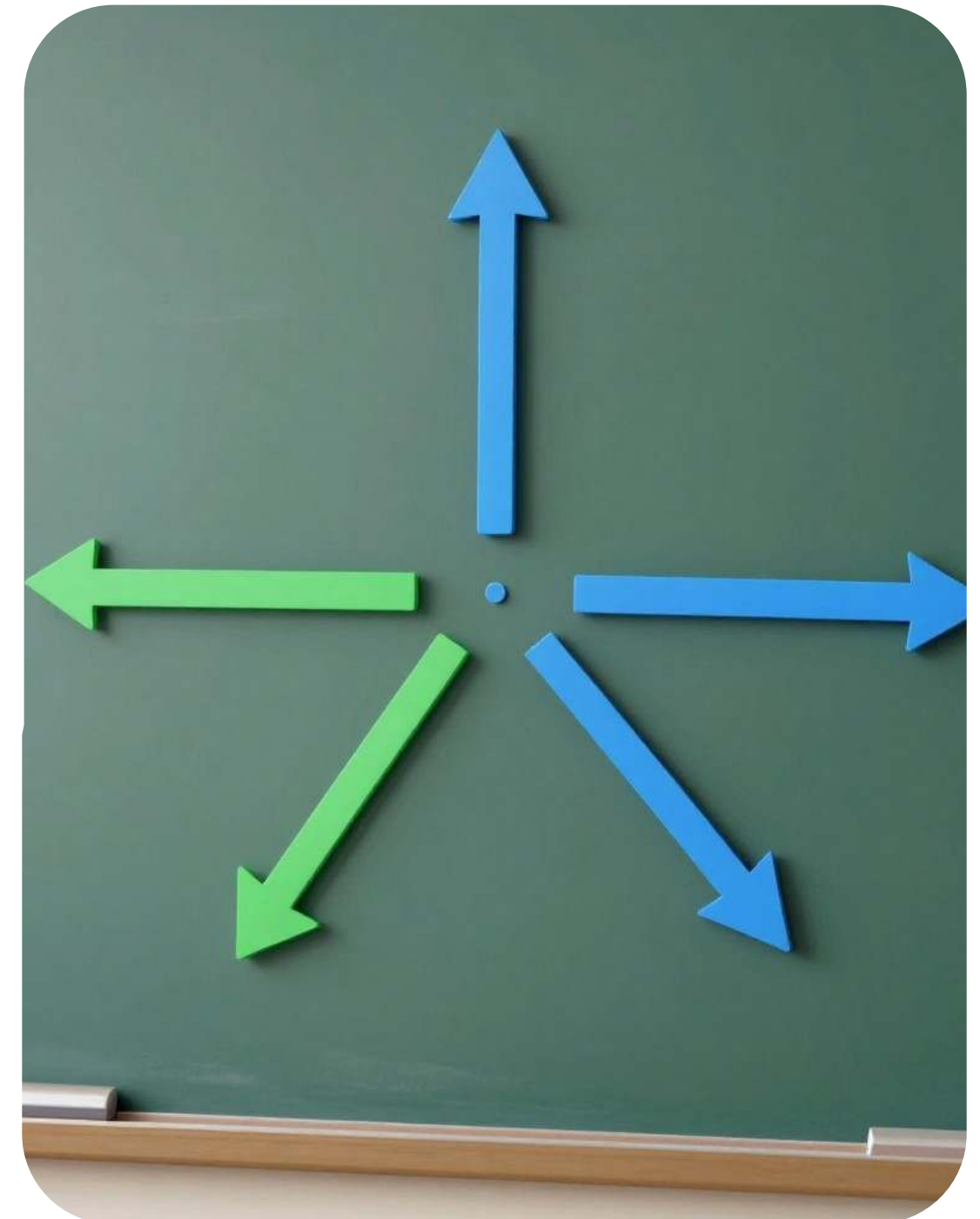
Нулевой вектор

Нулевой вектор не имеет длины и не задаёт направления. Он показывает отсутствие перемещения и ведёт себя как нейтральный элемент при сложении.



Противоположные векторы

Противоположные векторы равны по длине, но направлены в разные стороны. Если сложить их, получится нулевой вектор, потому что они взаимно компенсируются.



Смысл сложения: два шага подряд

5

1

Два шага

Сложение векторов удобно понимать как два действия подряд: сначала одно перемещение, затем другое. Результат показывает, где окажется точка после обеих стрелок.

3

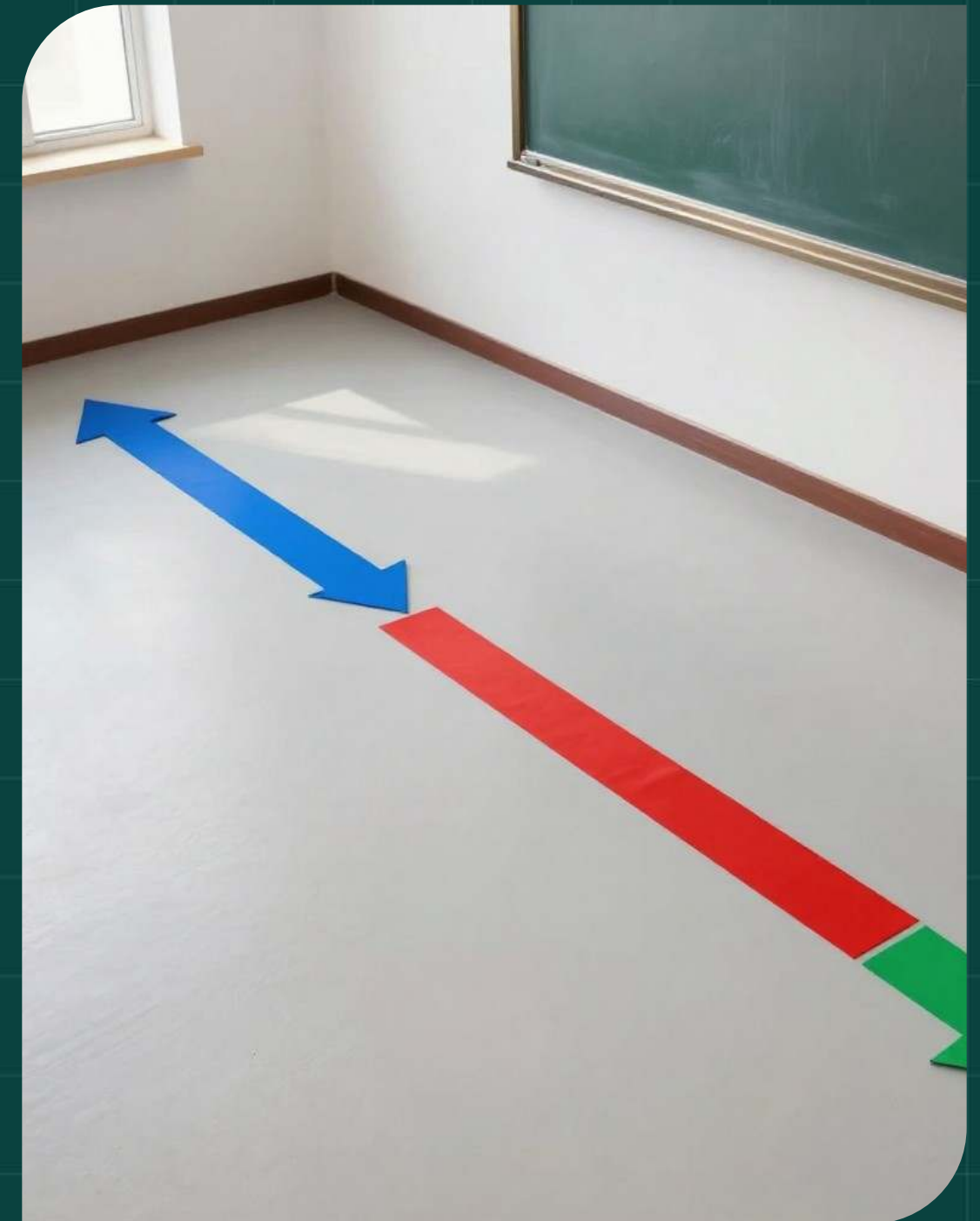
Читаем схему

На чертеже полезно выделять разные стрелки разными цветами. Тогда сразу видно, какое перемещение было первым, какое вторым и какой вектор получился в конце.

2

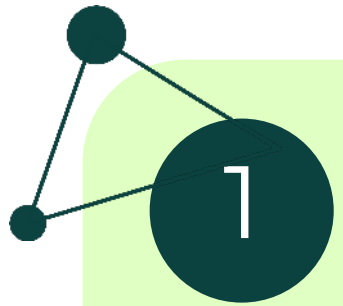
Общий результат

Если векторы расположить последовательно, итоговый вектор соединит начало первого и конец второго. Именно он описывает общий сдвиг без лишних промежуточных деталей.



Сложение по правилу треугольника

6



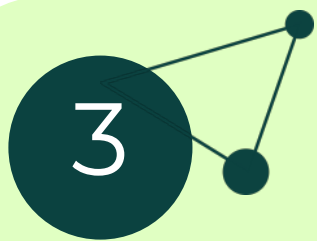
Начало построения

Сначала изображают первый вектор. Затем второй переносят параллельно самому себе так, чтобы его начало оказалось в конце первого.



Что значит перенести

Перенос не меняет длину и направление вектора. Поэтому мы работаем с тем же самым вектором, только в другом месте на чертеже.



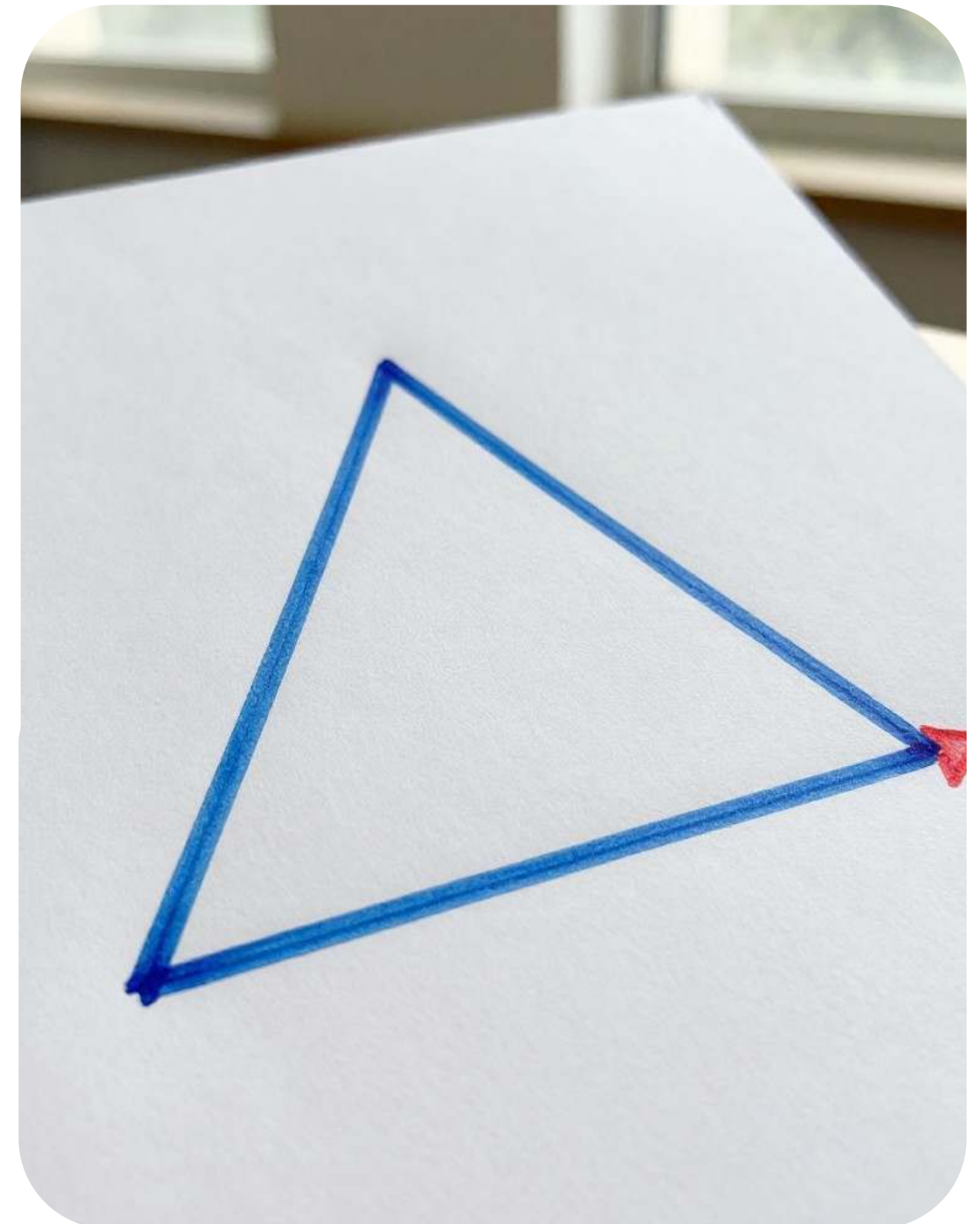
Третья сторона

После переноса получается треугольник из двух сторон. Третья сторона, проведённая от начала первого к концу второго, и есть сумма.



Когда применять

Это правило подходит для любых двух векторов и особенно удобно, когда один из них нужно «приставить» к другому по ходу решения.



Почему правило треугольника работает всегда

1. Общая точка

Оба вектора можно мысленно собрать в одну точку, не меняя их длины и направления.

2. Перенос без изменений

Затем один из векторов переносится параллельно самому себе к концу другого.

3. Построение треугольника

После переноса строится треугольник, у которого сохраняются те же две стороны.

4. Один и тот же результат

От начала первого вектора до конца перенесённого второго получается тот же итоговый вектор.

Сложение по правилу параллелограмма

8

1

Общая точка

Оба вектора откладывают из одной точки. Так легко увидеть, как каждое направление влияет на общий результат.

2

Строим параллелограмм

Через концы векторов проводят прямые, параллельные противоположным сторонам. В результате получается параллелограмм, построенный на двух стрелках.

3

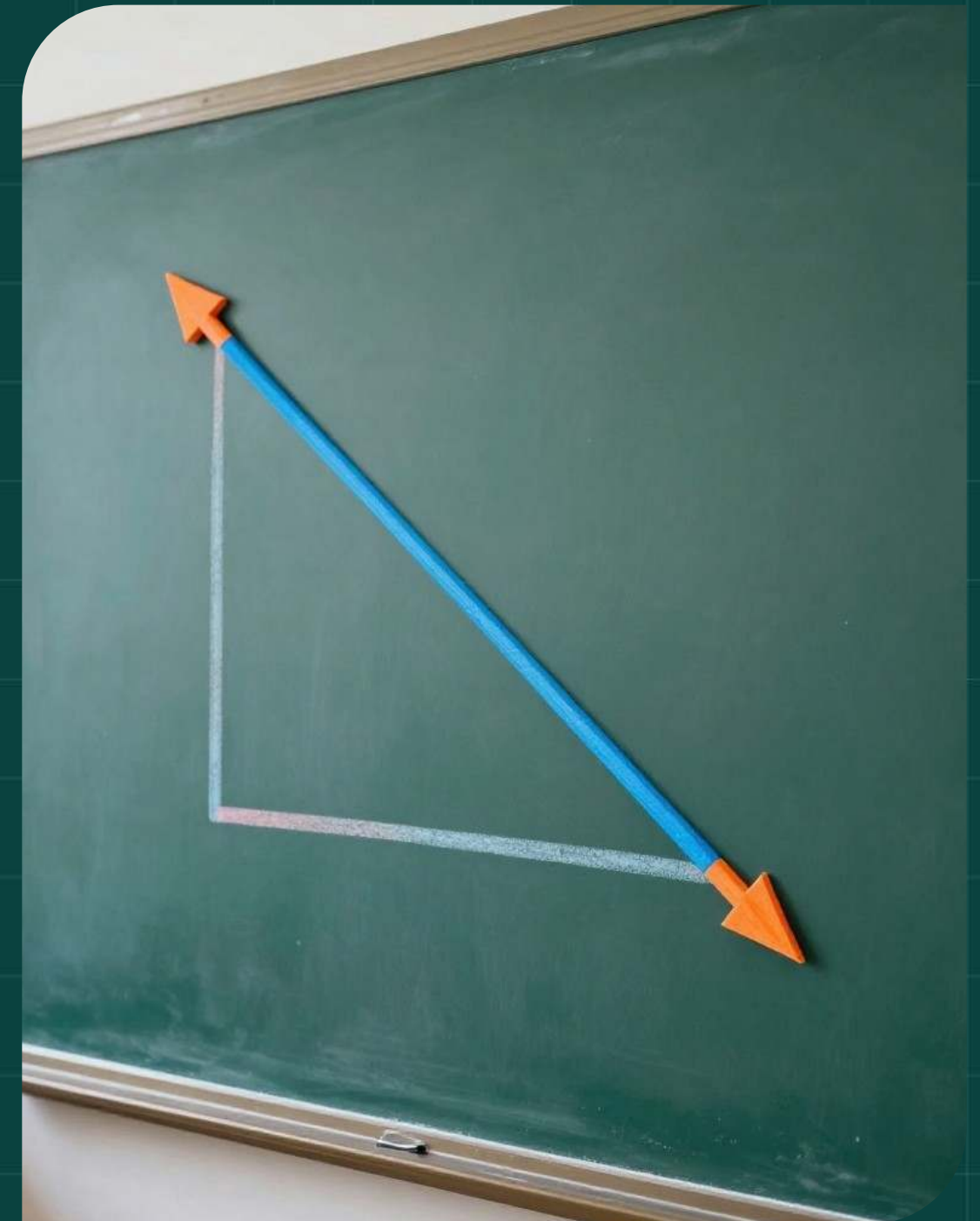
Диагональ суммы

Диагональ, выходящая из общей точки, показывает сумму векторов. Она соединяет начало обоих векторов с противоположной вершиной.

4

Удобный частный случай

Если векторы перпендикулярны, диагональ особенно наглядна: видно, как складываются два независимых направления движения.



Два правила — один ответ

Одинаковый результат

При переносе векторов по правилу треугольника или параллелограмма получается одно и то же итоговое перемещение.

Одна и та же диагональ

Обе конструкции приводят к вектору, который соединяет исходную точку с конечной точкой общего движения.

Выбор способа

Поэтому в задаче можно выбрать более удобный способ построения, не опасаясь изменить ответ.

Это правило удобно проверять на чертеже: добавление нулевого вектора ничего не меняет, а противоположные векторы взаимно уничтожаются.

Свойства сложения векторов из школьного курса геометрии



$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

— результат остаётся тем же.

Это правило упрощает вычисления и помогает не путать знак при построении разности.

Школьный курс геометрии



2

действия сводят вычитание к сложению, когда второй вектор заменяют противоположным.

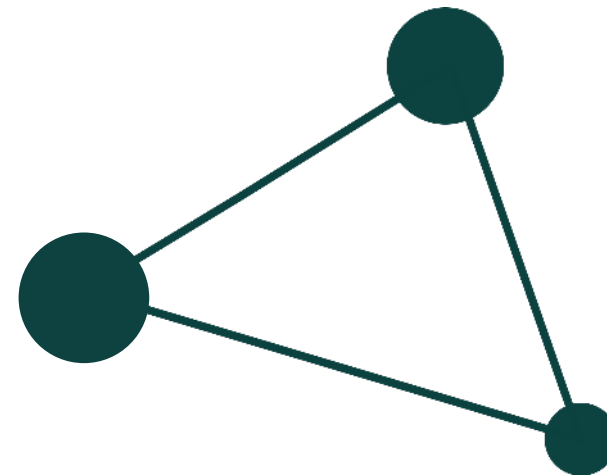
Графическое вычитание: случай 1

12

1

Начальная схема

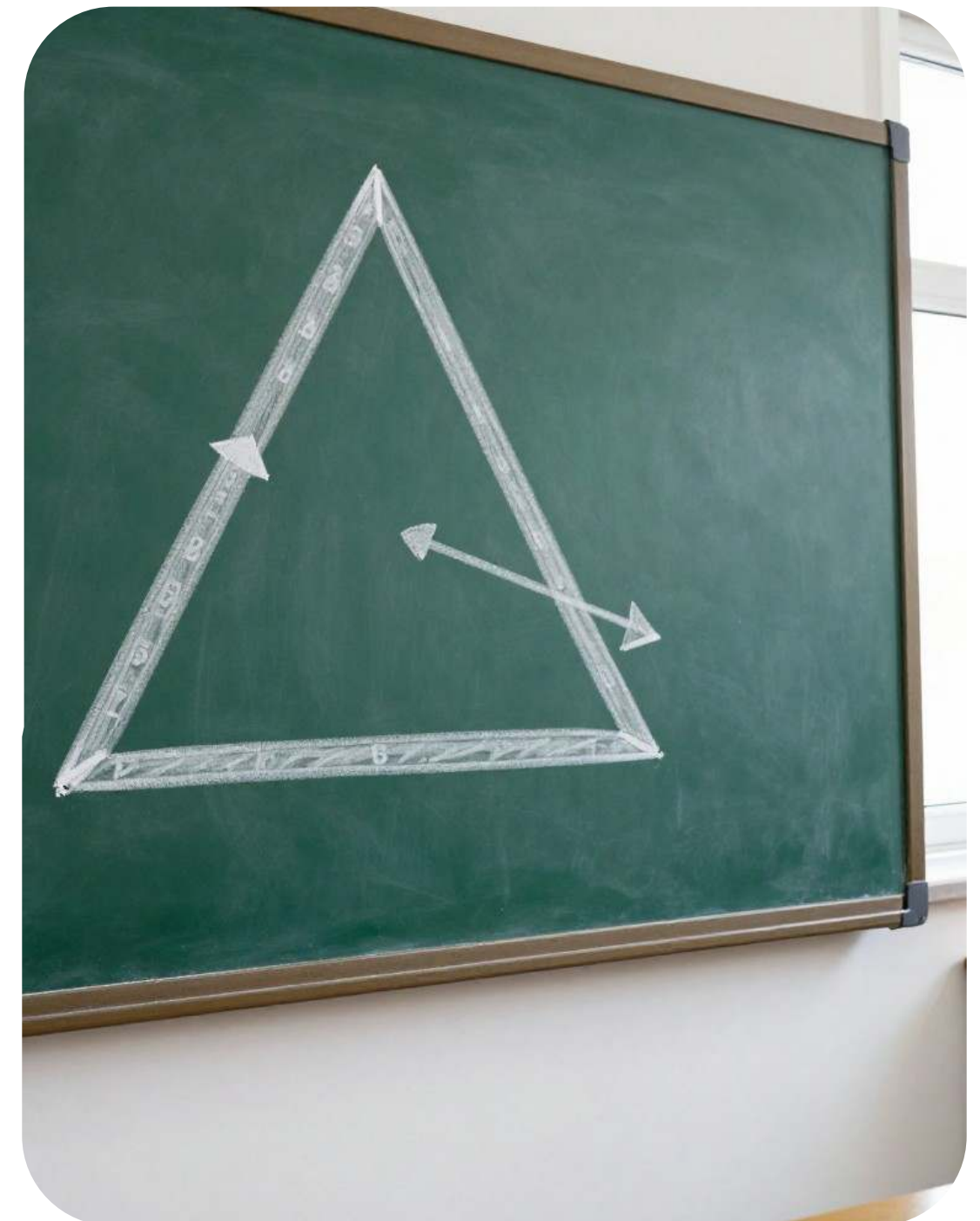
Сначала изображают оба вектора с общей начальной точкой, чтобы видеть исходную ситуацию. Затем один из них мысленно заменяют противоположным, сохраняя длину, но меняя направление.



2

Построение разности

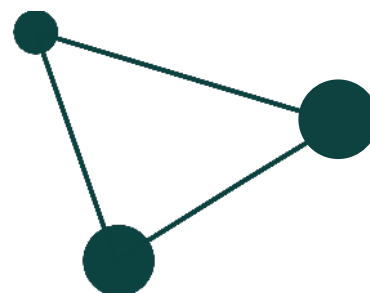
Далее к первому вектору откладывают противоположный второму по правилу треугольника. Полученная стрелка показывает разность и соединяет начало первого вектора с концом нового перемещения.



3

Проверка направления

Особенно важно не перепутать исходный вектор и его противоположный вариант. Ошибка в направлении сразу меняет итог, хотя длина остаётся той же самой.



Графическое вычитание: случай 2

13

1

Параллельный перенос

Если векторы лежат на параллельных прямых, удобно сначала перенести один из них параллельно самому себе. При этом сохраняются длина и направление, а значит, не меняется и результат.

3

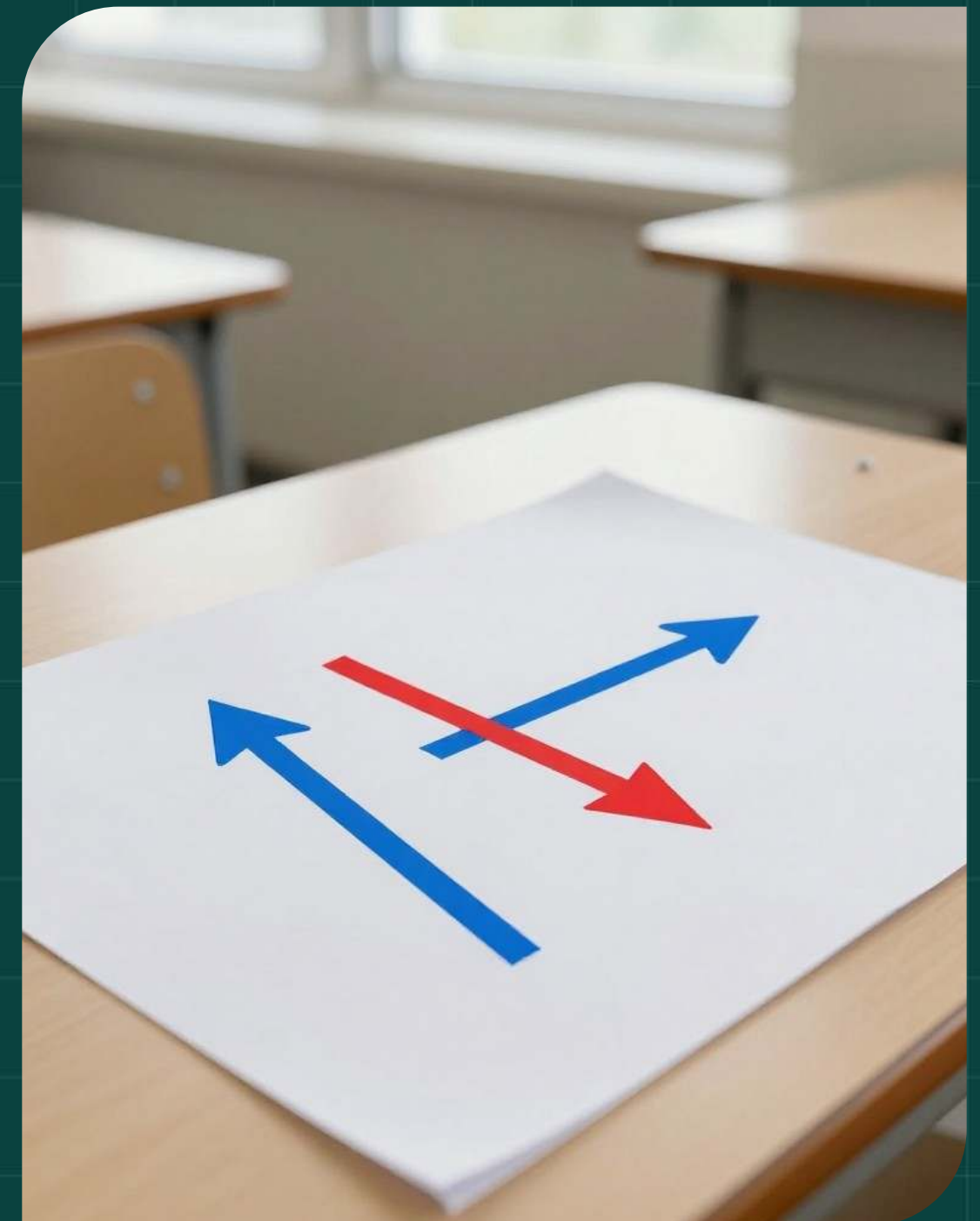
Что показывает рисунок

На таком чертеже особенно хорошо видно, что важны не только размеры стрелок, но и их ориентация. Именно она определяет, получится ли движение вправо, влево, вверх или вниз.

2

Замена вычитания сложением

Затем к выбранному вектору добавляют противоположный второму. Так разность превращается в обычное сложение, а итоговый вектор соединяет соответствующие точки на рисунке.



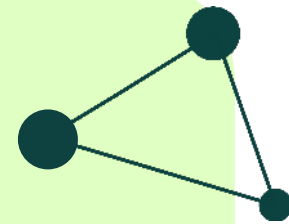
Сложение векторов по координатам

14

1

Пара чисел

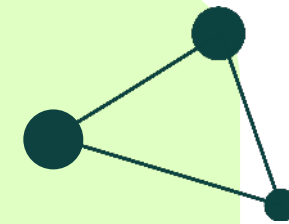
В координатной записи каждый вектор задаётся парой чисел, соответствующих горизонтальному и вертикальному смещениям. Сложение выполняют отдельно по каждой координате, не смешивая их между собой.



2

Складываем по компонентам

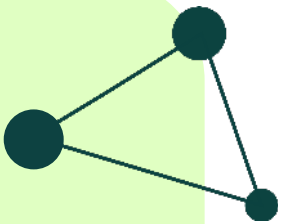
Если $a=(x_1, y_1)$ и $b=(x_2, y_2)$, то сумма равна (x_1+x_2, y_1+y_2) . Знак плюс показывает, что складываются смещения в одном и том же направлении оси.



3

Преимущество метода

Такой способ особенно полезен, когда чертёж сложный или нужен точный ответ. По координатам легко проверить результат и сразу увидеть, куда направлен итоговый вектор.



Вычитание векторов по координатам

15

1

Запись разности

Сначала записывают разность как отдельные действия с координатами. Затем из координат первого вектора вычитают соответствующие координаты второго, не меняя их местами.

2

Работа со знаком

Формула выглядит так: $a-b=(x_1-x_2, y_1-y_2)$. Если одна из координат отрицательная, итоговая точка смещается влево или вниз относительно начала координат.

3

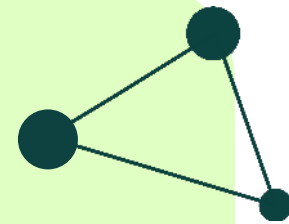
Самопроверка

После вычисления полезно сверить ответ с рисунком. Если направление итогового вектора не совпадает с ожидаемым, значит, в одном из знаков допущена ошибка.

Свойства сложения векторов

16

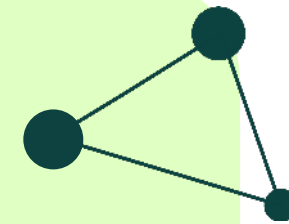
1



Порядок не важен

Порядок сложения не меняет итог: сначала вправо, потом вверх или наоборот — конечная точка будет одной и той же. Это и есть переместительный закон.

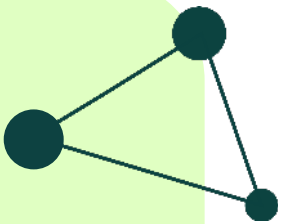
2



Скобки можно менять

Если складывать несколько векторов подряд, можно группировать их по-разному, не меняя результата. Такое свойство особенно удобно в длинных цепочках перемещений.

3

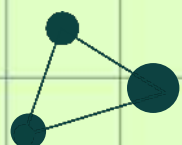


Удобство в задачах

Благодаря этим законам решение можно записывать короче и удобнее. Векторная сумма остаётся одной и той же, даже если отдельные шаги переставить местами или объединить.

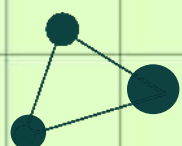
Как связаны длина вектора и результат

17



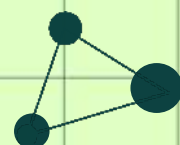
Одинаковое направление

Если векторы направлены одинаково, результат становится длиннее, потому что отрезки складываются. Это видно на примере движения в одну сторону по прямой.



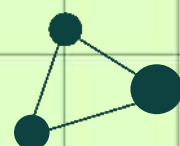
Перпендикулярный случай

При перпендикулярных векторах сумма образует диагональ прямоугольника. В этом случае длину результата удобнее представлять как расстояние между началом и концом общего перемещения.



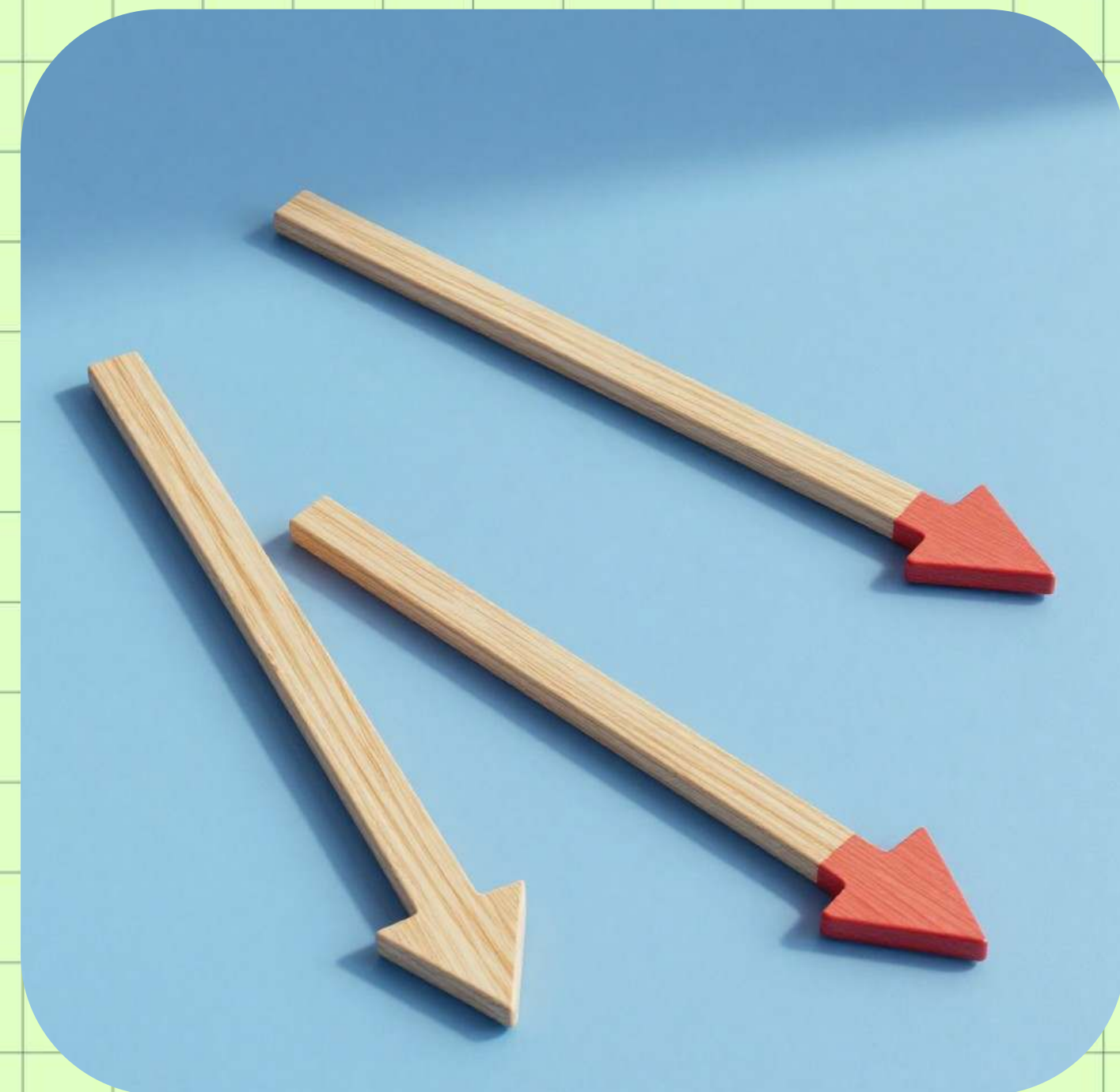
Противоположные направления

Если направления противоположны, одна часть движения частично «съедает» другую. Тогда длина результата равна разности модулей, а итоговая стрелка указывает сторону большего вектора.



Почему это важно

Поэтому модуль суммы нельзя находить без учёта направления. Один и тот же набор длин даёт разные результаты в зависимости от расположения векторов.



Типичные ошибки и как их распознать

18

● Складывают только длины

Нельзя складывать только числа из модулей: векторы ещё имеют направление. Если забыть об этом, итоговая стрелка может получиться совсем не туда.

● Путают направление

Противоположный вектор не совпадает с исходным. Он равен ему по длине, но направлен в другую сторону, и именно это меняет результат вычисления.

● Соединяют не те точки

При графическом сложении важно соединять начало первого вектора с концом последнего. Если взять не те точки, получится неверный итоговый вектор.

● Забывают сменить знак

Вычитание всегда сначала превращают в сложение с противоположным вектором. Если пропустить этот шаг, знаки в координатах или на чертеже сойдутся.

● Проверяют по смыслу

Хорошая проверка — сравнить направление ответа с логикой задачи. Если результат должен идти вправо, а получился влево, значит, где-то допущена ошибка.

Практика: 3 графические задачи

19

1

Задача 1

Построй сумму двух векторов по правилу треугольника. Сначала перенеси второй вектор к концу первого, а затем соедини начало первого с концом перенесённого вектора.

3

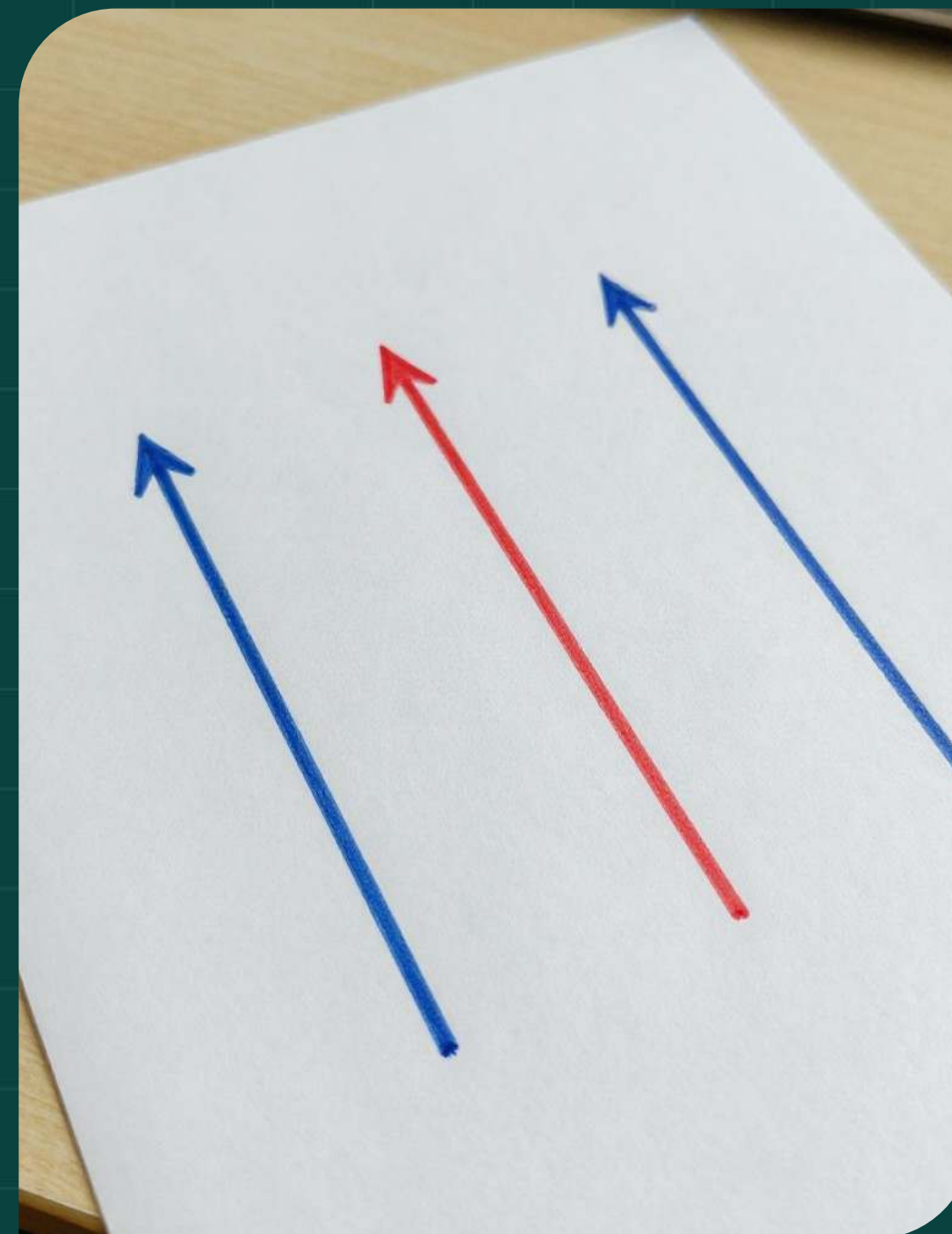
Задача 3

Сравни два получившихся вектора и определи, какой длиннее. Объясни ответ не только по размеру, но и по расположению стрелок относительно друг друга.

2

Задача 2

Найди разность двух векторов на рисунке. Замени вычитание прибавлением противоположного вектора и аккуратно проследи, откуда начинается итоговая стрелка и куда она направлена.





Векторы работают точно

Сегодня мы увидели, что векторы описывают не только числа, но и направление движения. Если помнить про знаки, длину и способ построения, ответы по рисунку и координатам совпадут.