

# Дробные рациональные уравнения в курсе алгебры 8 класса

ОДЗ, общий знаменатель  
и проверка корней



- 
- > Почему дробные уравнения изучают отдельно

Здесь особенно важна аккуратность: сначала исключают запрещённые значения, затем преобразуют уравнение и обязательно проверяют ответ. Именно так можно избежать лишних корней и уверенно решать задачи, где неизвестное находится в знаменателе.



## > Что называют дробным рациональным уравнением

### Есть дроби

Дробным рациональным называют уравнение, в котором переменная входит в знаменатель хотя бы одной алгебраической дроби. Такие записи требуют внимательного обращения

с каждым знаменателем.

### Главное отличие

В отличие от целых уравнений, здесь нельзя сразу начинать преобразования. Сначала нужно учесть ограничения на значения переменной, иначе можно получить неверный ответ.

### Примеры записи

К этому виду относятся, например, уравнения  $1/(x-2)=3$ ,  $(x+1)/(x-4)=2/x$  и  $3/x+1/(x-1)=5$ . Во всех них переменная стоит в знаменателе.



---

## > Область допустимых значений



### Нулевой знаменатель

ОДЗ включает только те значения, при которых каждый знаменатель остаётся ненулевым. Если знаменатель обращается в ноль, выражение теряет смысл и значение переменной исключают.



### Защита от ошибок

ОДЗ помогает не потерять правильный ответ и не принять лишний. Это первый шаг решения, который делает дальнейшие вычисления безопасными и понятными.



### Запись ограничений

Для выражений  $x-3$ ,  $x+5$  и  $2x-1$  получаем ограничения  $x \neq 3$ ,  $x \neq -5$  и  $x \neq \frac{1}{2}$ . Такие условия записывают до любых преобразований, чтобы сразу отсеять недопустимые значения.

## > Алгоритм решения дробного рационального уравнения

Последовательность действий от выделения ограничений до проверки найденных корней



> Виды дробных выражений и ограничения

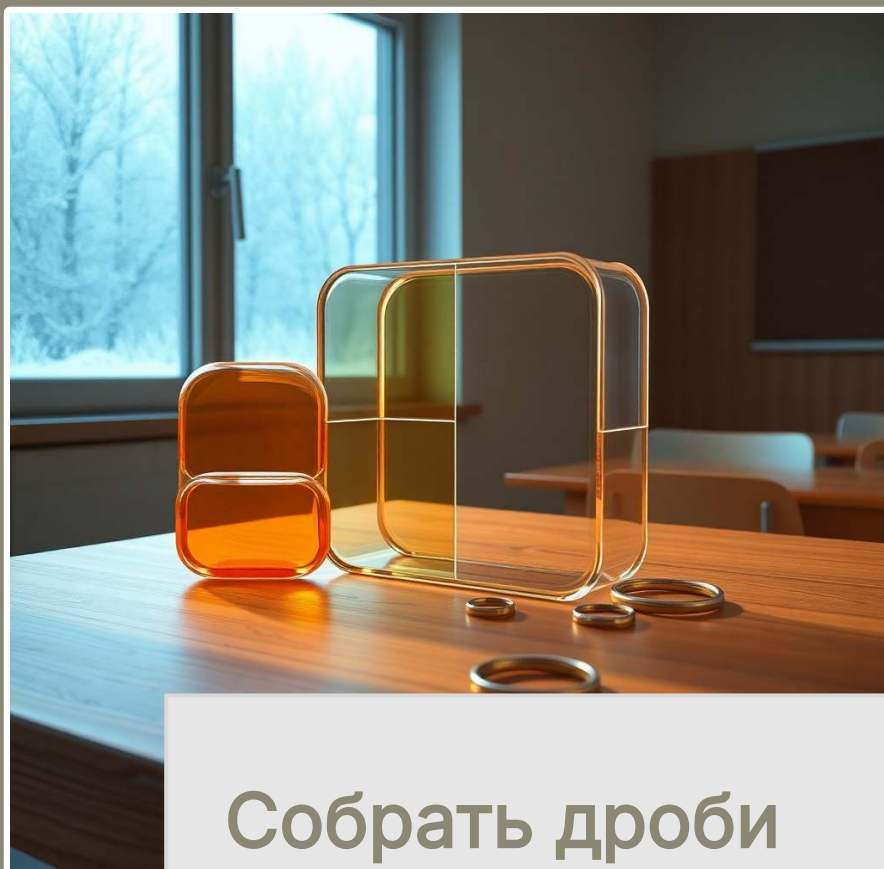
| Вид                 | Пример              | Ограничение           |
|---------------------|---------------------|-----------------------|
| Одна дробь          | $3/(x-1)$           | $x \neq 1$            |
| Сумма дробей        | $1/x + 2/(x-3)$     | $x \neq 0, x \neq 3$  |
| Уравнение с дробями | $2/(x+1) = 5/(x-4)$ | $x \neq -1, x \neq 4$ |

Три примера показывают, какие значения переменной сразу исключаются из рассмотрения.

Во всех случаях нули знаменателей запрещены, независимо от числа дробей и вида записи.

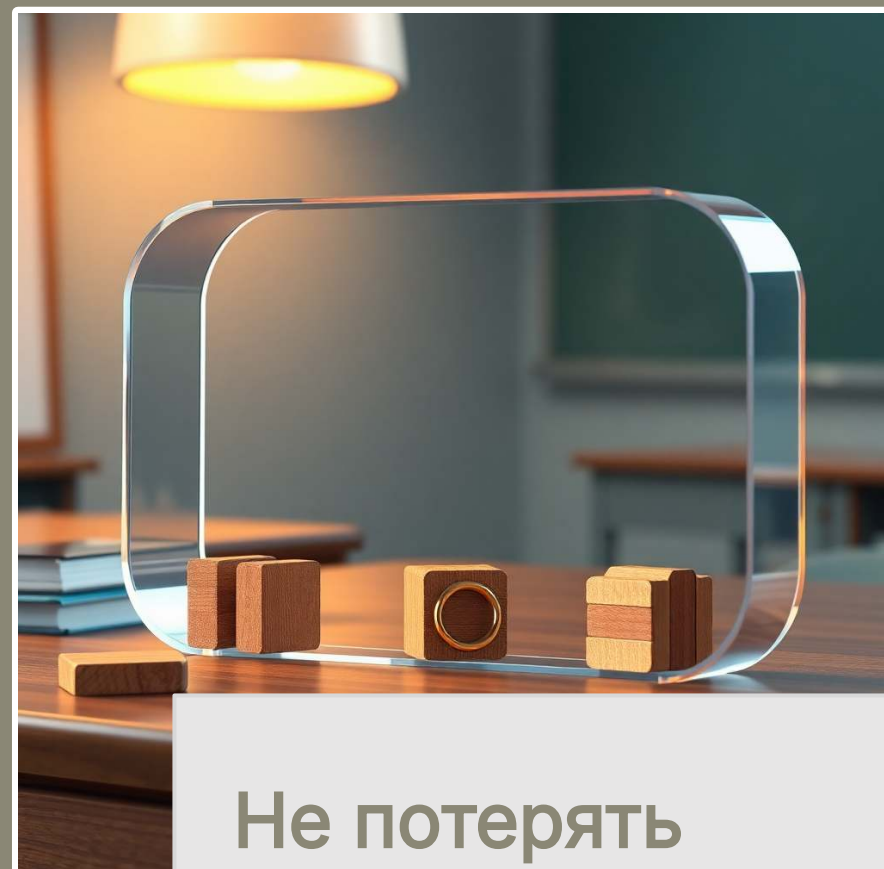
Примеры, составленные по правилам области допустимых значений

## > Зачем нужен общий знаменатель



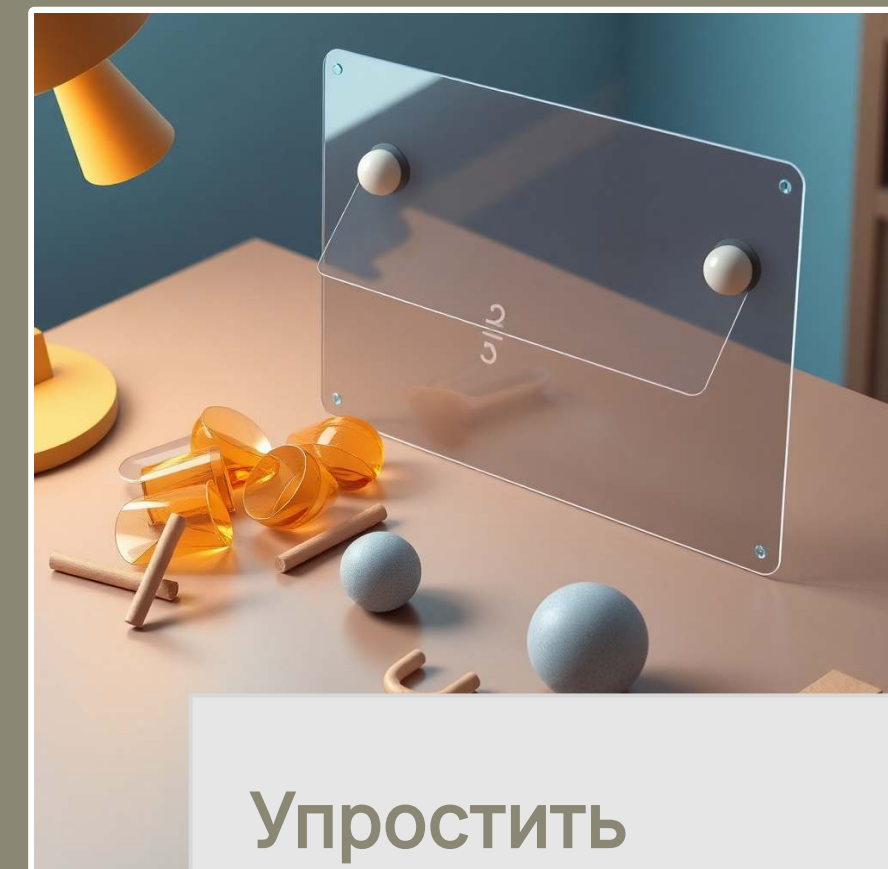
### Собрать дроби в одну запись

Общий знаменатель позволяет убрать дробные части и увидеть уравнение в более удобном виде. Например, в выражении  $1/x + 1/(x-1) = 2$  он равен  $x(x-1)$ . После умножения каждая дробь превращается в целое выражение, и решение становится проще.



### Не потерять множители

При составлении общего знаменателя важно учитывать все разные множители, которые встречаются в знаменателях. Если один и тот же множитель повторяется, его берут только один раз, чтобы не усложнять преобразование.



### Упростить дальнейший счёт

Когда дроби исчезают, остаётся обычное уравнение, которое можно решать известными способами. Это удобный момент, чтобы аккуратно раскрыть скобки и свести выражение к более простому виду.

## > Где чаще всего ошибаются при решении



Диаграмма показывает, на каком этапе чаще всего теряются баллы и почему важен каждый шаг.

Чаще всего ошибки связаны с ОДЗ и отсутствием проверки, поэтому эти этапы нельзя пропускать.

*Обобщение типичных ошибок учащихся при решении дробных рациональных уравнений*

## > Как находить общий знаменатель

### Шаг 2

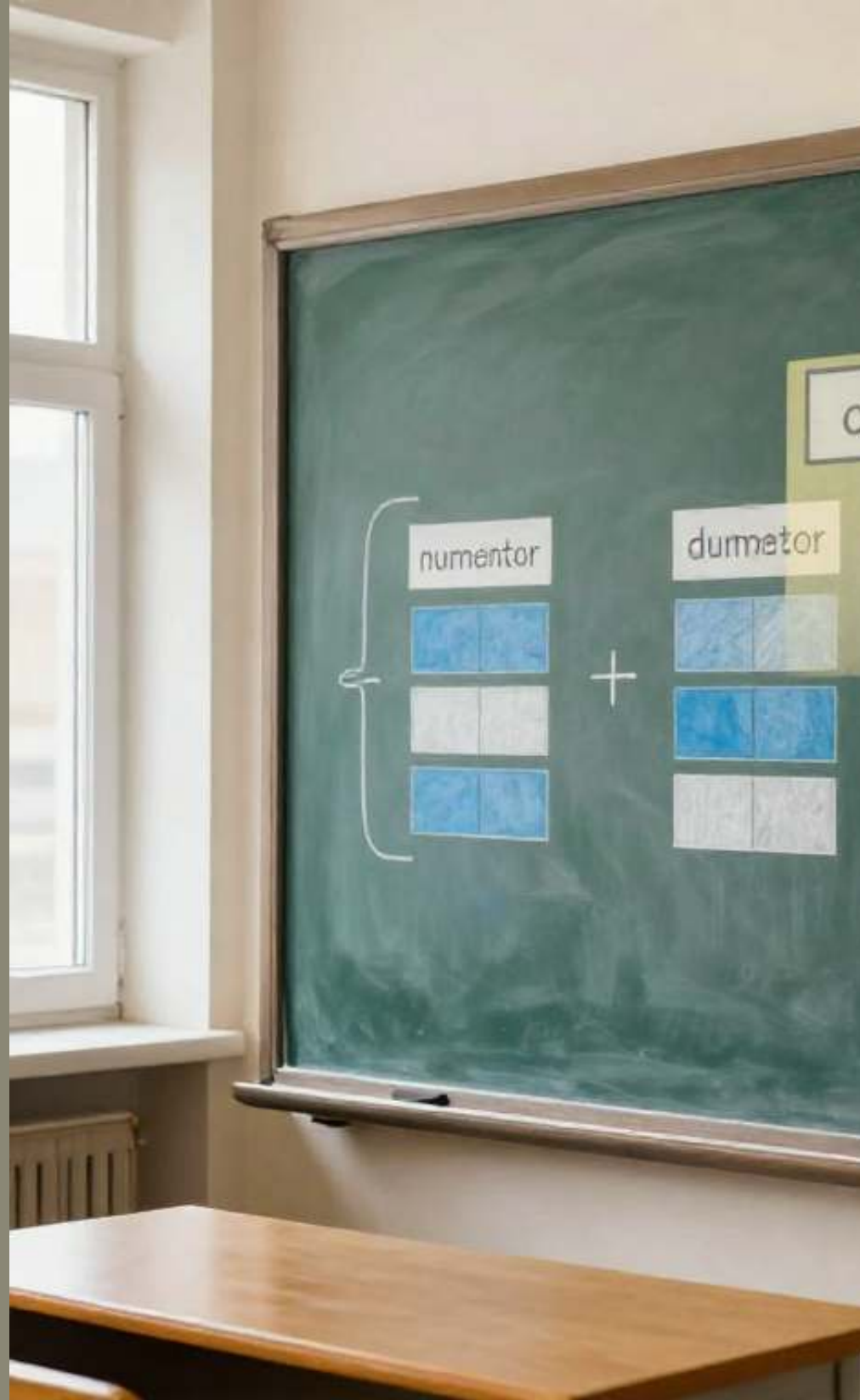
Взять каждый различный множитель один раз, а при необходимости учесть числовой коэффициент. Так получают наименьший удобный общий знаменатель.

### Шаг 1

Разложить знаменатели на множители и выделить все различные части. Это помогает увидеть, какие множители уже повторяются и какие нужно добавить.

### Шаг 3

Проверить результат на примере: для  $2/(x-1)$  и  $3/((x-1)(x+2))$  общий знаменатель равен  $(x-1)(x+2)$ .



## Дроби исчезают

После умножения обеих частей на общий знаменатель в записи больше не остаётся дробей. Уравнение превращается в обычное, с которым удобно работать дальше.

Очень важно не потерять скобки и правильно распределить множитель по каждому слагаемому. Иначе можно изменить смысл уравнения и получить неверный результат.

## Каждая дробь сокращается

У каждой дроби свой знаменатель, поэтому после умножения он сокращается, а в числителе остаётся целое выражение. Это делает преобразование уравнения и аккуратным.

Обычно после преобразования выходит линейное или квадратное уравнение. Его решают привычным способом, а затем обязательно сравнивают ответы с Од

# Что происходит после умножения на общий знаменатель

## > Примеры решений и проверка корней

| Уравнение         | ОДЗ         | Вывод       |
|-------------------|-------------|-------------|
| $1/x=2$           | $x \neq 0$  | $x=1/2$     |
| $1/(x-2)=1$       | $x \neq 2$  | $x=3$       |
| $2/(x+1)=4/(x+1)$ | $x \neq -1$ | решений нет |

Таблица показывает, что одинаковый приём преобразования может дать разные результаты: иногда получается верный ответ, а иногда — отсутствие решений. Решение всегда завершают проверкой по ОДЗ.

Найденный корень не считается ответом, пока не пройдёт проверку. Нулевой знаменатель и равенство без решений встречаются даже в простых примерах.

Примеры учебных уравнений для проверки корней

## > Посторонние корни

### Почему они появляются

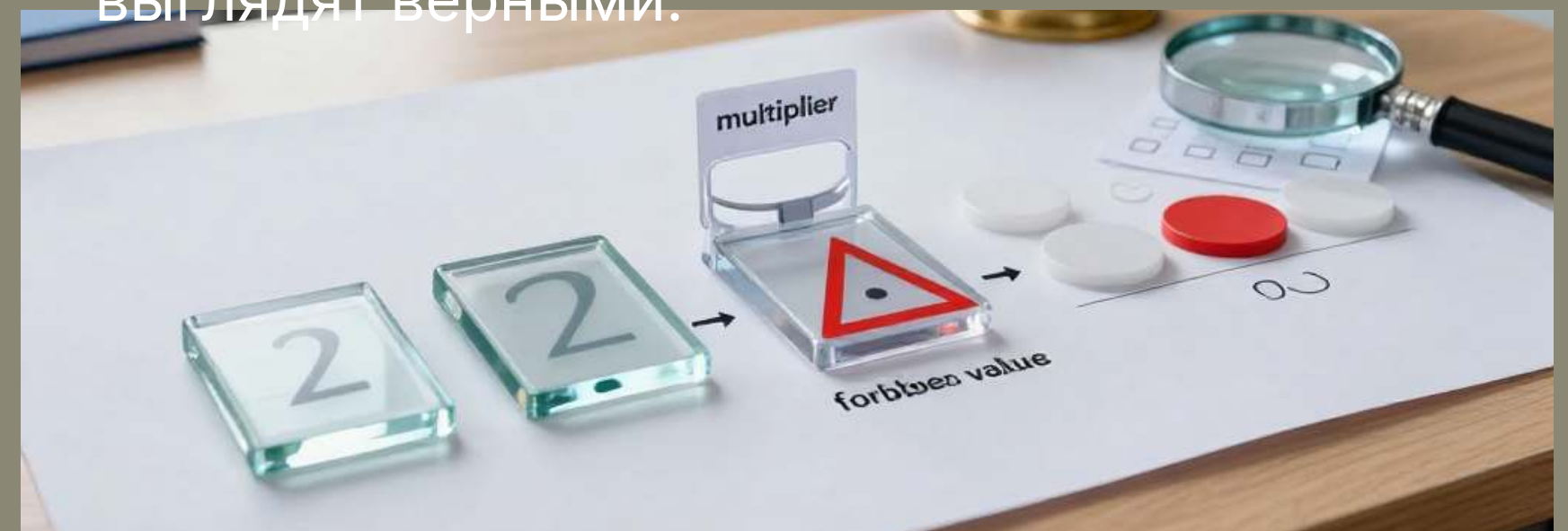
Посторонний корень возникает после преобразований, если уравнение умножили на выражение, которое может стать нулём. Формально решение найдено, но исходное уравнение ему не соответствует.

### Как избежать ошибки

Надёжная проверка — подставить каждый найденный корень в исходное уравнение и убедиться, что знаменатели не обращаются в ноль, а равенство действительно выполняется.

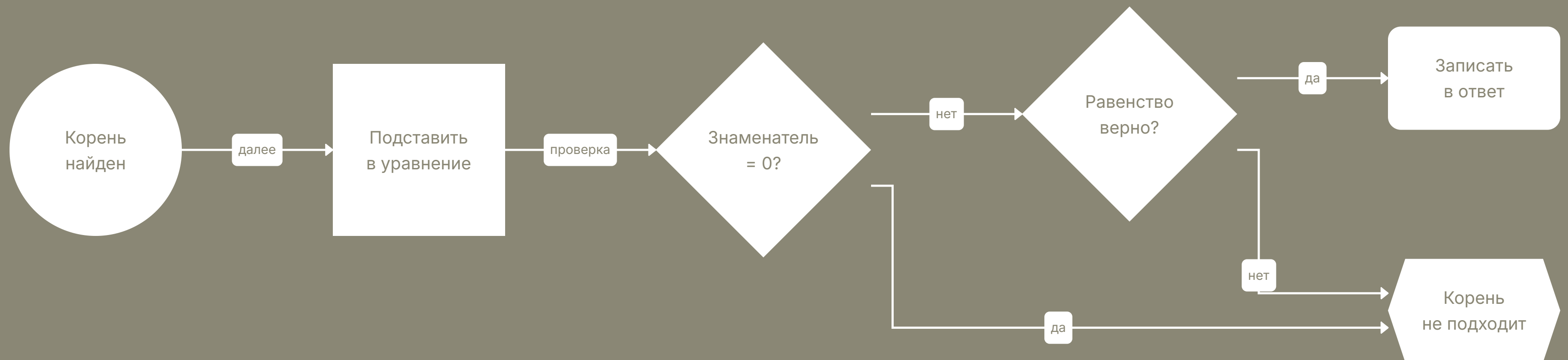
### Что показывает ОДЗ

Область допустимых значений заранее исключает запрещённые числа. Если найденный корень входит в список ограничений, он сразу исключается, даже если вычисления после преобразования выглядят верными.



## > Проверка найденного ответа

Последовательность действий при проверке корней дробного рационального уравнения



## > Связь с алгебраическими дробями

### 01 Общие правила

Дробные рациональные уравнения строятся на тех же правилах, что и алгебраические дроби: знаменатель не может быть равен нулю, а любое преобразование должно сохранять смысл выражения.

### 03 Разложение на множители

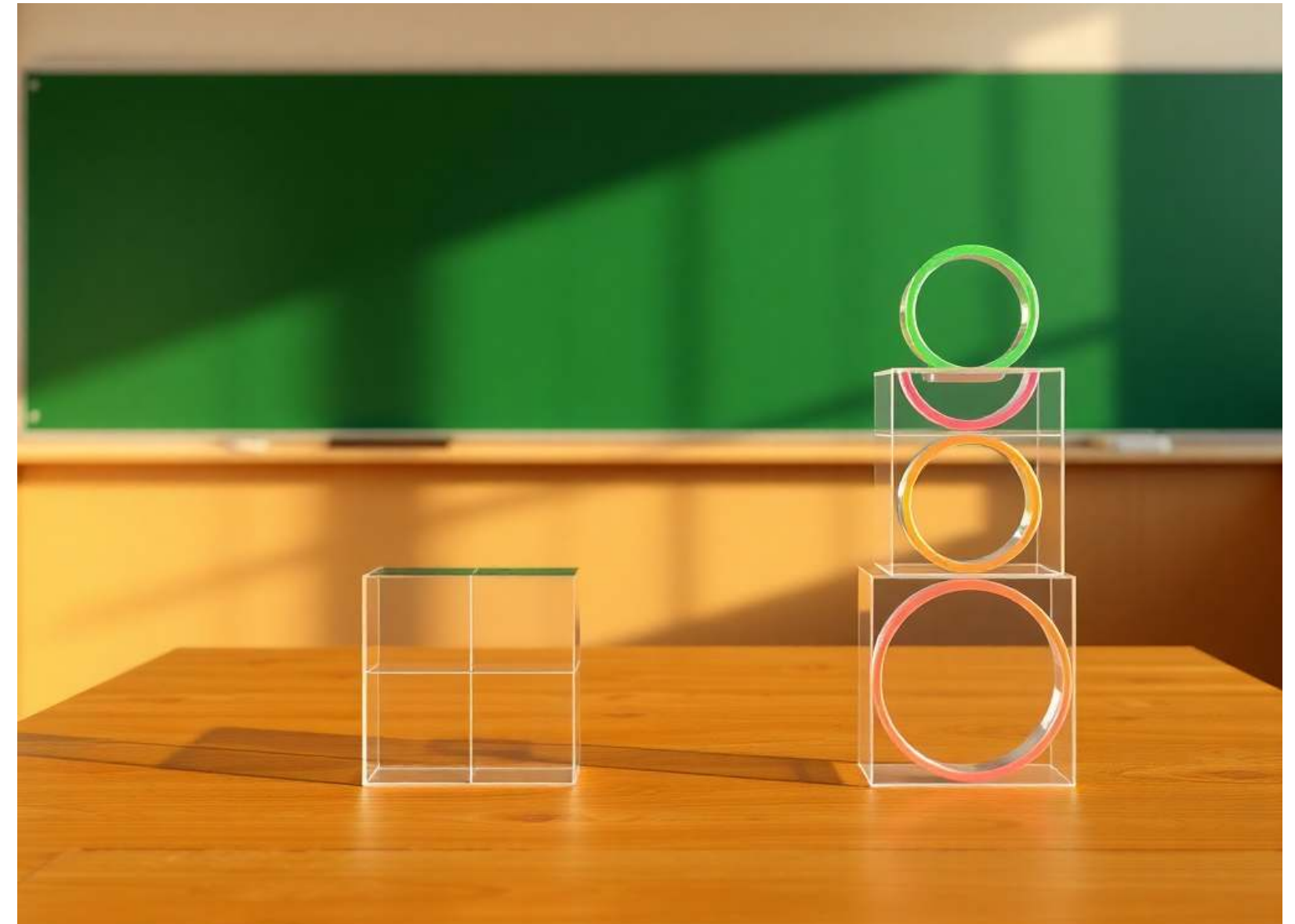
Часто знаменатель сначала раскладывают на множители, чтобы увидеть общие части. Например, выражение  $x^2 - 4$  удобно записать как  $(x - 2)(x + 2)$

### 02 Сокращение и приведение

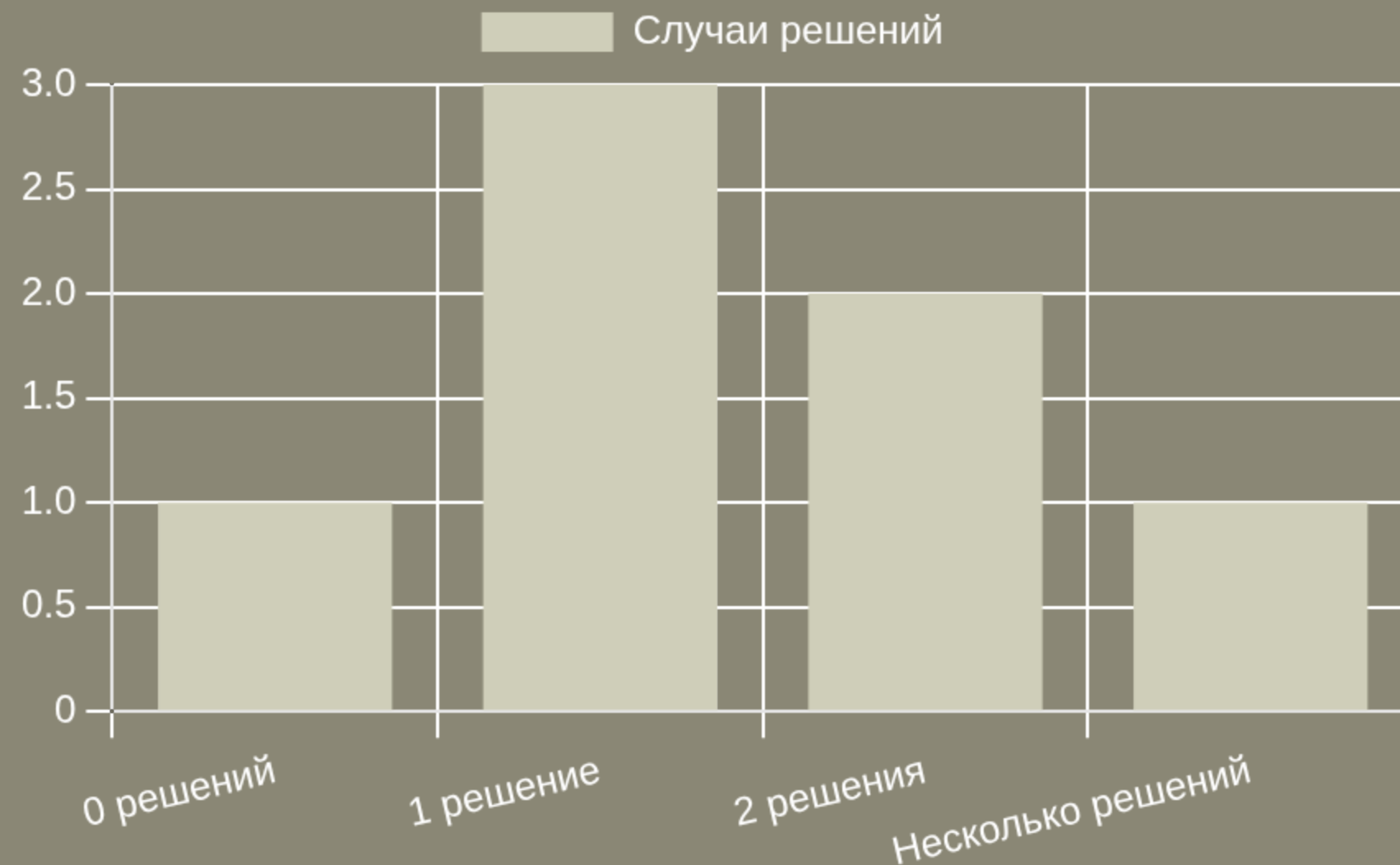
Чтобы упростить вычисления, дроби приводят к общему знаменателю и сокращают одинаковые множители. Это позволяет перейти от выражений с дробями к более удобной форме без потери равносильности.

### 04 Почему это важно

Умение работать с дробями помогает быстрее находить ограничения, выбирать общий знаменатель и проверять результат. Поэтому тема напрямую связана с навыками, которые нужны



## > Сколько решений может быть у уравнения



Число решений зависит не только от преобразованного уравнения, но и от ограничений ОДЗ. Поэтому после вычислений всегда нужна отдельная проверка каждого корня.

Иногда после всех преобразований остаются только посторонние корни, и тогда ответов нет. Чаще всего встречается один верный корень, но возможны и другие случаи.

*Учебная классификация возможных результатов при решении уравнений*

## > Текстовые задачи, которые приводят к дробным уравнениям



### Задачи на время

Если работа или движение описываются через время, неизвестное часто входит в дробь. Так появляются уравнения при расчёте, сколько часов займёт выполнение задания или путь до цели.



### Задачи на работу

В задачах на работу производительность каждого участника выражают дробью от целого объёма. Суммарная скорость выполнения помогает составить уравнение для совместной деятельности без лишних действий.



### Совместная деятельность

Когда несколько человек выполняют одно дело вместе, складывают их части работы. Неизвестным может быть общее время, за которое задача будет выполнена группой, а не одним человеком.



### Задачи на путь

В движении дробные уравнения возникают при связи скорости, времени и расстояния. Если неизвестно одно из этих значений, его удобно обозначить переменной и составить рациональное уравнение.

> Мини-шпаргалка по решению

| Шаг            | Действие         | Смысл          |
|----------------|------------------|----------------|
| ОДЗ            | исключить нули   | запреты        |
| Знаменатель    | найти общий      | убрать дроби   |
| Преобразование | решить уравнение | получить корни |
| Проверка       | подставить ответ | убрать лишние  |

Короткая последовательность действий помогает не потерять ограничения и не пропустить проверку. Каждому шагу соответствует своя цель: от исключения нулей до отбора только верных ответов.

Если пропустить хотя бы один этап, ответ может оказаться неверным. Особенно важна проверка: именно она отделяет допустимые корни от посторонних.

Алгоритм решения дробных рациональных уравнений

Три шага особенно важны: сохранять ОДЗ, не терять скобки и всегда проверять найденный корень. Именно на этих местах ученики чаще всего ошибаются.

3

ключевых правила помогают избежать самых частых ошибок при решении дробных рациональных уравнений.

*Анализ типичных ошибок при решении дробных рациональных уравнений*



### 01 Разложение на множители

Чтобы находить общий знаменатель и упрощать дроби, нужно уверенно раскладывать многочлены на множители. Этот навык помогает видеть общие части выражений и сокращать их без ошибок.

### 02 Формулы сокращённого умножения

При преобразовании знаменателей часто используются знакомые формулы, например разность квадратов. Они ускоряют вычисления и помогают быстрее находить удобный вид выражения для решения.

### 03 Уравнения и неравенства

После устранения дробей задача часто превращается в линейное или квадратное уравнение, а позже похожие приёмы применяются и в неравенствах. Поэтому тема готовит к более сложным разделам.

### 04 Текстовые задачи и функции

Навык работы с дробями нужен в задачах на движение, работу и совместную деятельность, а также при преобразовании формул и изучении функций. Проверка ответа полезна в любой из этих тем.

# Связь темы с другими разделами алгебры

---

> Дробные уравнения решаются по одной схеме

Если помнить про ОДЗ, общий знаменатель, преобразование и проверку, дробные рациональные уравнения становятся понятной задачей, а не набором случайных действий. Главное — не торопиться с ответом.