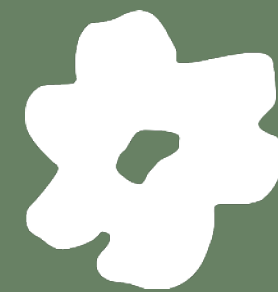


# Скалярное произведение векторов: что это и зачем нужно

Связь длины, направления и угла между векторами



# Тема, которая объединяет геометрию и вычисления

Скалярное произведение появляется после изучения векторов и помогает переходить от рисунка к точному расчёту углов, перпендикулярности и координатных задач.



# Определение скалярного произведения

## 1. Что это такое

Скалярное произведение двух векторов обозначают  $a \cdot b$ . Результат всегда является числом, поэтому эту операцию называют скалярной, а не векторной.

## 2. Формула для ненулевых векторов

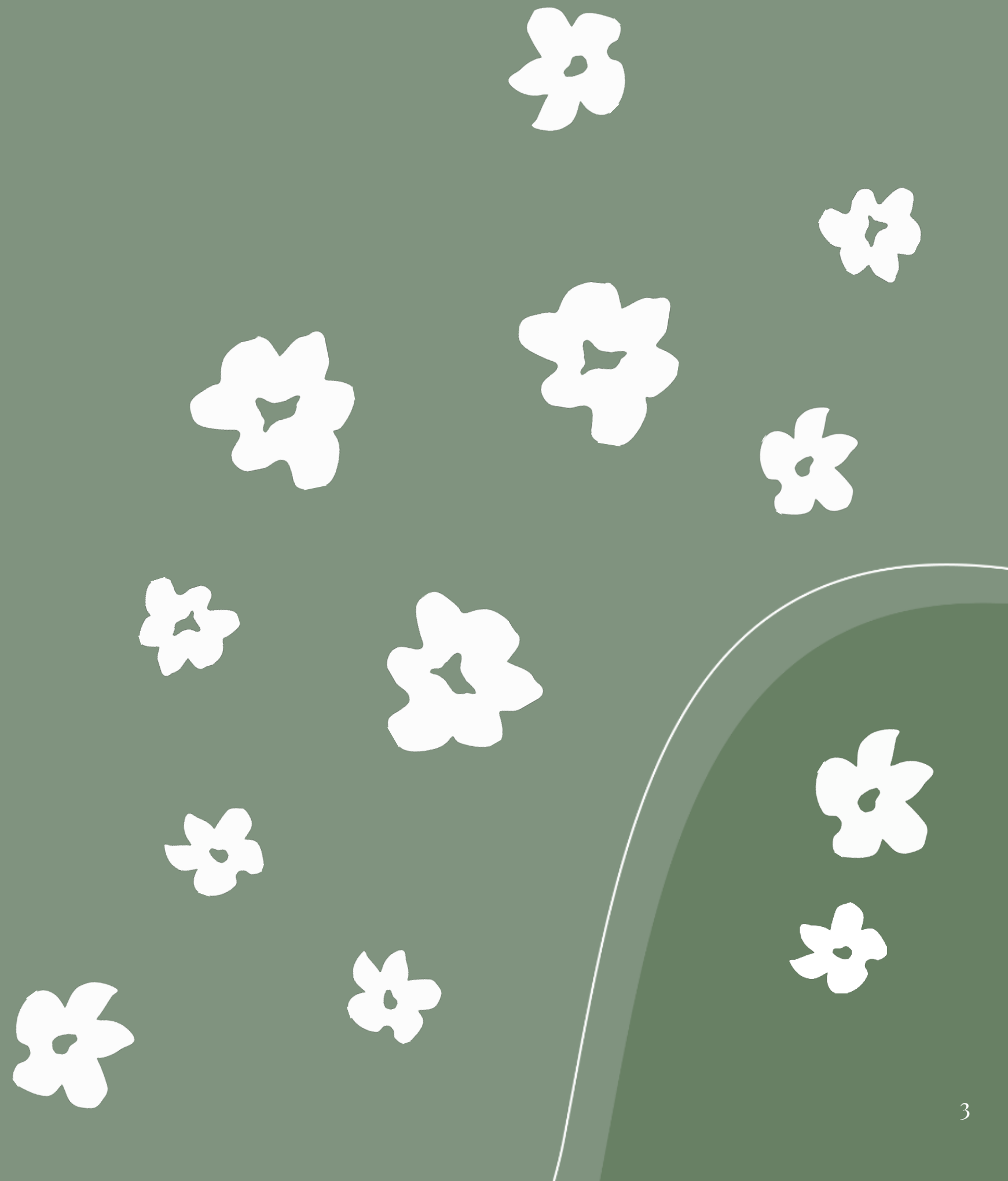
Для ненулевых векторов используют формулу  $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между ними. Она показывает роль длины и направления одновременно.

## 3. Если один вектор нулевой

Когда хотя бы один из векторов равен нулю, скалярное произведение считается равным 0. Это удобно помнить при решении задач.

## 4. Смысл результата

Если два вектора одинаково направлены, значение обычно положительное; если перпендикулярны — нулевое; если направлены «врозь», может получиться отрицательное число.



# Как знак скалярного произведения связан с углом между векторами

По знаку результата можно определить, какой угол образуют векторы.

Положительный знак соответствует острому углу, нулевой — прямому, отрицательный — тупому.

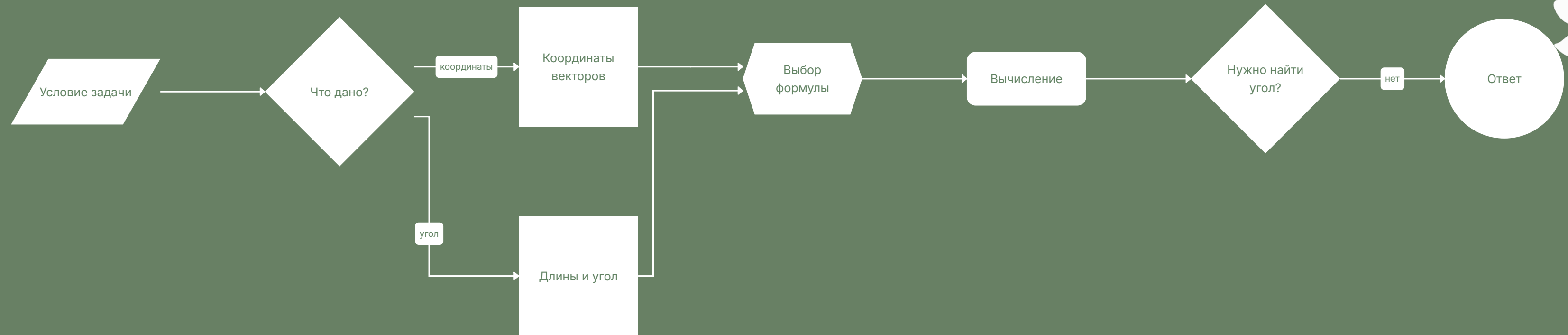
| Угол $\varphi$               | $\cos\varphi$ | $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ |
|------------------------------|---------------|-----------------------------|
| $0^\circ\text{--}90^\circ$   | положителен   | $> 0$                       |
| $90^\circ$                   | 0             | $= 0$                       |
| $90^\circ\text{--}180^\circ$ | отрицателен   | $< 0$                       |

Формула  $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi$



# Порядок нахождения скалярного произведения в задачах

Последовательность помогает выбрать нужную формулу и не потерять условие задачи.



# Основные свойства скалярного произведения



## 1. Переместительное свойство

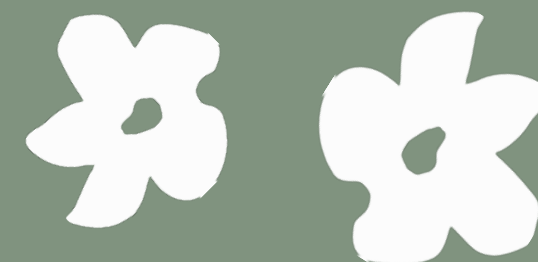
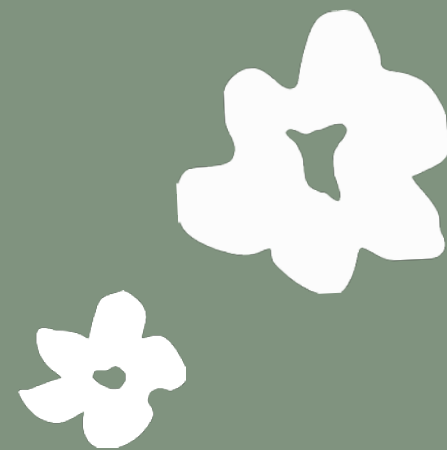
Скалярное произведение не зависит от порядка множителей:  $a \cdot b = b \cdot a$ . Это означает, что менять векторы местами можно без изменения результата.

## 2. Распределительное свойство

Для суммы векторов выполняется правило:  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ . Оно помогает раскрывать скобки и упрощать выражения в решениях.

## 3. Умножение на число

Если вектор умножают на число  $\lambda$ , то  $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b)$ . Это свойство удобно, когда в задаче появляются одинаковые или кратные векторы.



# Признак перпендикулярности векторов

## Прямой угол

Если два ненулевых вектора перпендикулярны, то угол между ними равен  $90^\circ$ , а значит  $\cos\varphi = 0$ . Поэтому их скалярное произведение тоже равно 0.

## Обратный вывод

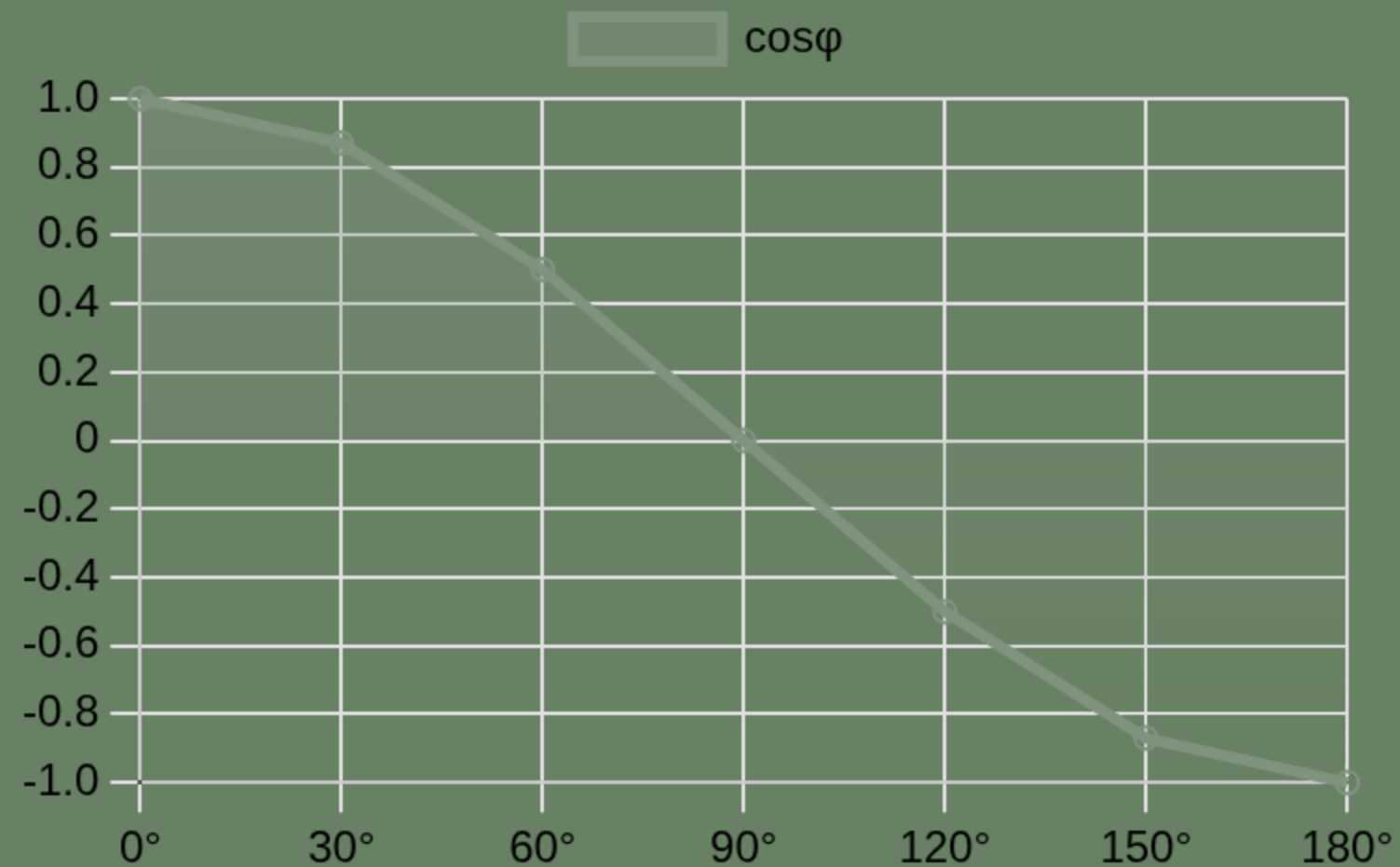
Если для ненулевых векторов  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , то они обязательно перпендикулярны. Это позволяет находить прямые углы без измерений и дополнительных построений.

## Почему это удобно

Признак особенно полезен в геометрических задачах: он помогает быстро проверить, является ли треугольник прямоугольным, или найти стороны, образующие прямой угол.



# Как меняется $\cos\varphi$ и скалярное произведение при разных углах



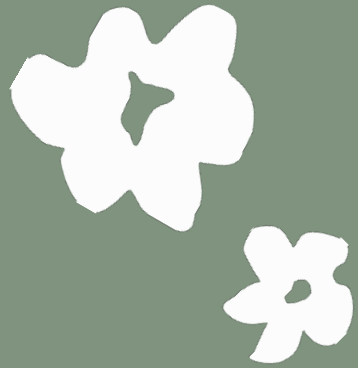
Значения  $\cos\varphi$  для углов  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$

При фиксированных длинах векторов уменьшение  $\cos\varphi$  ведёт к уменьшению скалярного произведения.

Чем больше угол между векторами, тем меньше  $\cos\varphi$ ; после  $90^\circ$  значение становится отрицательным.



# Координатная формула в плоскости



## Формула по координатам

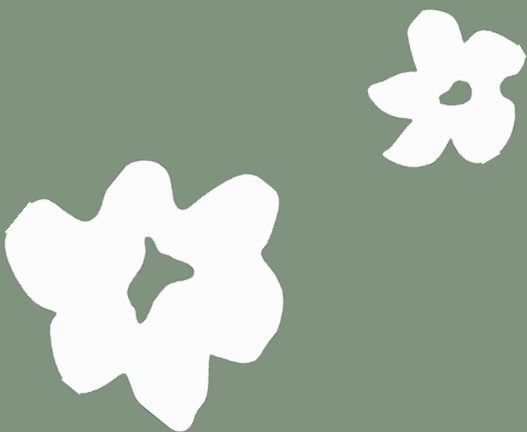
Если  $a(x_1, y_1)$  и  $b(x_2, y_2)$ , то  $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$ . Нужно просто перемножить одноимённые координаты и сложить результаты.

## Что можно проверить

С помощью формулы легко находить углы, определять перпендикулярность и сравнивать направления векторов. Поэтому она часто сокращает решение геометрической задачи.

## Где она применяется

Эта запись особенно полезна на координатной плоскости, когда известны вершины треугольника, прямоугольника или многоугольника и нужно быстро сделать вычисления.



# Координатная формула в пространстве

## 1. Три координаты

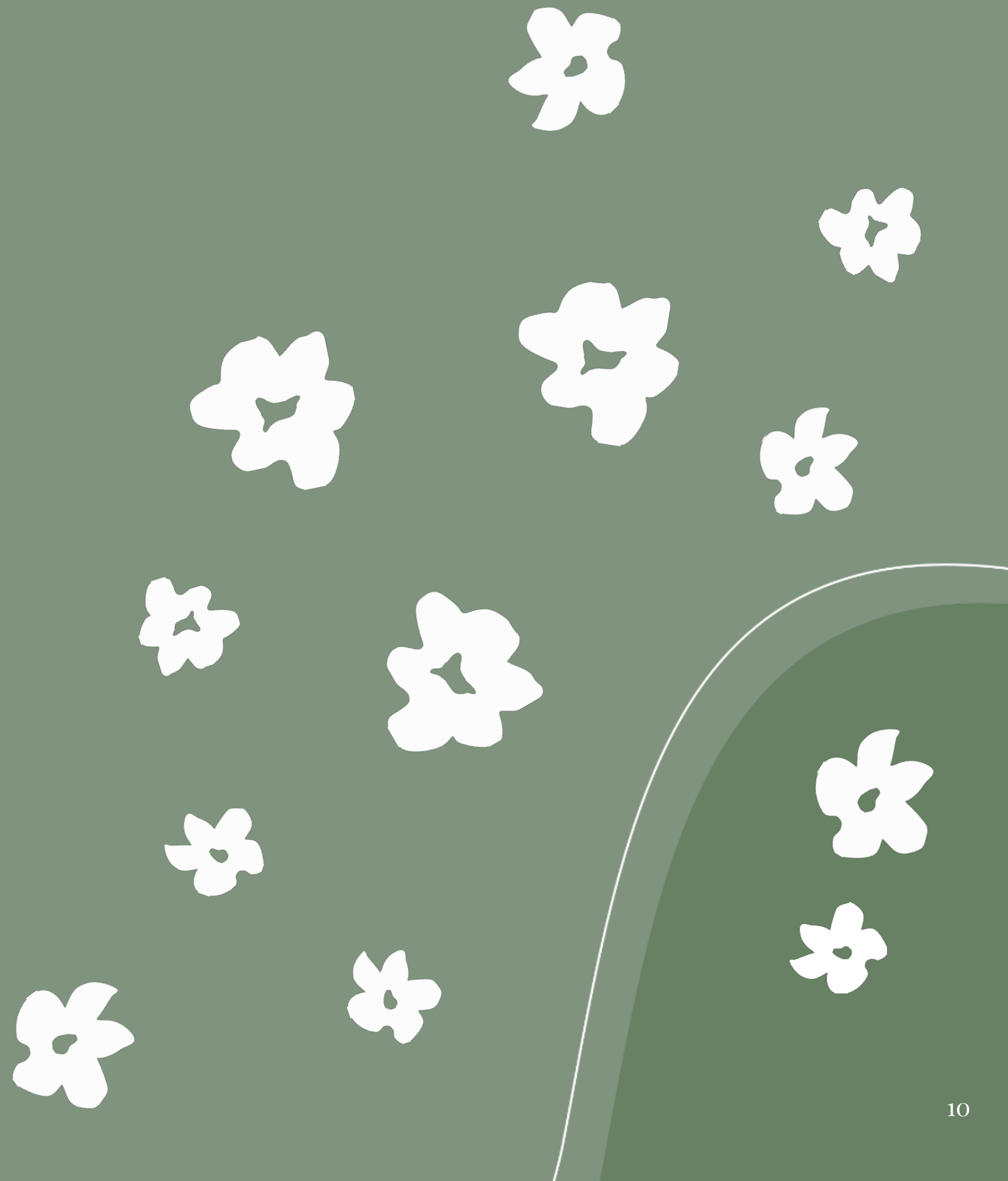
Для векторов  $a(x_1, y_1, z_1)$  и  $b(x_2, y_2, z_2)$  скалярное произведение вычисляют по формуле  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ . К двум слагаемым добавляется третье.

## 2. Где используется

Такая запись встречается в задачах с кубом, параллелепипедом и другими пространственными фигурами. Она помогает работать не только с плоскостью, но и с объёмными моделями.

## 3. Связь с плоскостью

Формула в пространстве продолжает правило для плоскости: к произведениям координат  $x$  и  $y$  добавляется произведение координат  $z$ , связанное с третьей осью.



# Два способа вычисления: через угол и через координаты

Две формулы дают одно и то же скалярное произведение, но применяются в разных условиях: по углу — в геометрических задачах, по координатам — в вычислительных.

Выбор способа зависит от данных в задаче, а не от самой темы: результат совпадает, если формула применена верно.

| Способ         | Формула                                        | Когда удобно        |
|----------------|------------------------------------------------|---------------------|
| Геометрический | $a \cdot b =  a  \cdot  b  \cdot \cos \varphi$ | Известен угол       |
| Координатный   | $x_1 \times x_2 + y_1 y_2 (+ z_1 z_2)$         | Известны координаты |

# Проекция вектора на направление другого вектора

## Что показывает проекция

Проекция говорит, какая часть вектора направлена вдоль другого направления. Если векторы образуют острый угол, проекция положительна; при тупом — отрицательна, а при прямом угле равна нулю.

## Связь с формулой

Длина проекции вектора  $a$  на направление  $b$  равна  $|a| \cdot \cos \varphi$ . Если умножить её на  $|b|$ , получается скалярное произведение, поэтому оно отражает и направление, и величину.

## Зачем это нужно

Проекция помогает быстро понять, насколько один вектор «поддерживает» другой. Это удобно в геометрии, физике и чертежах, где важно не только расстояние, но и направление действия.



# Где применяется скалярное произведение

Геометрия    Физика    Информатика  
Навигация    Архитектура    Инженерия



Скалярное произведение встречается не только в математике: оно помогает описывать направление, движение и взаимное расположение объектов в разных науках и технических расчётах.

Диаграмма показывает, что тема универсальна: основное математическое правило используется в самых разных практических областях.

*Школьный курс геометрии и прикладные задачи*

# Типичные ошибки при решении задач



## Путают с обычным умножением

Скалярное произведение — это не просто перемножение чисел. Оно зависит от длины векторов и угла между ними, поэтому нельзя подменять формулу привычным арифметическим действием.



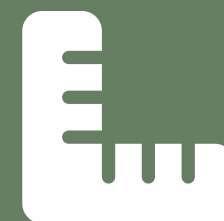
## Берут не тот угол

В формуле нужен именно угол между векторами, а не между сторонами рисунка или другими линиями. Ошибка в угле сразу меняет знак и значение ответа.



## Неверно работают со знаками

Часто забывают, что косинус острого угла положителен, прямого — равен нулю, а тупого — отрицателен. Из-за этого получают неверный знак скалярного произведения.



## Путают координаты и длину

Нельзя складывать координаты вместо их попарного умножения и нельзя подставлять длину вектора туда, где нужны его координаты. Проверка по смыслу помогает заметить такие ошибки.

# Как решать задачи на скалярное произведение

Последовательность шагов для задач на плоскости и в пространстве



# Связь со стороной треугольника и теоремой косинусов



## 1. Общая формула

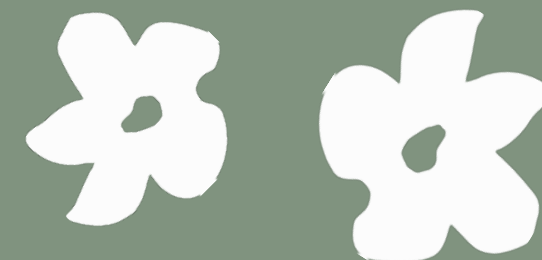
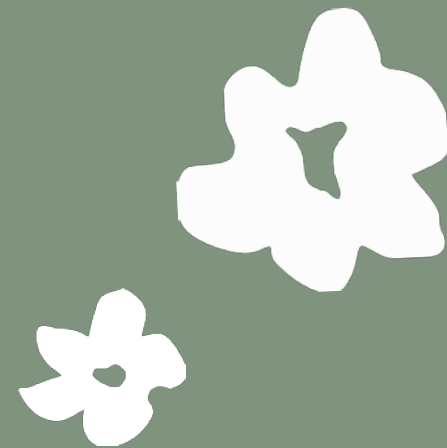
Если рассмотреть разность двух векторов, появляется выражение  $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$ . Оно показывает связь векторного подхода с обычной геометрией треугольника.

## 2. Что можно найти

По этой формуле находят сторону треугольника, если известны две другие стороны и угол между ними. При обратной задаче можно вычислить угол, если заданы все стороны фигуры.

## 3. Зачем это удобно

Такое представление объединяет несколько тем сразу и позволяет решать задачи быстрее. Вместо отдельного чертежа и длинных рассуждений часто достаточно одной аккуратной формулы.



# Скалярное произведение в физике: работа силы

## 1. Формула работы

Работа постоянной силы выражается через скалярное произведение:  $A = F \cdot s = |F| \cdot |s| \cdot \cos\varphi$ . Здесь важны и величина силы, и направление перемещения тела.

## 2. Как читать знак

Если сила направлена по движению, работа положительна. Если сила действует навстречу движению, работа становится отрицательной. При прямом угле между ними работа равна нулю.

## 3. Почему это полезно

Такая запись помогает предсказать результат ещё до вычислений. Достаточно посмотреть на угол между силой и перемещением, чтобы понять, будет ли действие полезным, мешающим или нейтральным.



# Главные формулы темы в одном месте

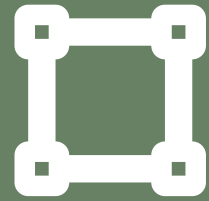
Эти записи нужны для решения разных типов задач: от простых проверок перпендикулярности до вычисления углов и работы в физике.

Все формулы описывают одну идею разными способами: через угол, координаты и проверку взаимного направления векторов.

| Запись                                         | Смысл              |
|------------------------------------------------|--------------------|
| $a \cdot b =  a  \cdot  b  \cdot \cos \varphi$ | Через угол         |
| $x_1 \times 2 + y_1 y_2$                       | В плоскости        |
| $x_1 \times 2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$             | В пространстве     |
| $a \cdot b = 0$                                | Перпендикулярность |
| $\cos \varphi = (a \cdot b) / ( a  \cdot  b )$ | Найти угол         |

*Школьный курс геометрии*

# Практическая ценность темы для задач 9 класса



## Прямые углы

По скалярному произведению можно быстро проверить, перпендикулярны ли векторы. Это особенно полезно в задачах, где прямой угол нужно обнаружить без измерения и чертёжных инструментов.



## Углы и стороны

Формула помогает находить угол между векторами и длину стороны фигуры, если известны другие элементы. Так задачи на треугольники и четырёхугольники решаются короче.



## Проекции и направления

Скалярное произведение показывает, насколько один вектор направлен вдоль другого. Это делает его удобным для задач, где важно сравнить направления, а не только расстояния.



## Координатные задачи

На координатной плоскости и в пространстве формула позволяет обходиться без сложных построений. Достаточно аккуратно подставить координаты и получить точный ответ.

# Итоги: одна формула, много задач

Скалярное произведение объединяет геометрию, координаты и прикладные задачи. Оно помогает находить углы, проверять перпендикулярность и понимать направление векторов в плоскости и пространстве.