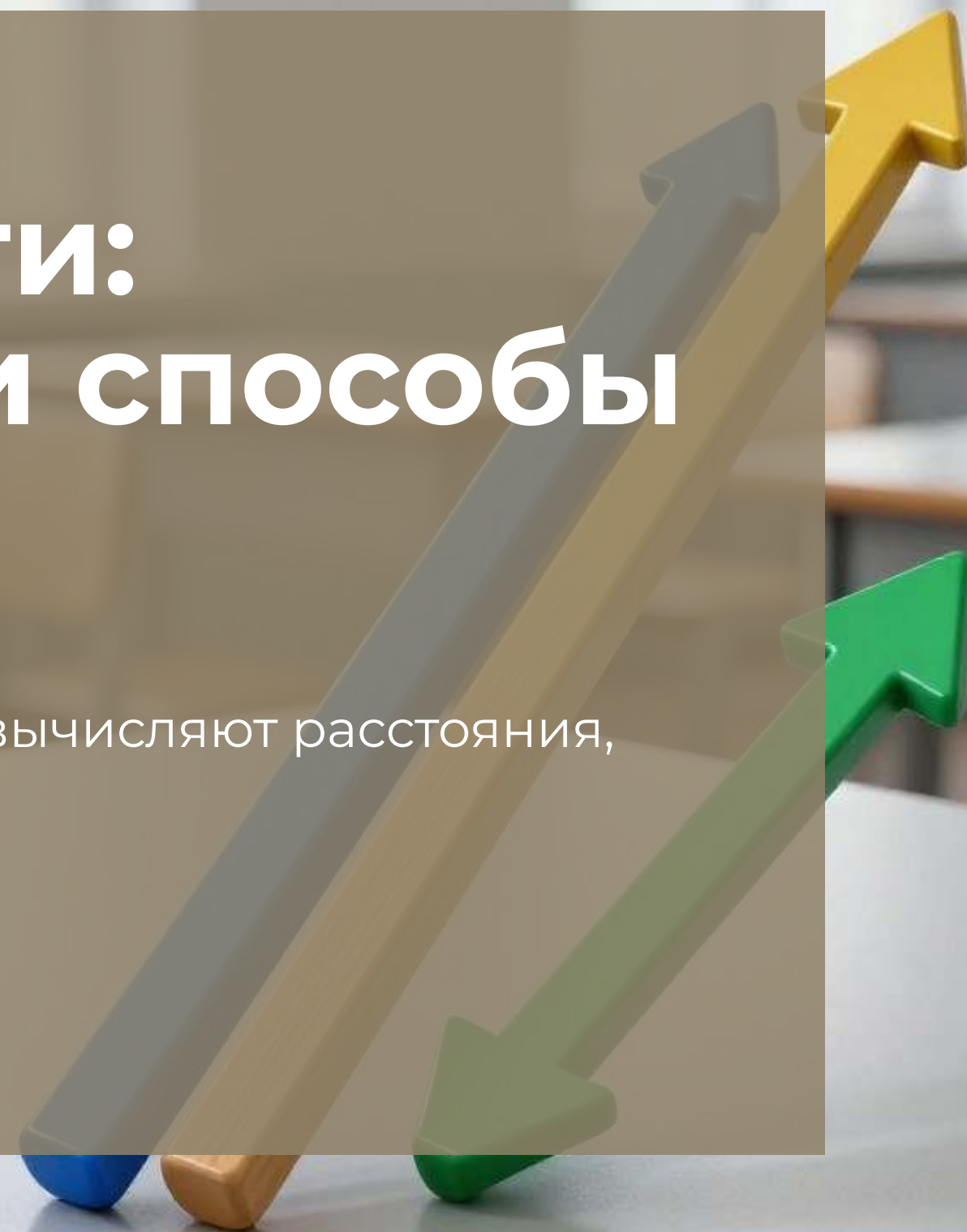


Векторы на плоскости: ключевые свойства и способы вычислений

Вектор задаёт направление и длину; по координатам вычисляют расстояния, суммы и углы в задачах.



Почему векторы важны в школьной геометрии

Векторный язык связывает геометрию и алгебру: пространственные отношения превращаются в численные формулы. Координаты помогают находить расстояния, середины, углы и проверять параллельность или перпендикулярность. В доказательствах это даёт компактные, проверяемые равенства.



Понятие вектора и его основные характеристики

Вектор обозначают стрелкой над буквой или через координаты; у него есть начало и конец. Он характеризуется длиной (модулем) и направлением, поэтому два отрезка могут быть похожи, но оставаться разными по смыслу.

Модуль вектора равен длине направленного отрезка и не зависит от того, где он расположен на плоскости. Нулевой вектор имеет длину 0: его начало совпадает с концом, а направления как определённой характеристики нет.

Сонаправленные векторы имеют одинаковое направление; в координатах они «смотрят» в одну сторону. Противоположно направленные имеют ту же длину, но меняют ориентацию: их направление противоположно, хотя величина одинакова.

Основные виды векторов и их свойства

Классифицируем векторы по признакам и связываем каждый вид с геометрическим смыслом, чтобы различать объекты не только по числам, но и по направлениям.

Ключевой вывод: для различения векторов существенны и модуль, и направление; одинаковая длина ещё не гарантирует равенство или коллинеарность.

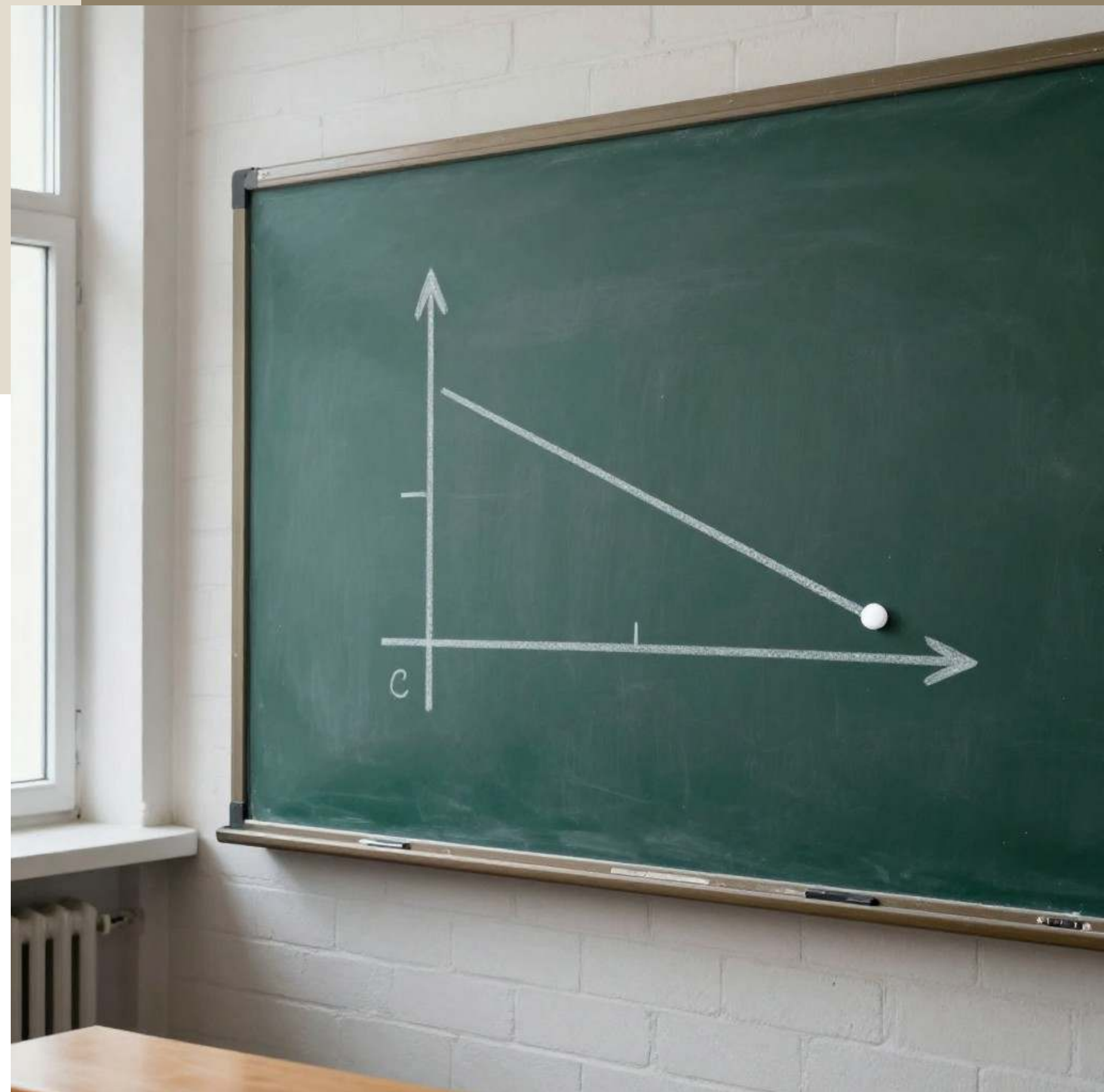
Вид	Признак	Геометрический смысл
Нулевой	$ a =0$	Начало=концу
Единичный	$ a =1$	Задаёт направление
Равные	Одинаковы длина и направление	Независимо от положения
Коллинеарные	На одной/параллельных прямых	Есть общая линия
Противоположные	Та же длина, другое направление	Разная ориентация

Школьный курс геометрии и алгебры (10 класс), общие определения

Геометрическая интерпретация вектора на координатной плоскости

На координатной плоскости вектор удобно понимать как стрелку от точки начала к точке конца. Если $A(x_1, y_1)$ — начало, а $B(x_2, y_2)$ — конец, то движение по осям напрямую считывается по расположению этих точек.

Координаты вектора находят как разность координат конца и начала: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Один и тот же вектор описывает одинаковое смещение при параллельном переносе: меняется положение фигуры, но сохраняется характер перемещения.



Координаты вектора и их вычисление

01

Если $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Этот приём переводит геометрию в алгебру: вместо рисунка работает формула.

02

Модуль вектора вычисляют по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, которая опирается на теорему Пифагора. Так длина находится без построений, только по числам координат.

03

Практически координаты позволяют контролировать совпадение направлений и длины: если у двух векторов одинаковые компоненты, они равны; если компоненты отличаются общим множителем, отношения между векторами становятся проверяемыми вычислением.

Сложение и вычитание векторов

01

Сумму двух векторов находят как совместное перемещение: по правилу треугольника или по правилу параллелограмма. В координатах это покомпонентное сложение: $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, то есть складываются соответствующие проекции.

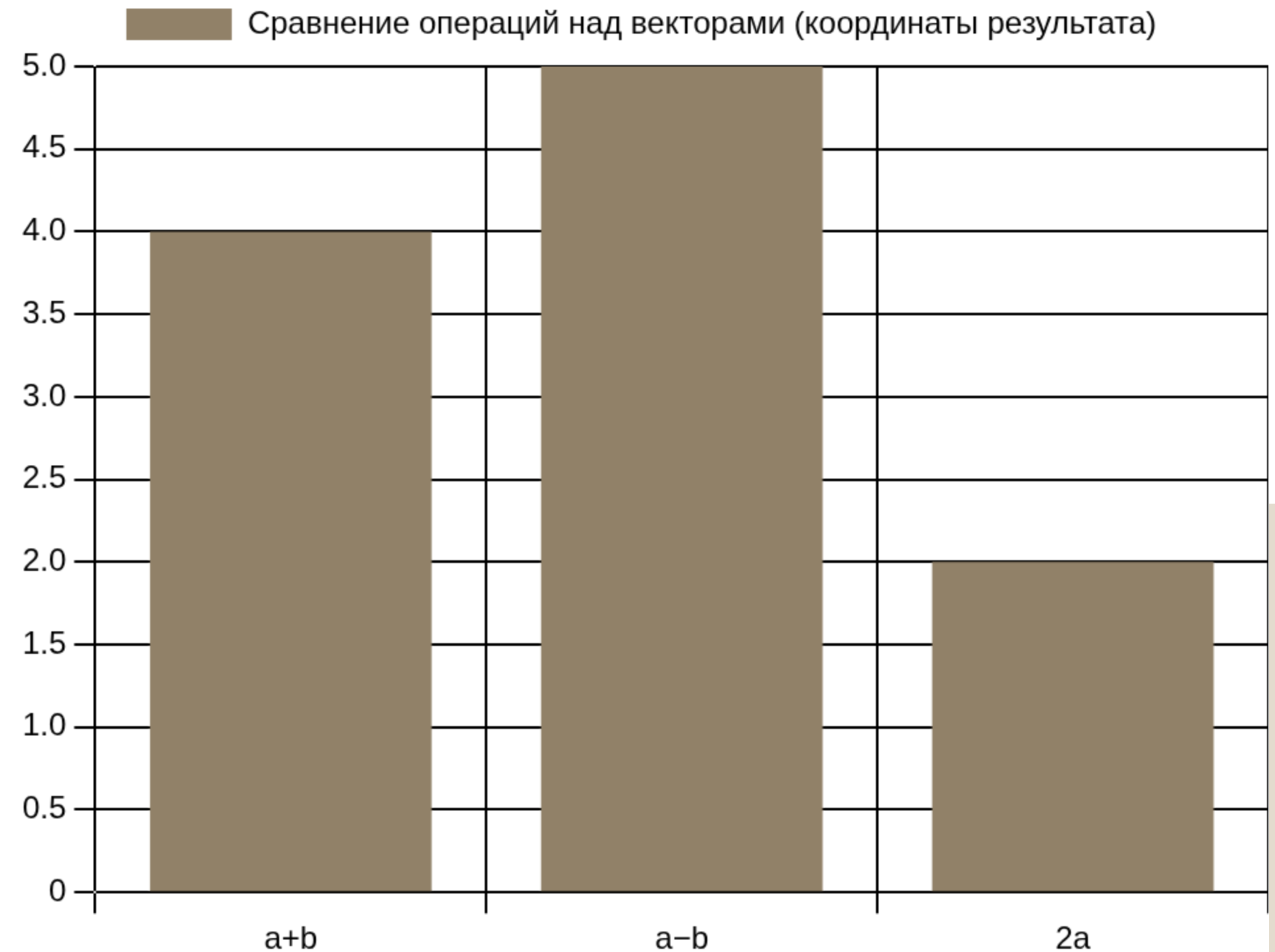
02

Разность векторов строится через прибавление противоположного: $(x_1; y_1) - (x_2; y_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. Геометрически это означает, что мы компенсируем одно смещение другим, а результат трактуем как направленное перемещение.

Сравнение операций над векторами

Диаграмма показывает, что «итог» полностью задаётся координатами: разные операции меняют компоненты по своим правилам.

Видно различие между наращиванием ($2a$), согласованным смещением ($a+b$) и компенсирующим эффектом ($a-b$): координаты дают однозначный численный контроль.



Пример из школьной практики: $a=(2;1)$, $b=(-1;3)$ (конкретные операции над заданными векторами)

0

При умножении на ноль вектор полностью «обнуляется», потому что его компоненты становятся нулевыми.

Школьный курс математики: свойства умножения вектора на число

Масштабирование меняет модуль в $|k|$ раз: при $k=0$ получается нулевой вектор, а значит исчезает и длина, и направленность.

Коллинеарные и компланарные векторы в школьных задачах



Коллинеарность по прямым

Коллинеарные векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Для ненулевых векторов это означает существование числа k , при котором $b=ka$.



Зависимость направлений и масштабов

Когда векторы коллинеарны, их направления либо совпадают, либо противоположны, а различие сводится к одному коэффициенту. Это полезно при доказательствах параллельности сторон и направлений.



Компланарность в плоских чертежах

В школьной плоскости понятие компланарности связано с тем, что рассматриваемые векторы «живут» в одной плоскости рисунка. Тогда все связи можно проверить на координатах и на чертеже.



Практика: многоугольники и координаты

Коллинеарность помогает анализировать многоугольники: если стороны выражаются пропорциональными векторами, то соответствующие линии параллельны. В координатной форме это подтверждается вычислениями.

Алгоритм решения задач с свойствами логарифмов

Шаги для преобразований: от условий к проверке результата (подходит для уравнений, упрощений и задач на область определения).



Базовые тождества и «скелет» преобразований

Частное тоже упрощается:
 $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ при $x > 0, y > 0$.
Оно особенно удобно, когда в задачах
появляется дробь или отношение
двух степенных выражений.

01

Логарифм переводит умножение в сложение: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ для $x > 0, y > 0$. Это свойство работает как для чисел, так и для выражений с переменными.

02

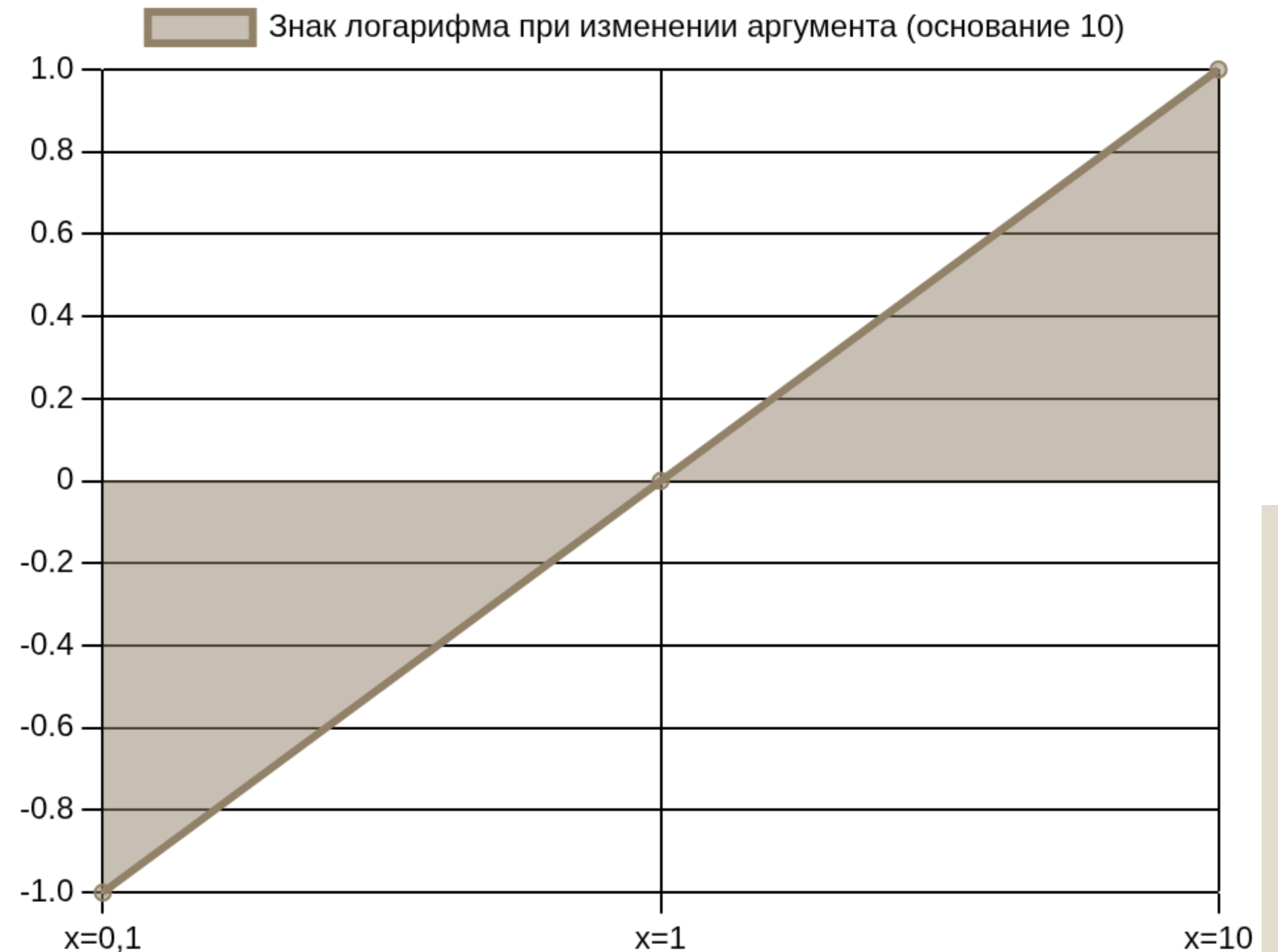
03

Степень выносится множителем: $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a x$ при $x > 0$. При этом важно аккуратно следить за знаком k и за тем, что аргумент логарифма остаётся положительным.

Когда логарифм положителен, нулевой или отрицательный

Для основания $a > 1$ знак логарифма определяется аргументом: при $0 < x < 1$ он отрицателен, при $x = 1$ равен нулю, при $x > 1$ положителен. Это помогает быстрее оценивать решения без вычислений.

Точки на графике показывают строгое возрастание $\log_{10} x$: переход через $x = 1$ меняет знак с «минус» на «плюс». Значит, при решении уравнений достаточно проверить аргументы и знак.



Пример на основании 10: $\log_{10}(0,1) = -1$, $\log_{10}(1) = 0$, $\log_{10}(10) = 1$ (вычислено по определению).

Формулы, которые чаще всего нужны

Формула	Находит/ выражает	Типичная задача
$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$	сумму логарифмов	упростить произведение
$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$	разность логарифмов	упростить дробь
$\log_a(x^k)=k\cdot\log_a x$	множитель при степени	вынести степень из аргумента
$\log_a x=\ln x/\ln a$	смену основания	преобразовать к $\ln$

Обобщение стандартных свойств логарифмов, изучаемых в школьном курсе.

Таблица «формула — что находит — типичная задача». Она закрывает большинство преобразований логарифмов в школьных задачах 10–11 классов.

Если задача содержит произведение, дробь или степень, начинать обычно стоит с соответствующего свойства; смена основания применяется, когда основания неудобны или разные.

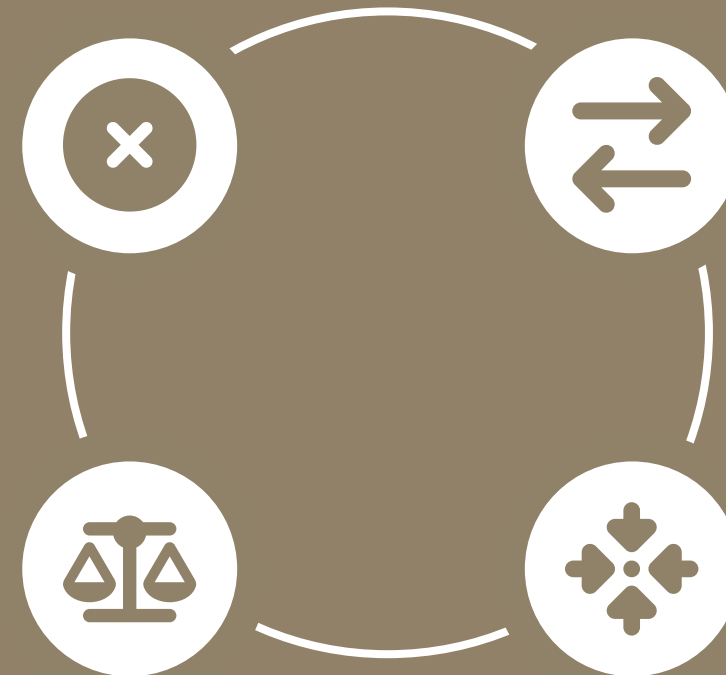
Типичные ошибки при работе с логарифмами

Игнорируют область допустимых значений

Частая ошибка — забыть, что аргумент логарифма должен быть строго положительным. Даже одно «лишнее» значение может сделать преобразование неверным и привести к посторонним корням.

Неправильно применяют правило степени

Правило $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a x$ верно при $x > 0$. Ошибка возникает, если внутри стоит выражение, которое может принимать отрицательные значения, или если забывают про знак аргумента.



Путают знаки в дробях

При $\log_a(x/y)$ многие теряют минус: вместо вычитания получают сумму. Это искажает уравнение, особенно когда затем складывают или выносят множитель.

Считают, что база всегда удобна

Ещё один промах — пытаться «сводить» логарифмы с разными основаниями без смены основания. Если $a \neq b$, сначала приводят к общему виду, иначе формулы не применимы.

Как свойства логарифмов помогают доказывать и сравнивать выражения

Если два выражения задают один и тот же логарифм, их можно привести к общей форме через свойства: разложить на сумму или разность, вынести степень, затем сравнить коэффициенты. Это превращает доказательство в аккуратное тождественное преобразование.

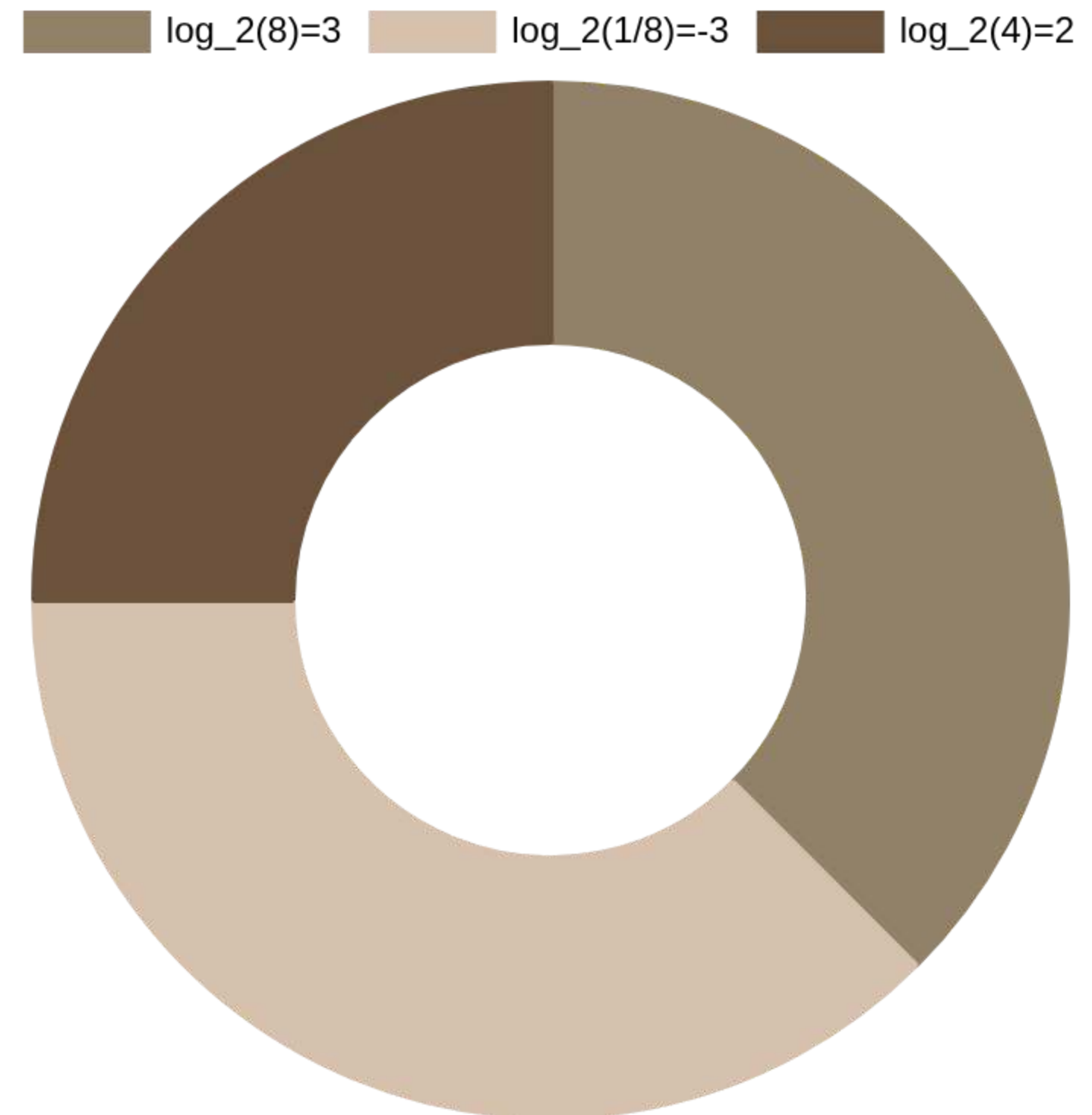
Особенно надёжно работать через «инварианты»: одинаковые аргументы с одинаковым основанием дают одинаковые значения логарифмов. Когда основания разные, сначала выполняют смену основания и только потом сокращают выражения.



Числа и знаки: как свойства проявляются на практике

На примерах с основанием 2 видно: степень в аргументе превращается в множитель, а инверсное отношение меняет знак. Эти случаи удобно использовать как «проверочные» для вывода формул.

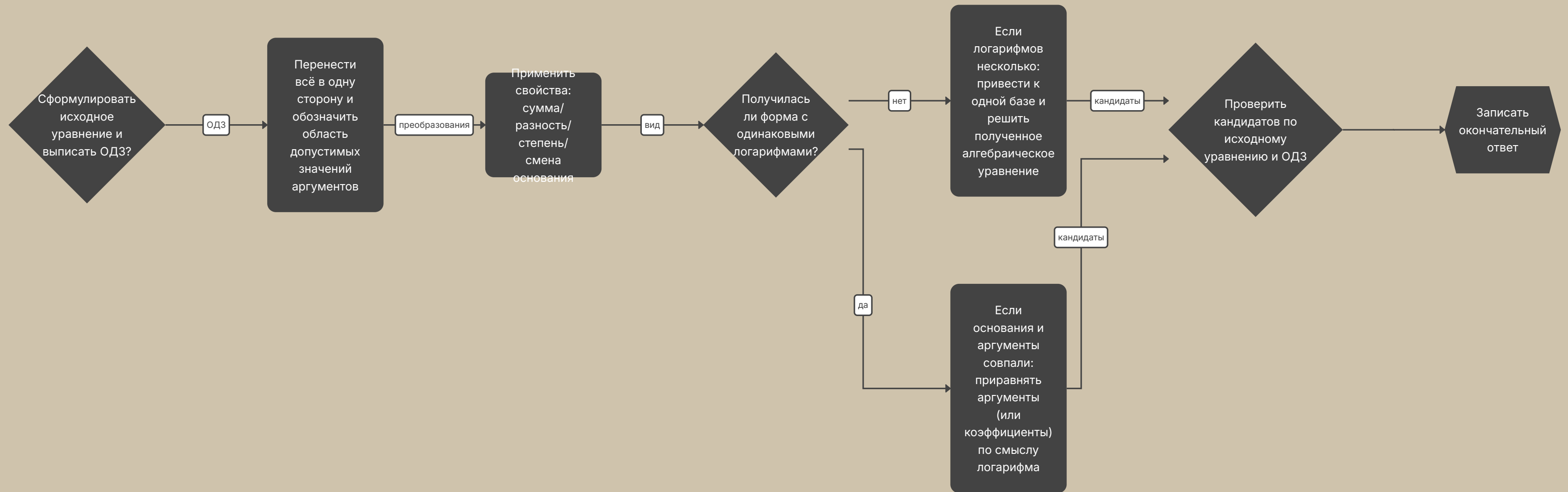
Круговая визуализация подчёркивает: одно и то же правило «степень» управляет величиной, а аргумент вида $1/x$ отвечает за изменение знака. После преобразований полезно сверять знак ответа.



Примеры: $\log_2(8)=3$, $\log_2(1/8)=-3$, $\log_2(4)=2$ (по определениям степеней $2^3=8$ и т.д.).

Алгоритм решения уравнений с логарифмами

Путь от исходного уравнения к ответу с контролем ОДЗ (области допустимых значений).



Где в жизни и в других темах нужны свойства логарифмов

В естественных науках логарифмы помогают описывать «масштабы»: радиоактивный распад, громкость звука, интенсивности в химии. Свойства позволяют преобразовывать формулы к удобному виду для вычислений.

В математике логарифмы напрямую связаны с показательной функцией: переход от степени к логарифму упрощает уравнения и позволяет строить решения через монотонность и проверки значений.

В задачах на графики и анализ часто достаточно перевести выражения к сумме/разности логарифмов, чтобы исследовать поведение функции. Это делает доказательства короче и нагляднее для старшеклассников.

Главный итог: логарифмы как «конструктор» для преобразований

Свойства логарифмов переводят сложные выражения в управляемые суммы, разности и множители. Координаты ОДЗ, правила для произведения/частного/степени и смена основания образуют набор инструментов, который делает решения точными и проверяемыми.