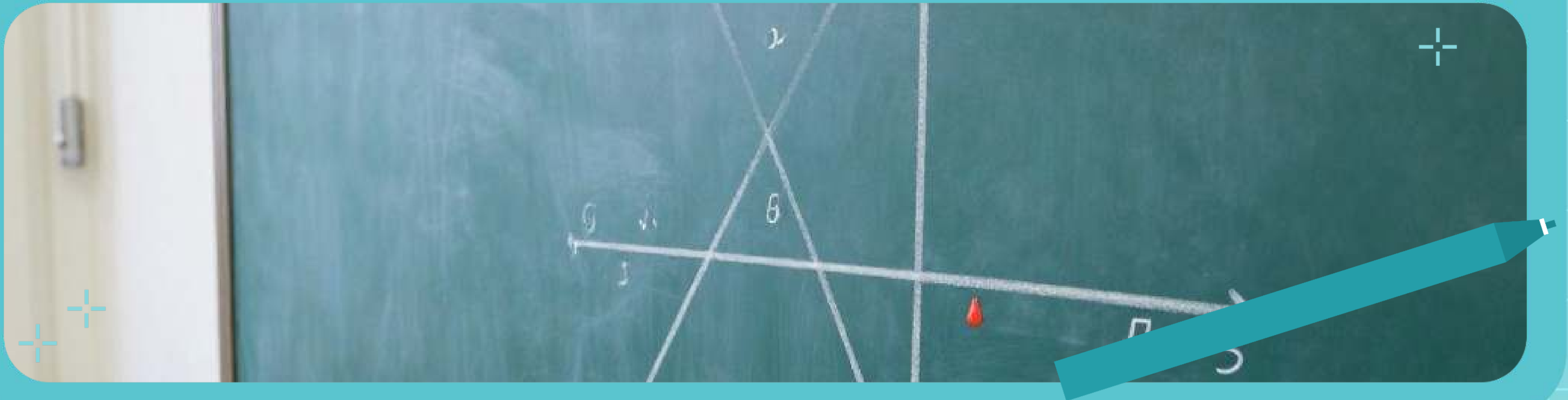


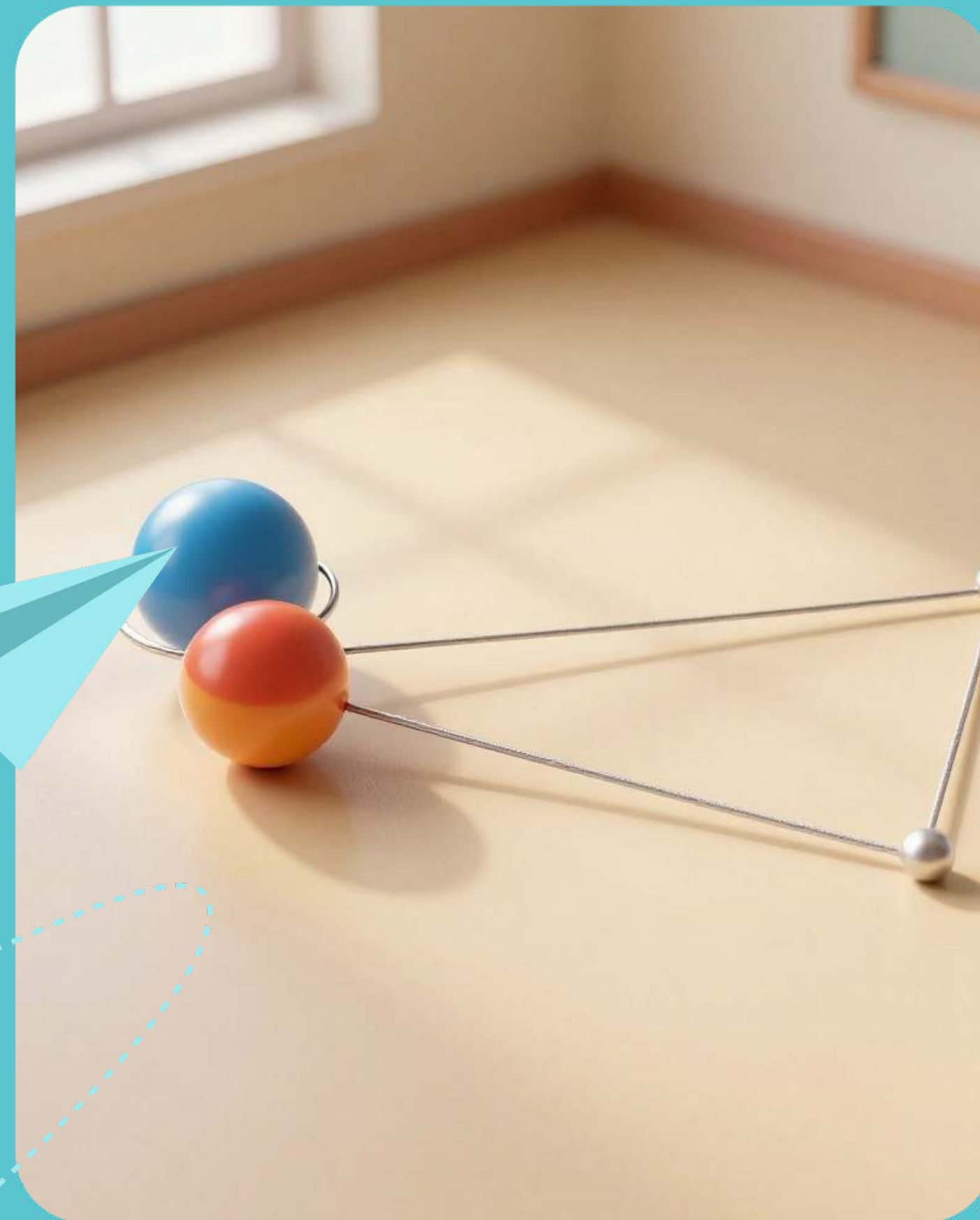
Уравнение с двумя переменными и его график

Пары чисел, которые задают точку на графике



Формула и рисунок: одна идея двумя способами

Формула становится понятной, когда её можно увидеть на плоскости. Здесь алгебраические записи превращаются в точки, линии и кривые.



Зачем нужны уравнения с двумя переменными

Пара значений

Уравнения с двумя переменными описывают не одно число, а пару значений. Это удобно, когда нужно сравнивать две связанные величины и следить за их изменением.

Чтение графиков

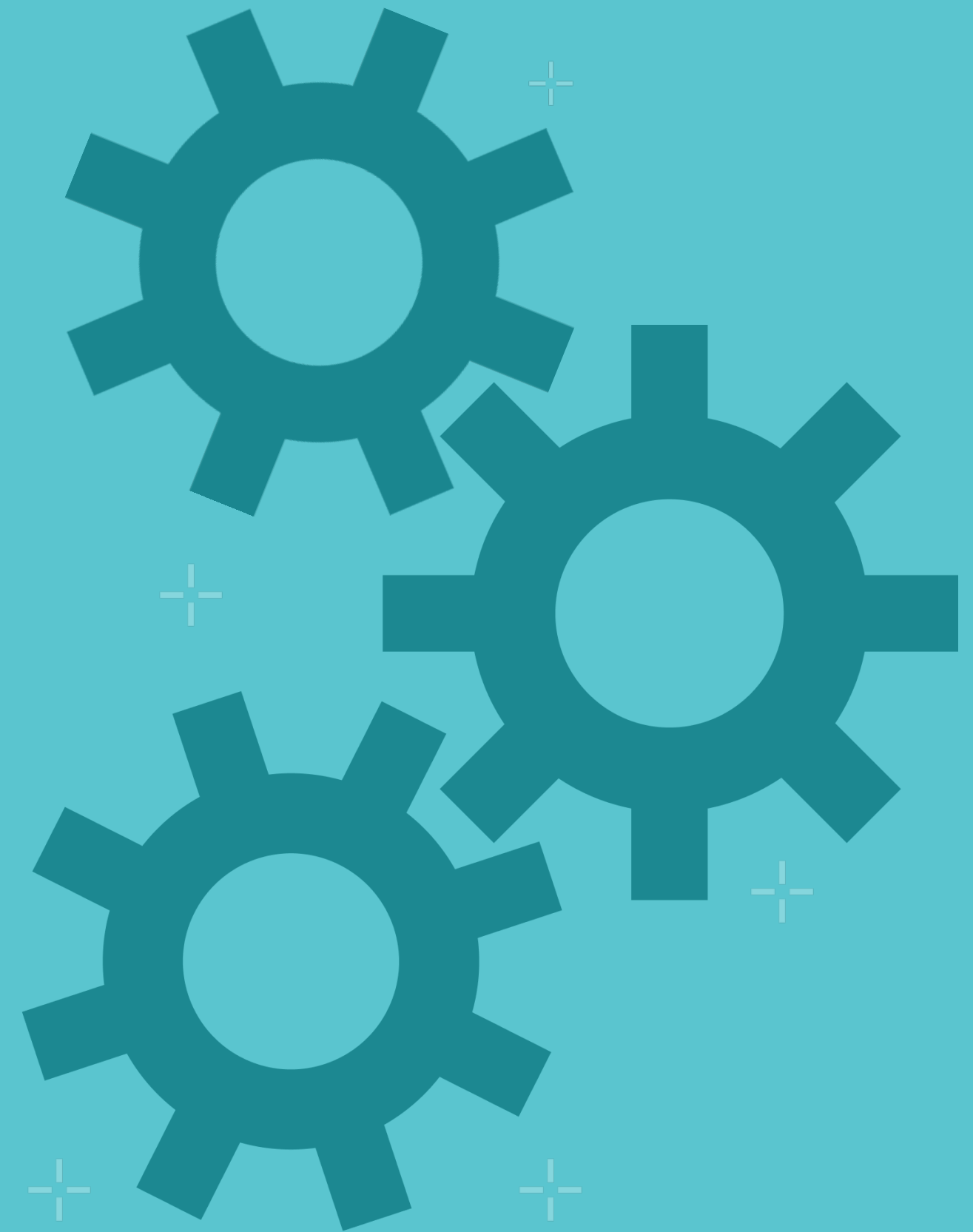
Такие уравнения помогают читать графики и понимать, как меняются координаты на плоскости. По ним видно, какие точки действительно подходят условию.

Практические задачи

Их используют в задачах про движение, стоимость, расстояние и температуру. В этих ситуациях важно связать изменение одной величины с изменением другой.

Связь x и y

Чаще всего рассматривают, как меняются x и y вместе. Это делает зависимость наглядной и помогает переходить от формулы к изображению.



Что такое уравнение вида $f(x, y)=...$

1. Переменные

В уравнении участвуют переменные x и y . Их значения заранее неизвестны, поэтому вместо конкретных чисел записывают буквенное выражение с условием равенства.

2. Буквенная запись

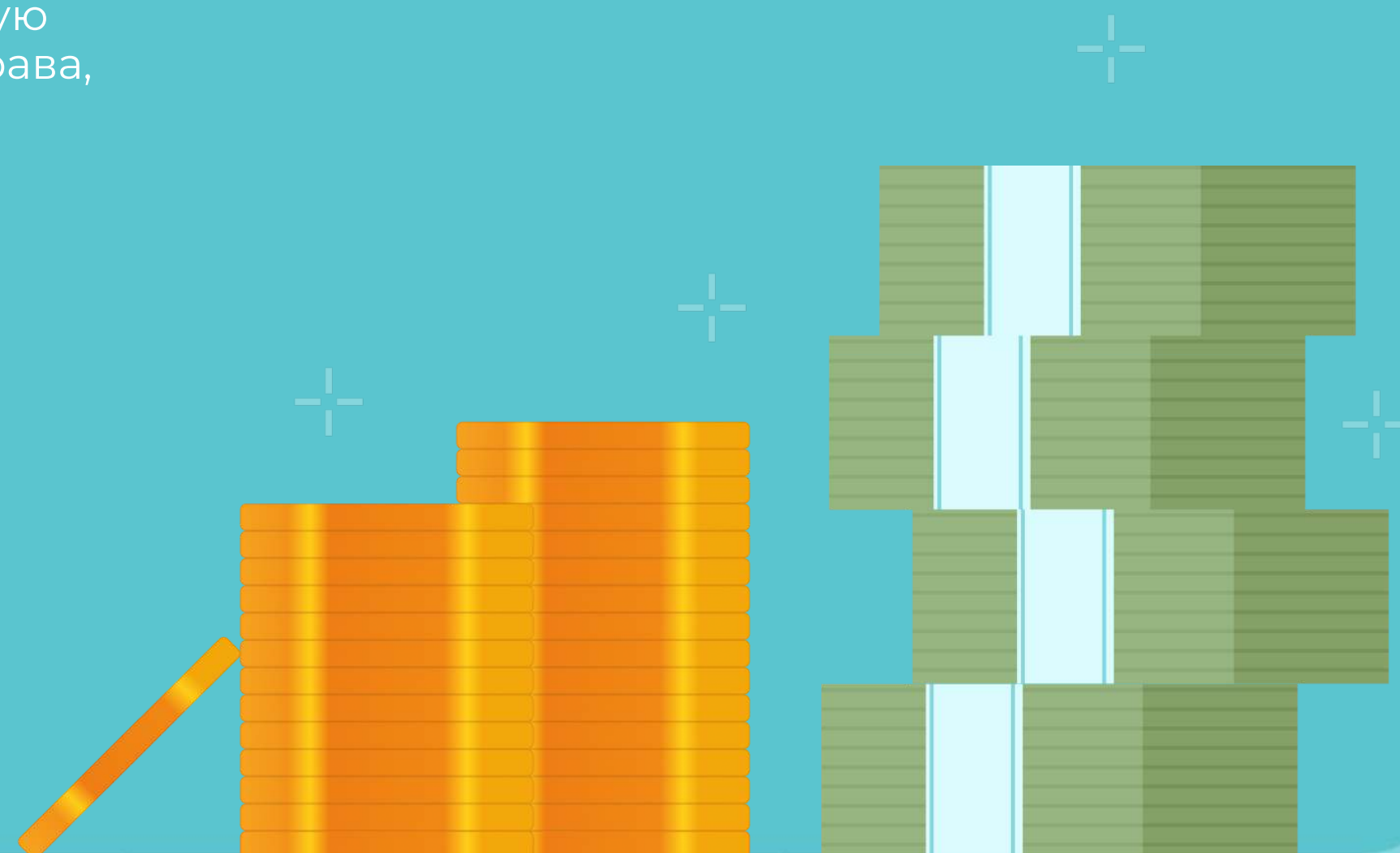
Выражение $f(x, y)$ обозначает часть формулы, зависящую от обеих переменных. Оно может стоять слева или справа, но смысл остаётся одинаковым.

3. Когда равенство выполняется

Уравнение становится верным только при некоторых значениях x и y . Именно такие значения и называют решениями данного уравнения.

4. Примеры

Примеры разных форм: $x+y=5$, $2x-y=1$, $x^2+y^2=9$. Они показывают, что вид уравнения может быть линейным или нелинейным.



Пара чисел как решение

Что считается решением

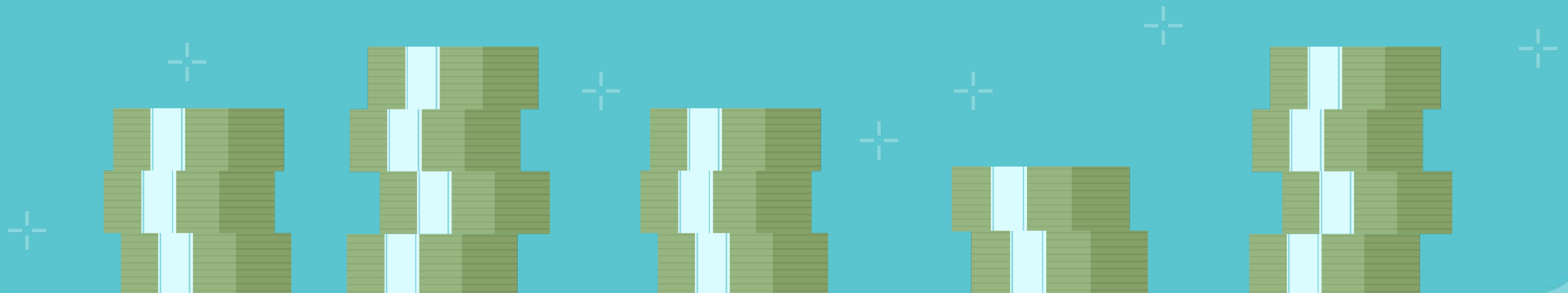
Решением уравнения является упорядоченная пара (x, y) . Порядок важен: сначала называют первую координату, затем вторую, и именно так записывают точку.

Проверка подстановкой

Чтобы проверить пару, подставляют её в уравнение. Если после подстановки получается верное равенство, пара подходит; если нет, она не является решением.

Много подходящих пар

У одного уравнения обычно много решений. Поэтому график показывает не одну точку, а целый набор точек, которые все удовлетворяют условию.



Почему решений много

1.

Не одно решение

Если уравнение верно при разных значениях x и y , то решений получается несколько. Это значит, что мы ищем не одну пару, а все подходящие пары.

2.

Пример подходящих пар

Для уравнения $x+y=4$ подходят, например, пары $(1,3)$, $(2,2)$ и $(4,0)$. Все они дают одинаковую сумму и потому удовлетворяют условию.

3.

Набор точек

Каждая найденная пара соответствует одной точке на плоскости. Вместе такие точки образуют множество, а не отдельный случайный набор.

4.

Почему вид графика меняется

Если точек много, они могут выстраиваться в прямую или плавную кривую. Именно поэтому графики уравнений бывают разными по форме.



Как читать точку на плоскости

Две оси

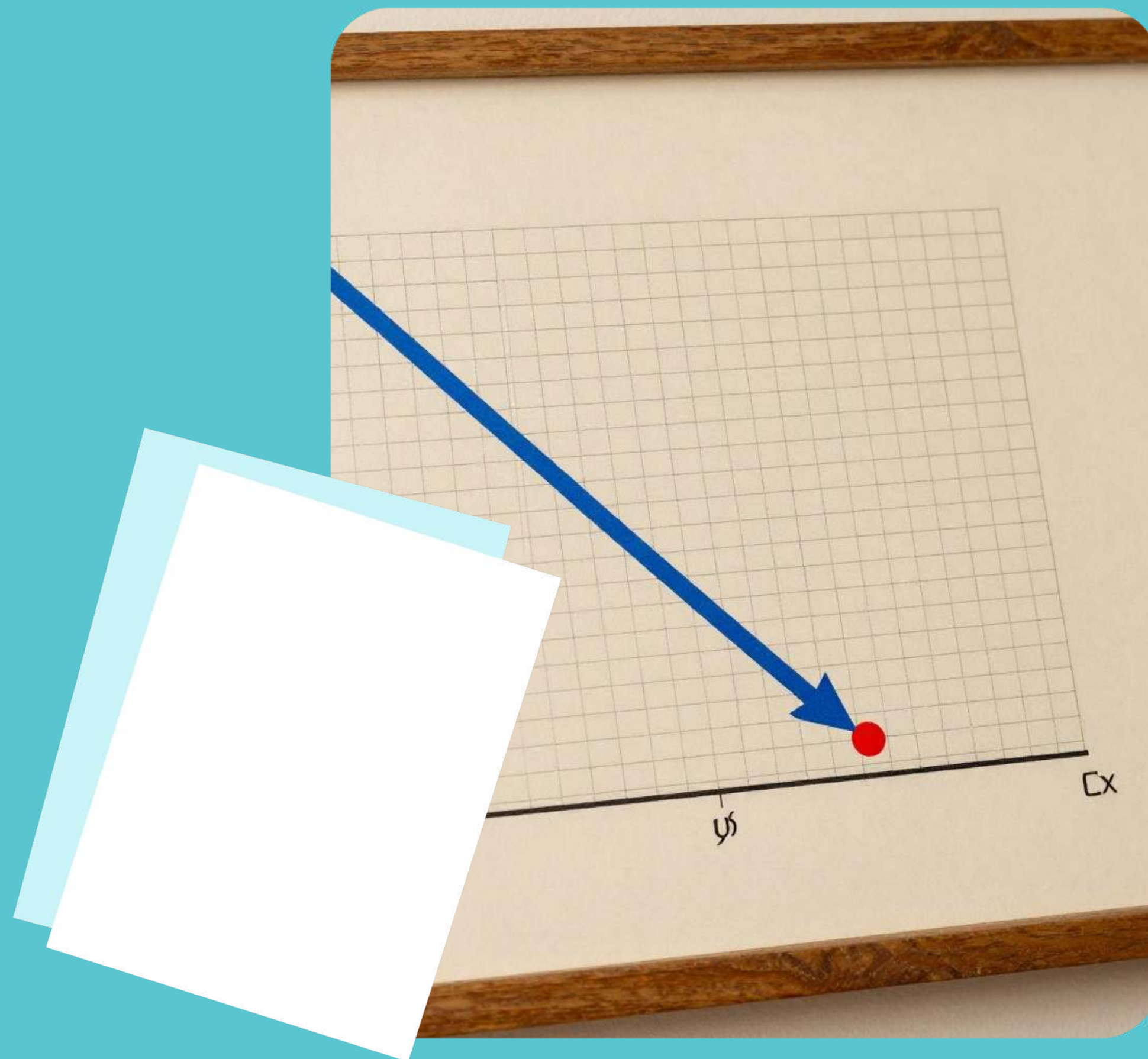
Координатная плоскость имеет две оси: Ox и Oy . Горизонтальная ось показывает первую координату, а вертикальная — вторую, поэтому точку можно найти по порядку.

Как двигаться

Точку (x, y) откладывают сначала по горизонтали, затем по вертикали. Сначала определяют, насколько нужно сместиться вправо или влево, а потом — вверх или вниз.

Пример точки

Например, точка $(3, -2)$ находится на три клетки вправо и на две клетки вниз от начала координат. Такой способ помогает быстро строить и читать графики.



Что такое график уравнения

1. Что входит в график

График уравнения состоит из всех точек, координаты которых делают уравнение верным. Это точное геометрическое изображение алгебраического условия.

2. Точки и решения

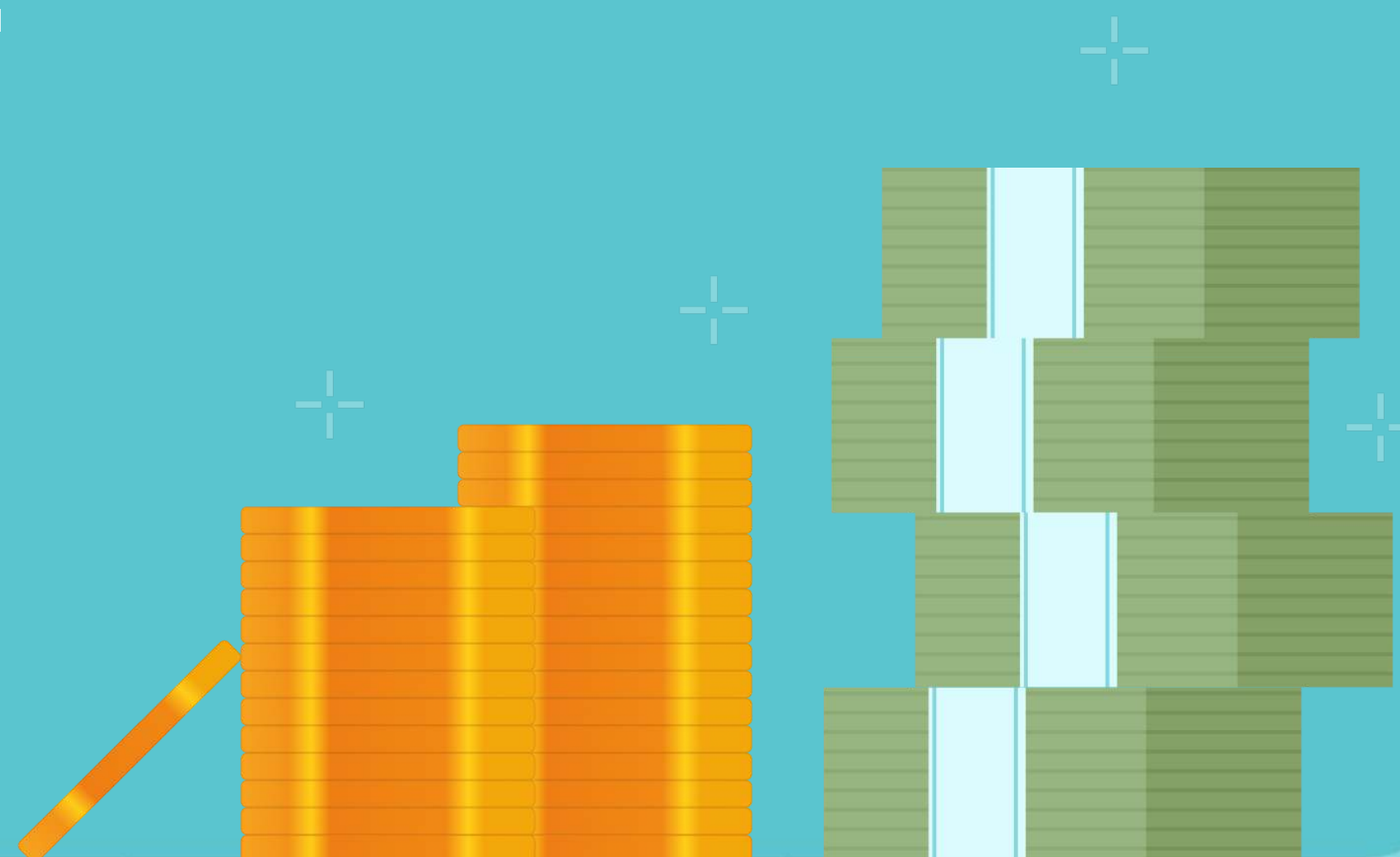
Если точка лежит на графике, её координаты являются решением уравнения. Значит, график и множество решений описывают одну и ту же связь.

3. От формулы к рисунку

Каждая найденная пара чисел переводится в точку на плоскости. Так формула превращается в рисунок, который можно увидеть и исследовать.

4. Связь двух разделов

Именно здесь алгебра соединяется с геометрией. Уравнение задаёт правило, а график показывает его наглядно и без лишних вычислений.



Линейное уравнение $ax+by=c$

1.

Общий вид

Линейное уравнение с двумя переменными записывают как $ax+by=c$. При этом коэффициенты a и b не должны обращаться в ноль одновременно.

2.

График прямой

Такая запись описывает прямую линию на плоскости. Поэтому линейные уравнения особенно удобно изображать и анализировать по точкам.

3.

Преобразование

Если $b \neq 0$, уравнение можно преобразовать к виду $y=kx+b$. Так сразу видно, как связаны наклон прямой и её положение на плоскости.

4.

Смысл коэффициентов

Коэффициент k показывает, как меняется y при изменении x , а число b задаёт пересечение с осью Oy .



2

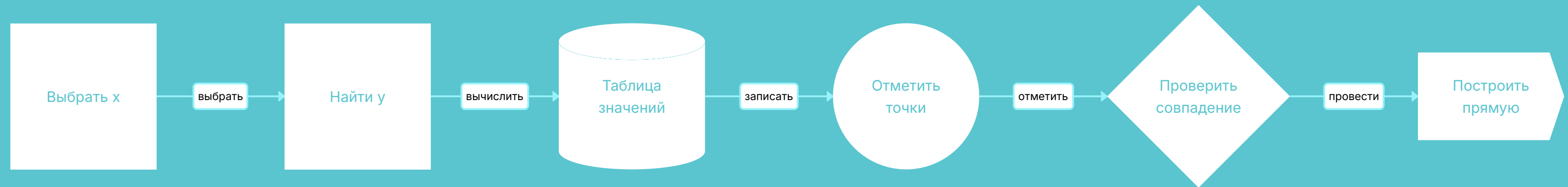
Две переменные позволяют описывать зависимость между координатами и сразу проверять, лежит ли точка на графике.

две переменные образуют упорядоченную пару, по которой строят график и проверяют решения.

Алгебра: уравнения с двумя переменными

Алгоритм построения прямой

Порядок построения по нескольким проверенным точкам



Пример 1: $y=2x-1$



x	y
0	-1
1	1
2	3

Подстановка значений x в уравнение $y=2x-1$

Таблица значений для уравнения $y=2x-1$.

Точки лежат на одной прямой; при увеличении x на 1 значение y возрастает на 2.



Пример 2: $y = -x + 4$

x	y
0	4
2	2
4	0

Таблица значений для уравнения $y = -x + 4$.

Получается убывающая прямая; точки пересечения с осями — (0,4) и (4,0).

Подстановка значений x в уравнение $y = -x + 4$



Вертикальная прямая $x=a$

Одна координата

Если в уравнении $ax+by=c$ коэффициент b равен нулю, переменная y исчезает. Остаётся условие $x=a$, которое задаёт все точки с одной и той же первой координатой.

Вид графика

График такого уравнения — вертикальная прямая, параллельная оси Oy . Она не наклоняется вправо или влево, а проходит через все точки вида (a, y) .

Пример точек

Например, при $x=3$ подходят точки $(3, -2)$, $(3,0)$ и $(3,5)$. У всех них одинаковое значение x , поэтому их легко отметить на плоскости и соединить одной линией.



Горизонтальная прямая $y=b$



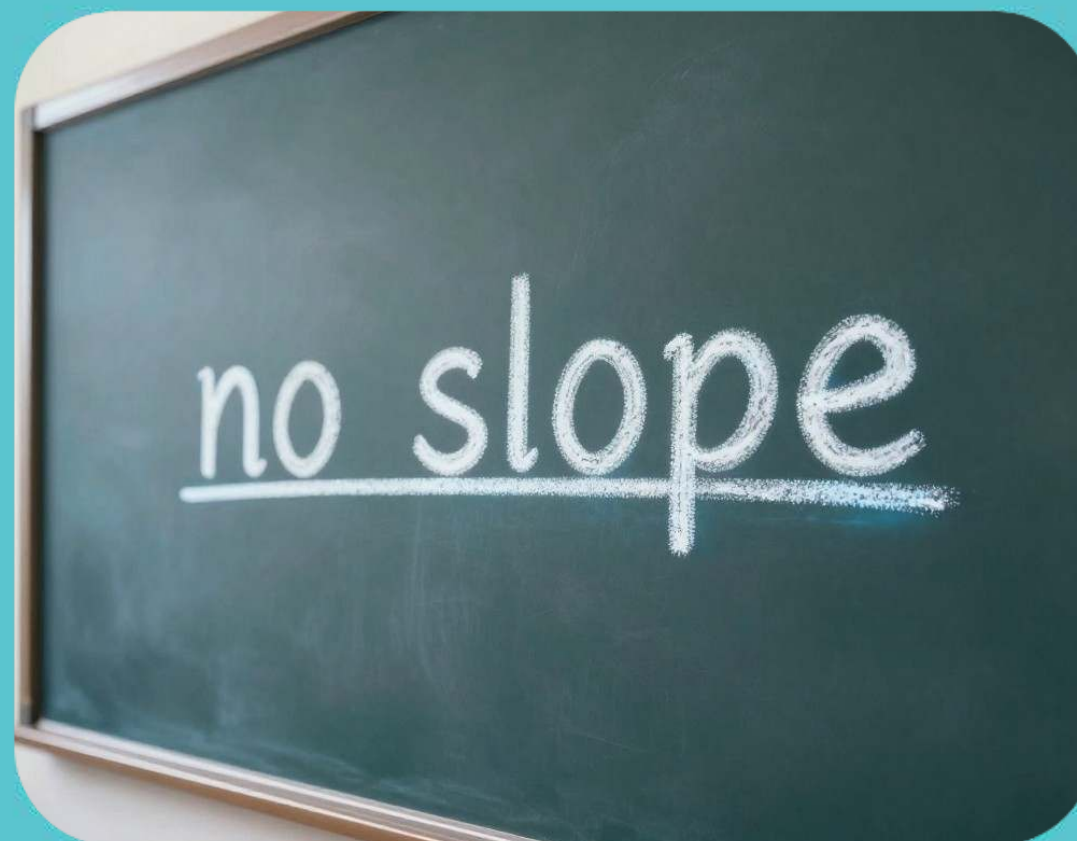
Одинаковый уровень

Когда $a=0$, из уравнения $ax+by=c$ остаётся $y=b$. Это значит, что все решения имеют одинаковую вторую координату и отличаются только значением x .



Линия без наклона

График получается горизонтальным и параллельным оси Ox . Такая прямая показывает, что величина y не меняется, даже если x становится больше или меньше.



Проверка по точкам

Например, $y=-2$ задаёт точки $(-3, -2)$, $(0, -2)$ и $(4, -2)$. Они образуют ровную линию, которую удобно проверять по постоянному значению второй координаты.



Вырожденные случаи

1. Нет решений

Иногда вместо обычного графика получается противоречие. Уравнение $0=1$ неверно при любых значениях, поэтому подходящих точек нет и на плоскости нечего изображать.

2. Подходят все точки

Если после преобразований возникает $0=0$, условие верно всегда. Тогда подходят все точки плоскости, и графиком становится вся координатная плоскость без исключений.

3. Что это означает

Эти случаи показывают, что уравнение не всегда задаёт линию или кривую. Иногда оно не имеет решений, а иногда описывает сразу бесконечно много точек.



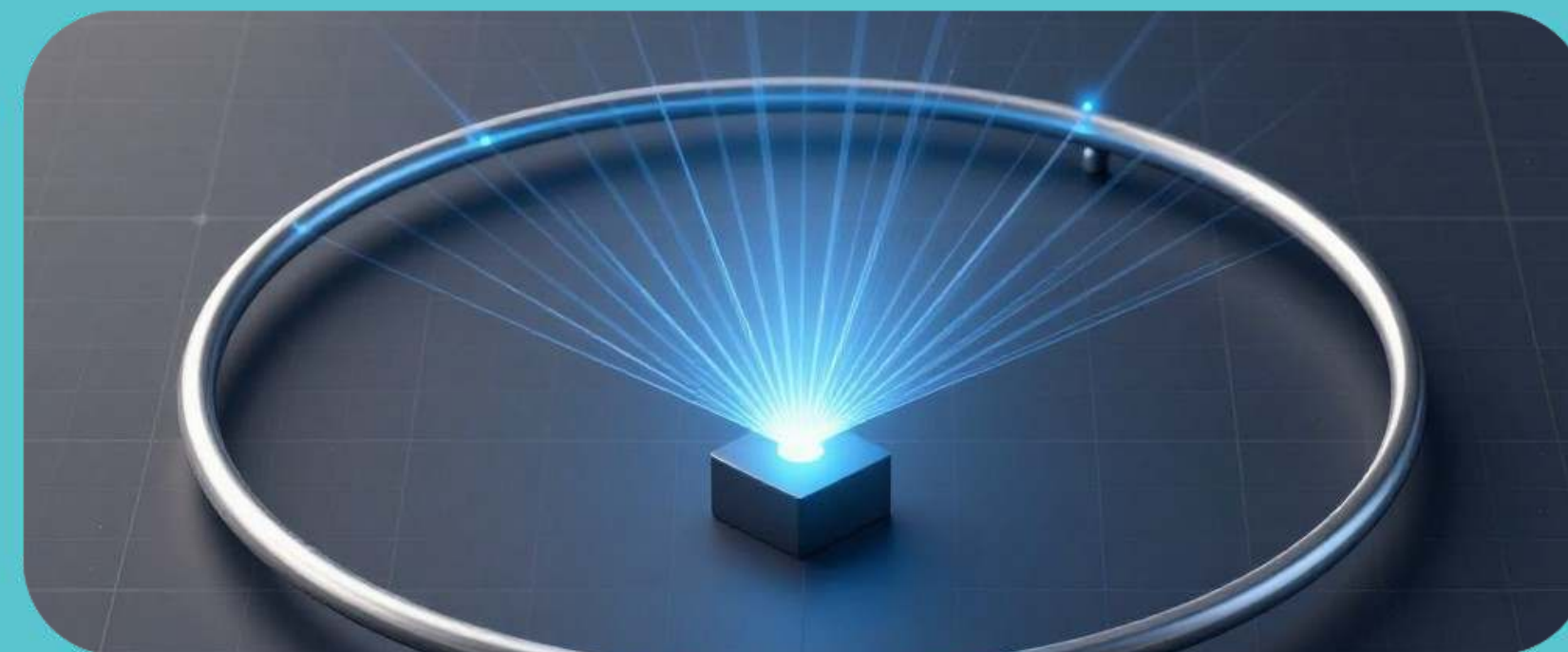
Окружность как график

Идея окружности

Уравнение $x^2+y^2=r^2$ описывает все точки, которые находятся на одинаковом расстоянии от начала координат. Это расстояние равно радиусу, поэтому график получается круглым и симметричным.

Простой пример

При $r=3$ уравнение $x^2+y^2=9$ задаёт окружность с центром в точке $(0,0)$. На ней лежат точки $(3,0)$, $(-3,0)$, $(0,3)$ и $(0,-3)$.



Построение нелинейного графика

Построение окружности по опорным точкам и симметрии



Проверка точки по уравнению

1.

Подстановка координат

Сначала подставьте координаты точки в уравнение вместо x и y . Если после вычислений получается верное равенство, точка принадлежит графику.

2.

Сравнение результата

Если равенство неверно, точка не лежит на графике. Так можно быстро проверить любую отмеченную точку без дополнительных построений и догадок.

3.

Пример проверки

Например, для $x+y=5$ точка $(2,3)$ подходит, потому что $2+3=5$. А точка $(1,1)$ не подходит, так как $1+1 \neq 5$.



Уравнение и график работают вместе



Уравнение с двумя переменными превращает числа в точки, а точки — в графики. Линейные уравнения чаще дают прямые, нелинейные — кривые. Главное — уметь подставлять, строить и проверять.