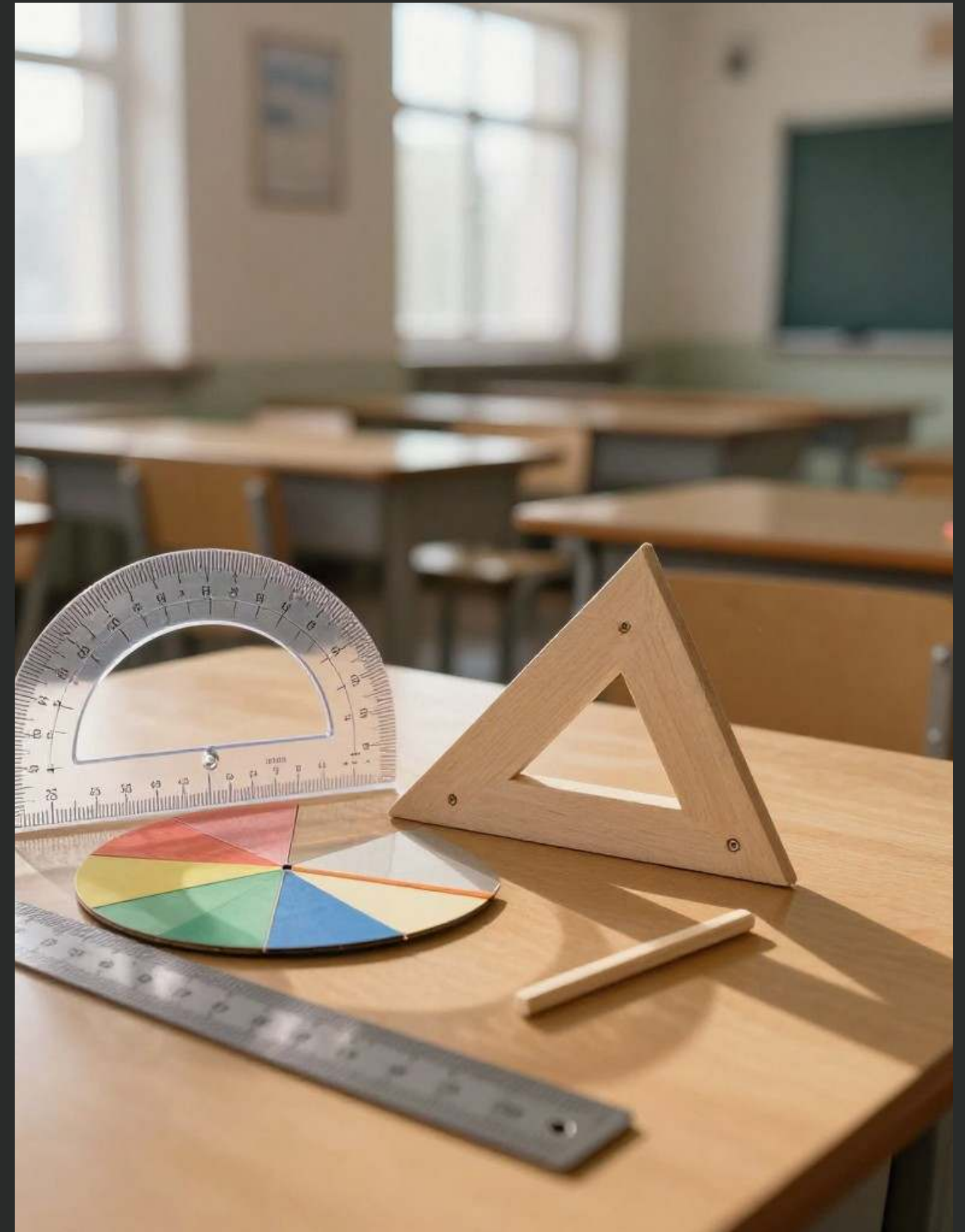


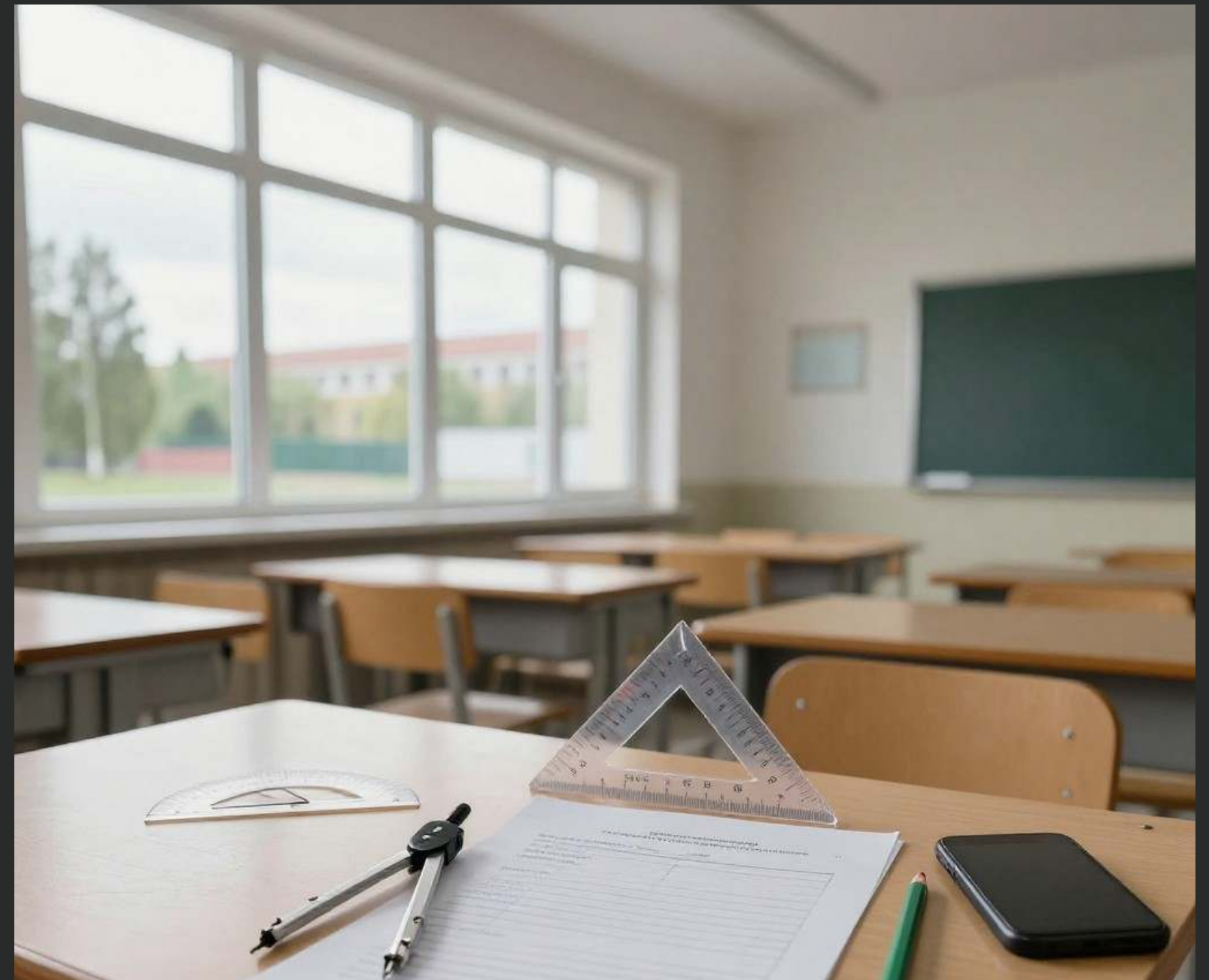
Тригонометрические функции углов: основа решения геометрических задач

Угол становится числом, а стороны — понятными отношениями.



Почему тригонометрия важна в 9 классе

Тема продолжает изучение прямоугольного треугольника и готовит к работе с координатной плоскостью. Она помогает находить высоты, расстояния и наклоны без прямого измерения.



360°

— это полный оборот, с которого начинается понимание всех остальных углов.

Градусная мера показывает, насколько сильно повернулись лучи относительно исходного положения.

Прямоугольный треугольник как основа тригонометрии

Гипотенуза

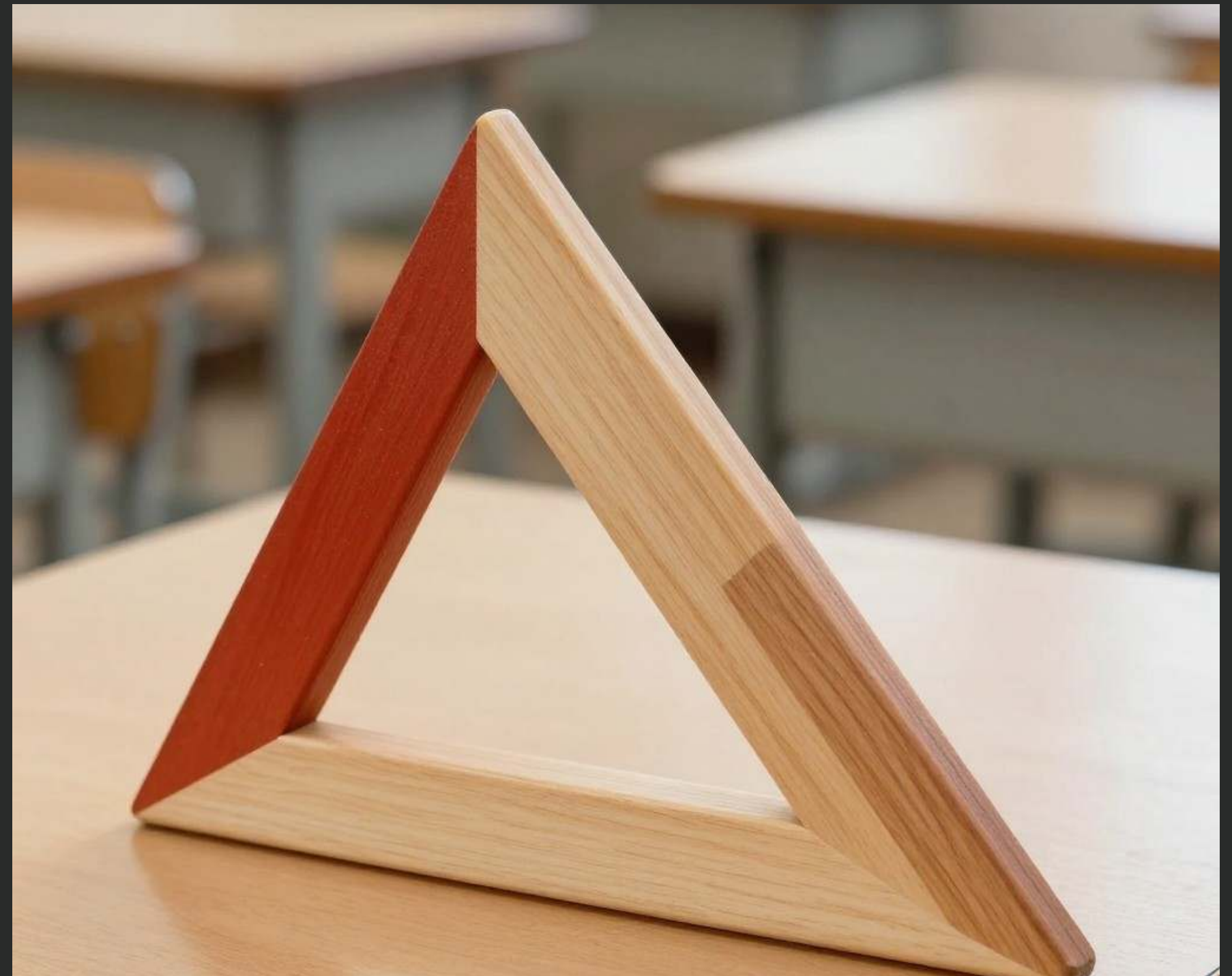
Это самая длинная сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла. Именно с ней сравнивают катеты при определении синуса и косинуса.

Катеты относительно угла

Для выбранного острого угла один катет находится напротив него, а другой прилегает к нему. От этого выбора зависит, какую тригонометрическую функцию нужно использовать.

Основа вычислений

Зная стороны и угол, можно находить неизвестные длины, проверять построения и решать задачи, где прямое измерение неудобно или вовсе невозможно.



Определения основных тригонометрических функций

Функция	Определение
$\sin \alpha$	противолежащий / гипотенуза
$\cos \alpha$	прилежащий / гипотенуза
$\operatorname{tg} \alpha$	противолежащий / прилежащий
$\operatorname{ctg} \alpha$	прилежащий / противолежащий

Определения для прямоугольного треугольника из школьного курса геометрии

Тригонометрические функции выражаются через отношения сторон прямоугольного треугольника.

Функции не задают длину стороны напрямую, а показывают её отношение к другой стороне.

Почему значения зависят только от угла



Подобные треугольники

Если острые углы равны, то прямоугольные треугольники подобны. Их стороны отличаются только масштабом, а не формой, поэтому сравниваемые отношения остаются одинаковыми.



Постоянные отношения

Для одного и того же угла отношение противолежащего катета к гипотенузе не меняется. Так же стабильны косинус, тангенс и котангенс, независимо от размера треугольника.



Масштаб не влияет

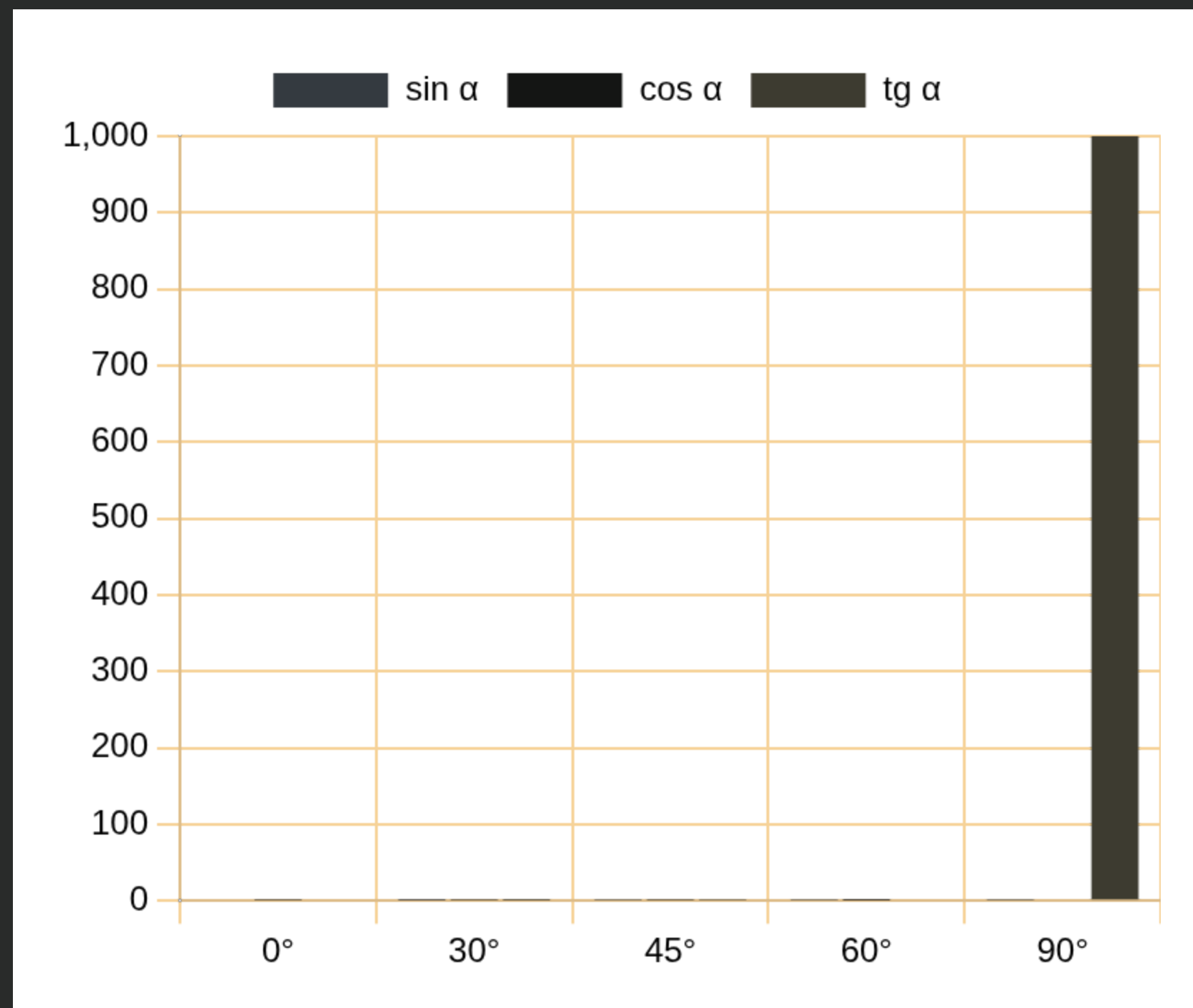
Увеличение или уменьшение рисунка не меняет сам угол. Поэтому значения функций определяются не длинами сторон, а только величиной выбранного острого угла.



Удобство вычислений

Такое свойство позволяет использовать готовые значения функций в разных задачах. Достаточно знать угол, чтобы восстановить нужное отношение сторон без измерения всех деталей.

Значения функций для основных углов



Синус и косинус меняются постепенно и имеют удобные табличные значения. Тангенс растёт особенно быстро при приближении к прямому углу.

Углы 30°, 45° и 60° чаще всего используют как опорные: их значения легко сравнивать и запоминать.

Стандартные значения тригонометрических функций для углов 0°, 30°, 45°, 60° и 90°

Когда тангенс и котангенс не существуют

Тангенс и косинус

Тангенс выражается как отношение синуса к косинусу. Если косинус равен нулю, деление невозможно, поэтому функция не определяется в этой точке.

1

Котангенс и синус

Котангенс строится как отношение косинуса к синусу. Когда синус равен нулю, получить значение нельзя, и функция также не имеет смысла.

2

Школьный вывод

В геометрии это особенно заметно для углов 90° и 0° . Именно поэтому при решении задач важно сразу проверять, можно ли применять нужную формулу.

3

Как решить задачу на нахождение стороны

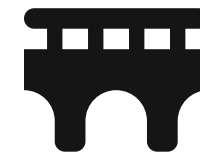
Алгоритм строится от данных величин к выбору функции и проверке ответа.

Примеры практических задач из реальной жизни



Высота объекта

По углу подъёма можно найти высоту дерева, здания или мачты, если известны расстояние до основания и одна опорная сторона в построенной модели.



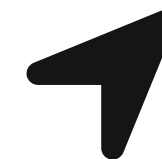
Ширина реки

Когда подойти к другому берегу нельзя, тригонометрия помогает вычислить ширину по измеренной базе и углу наблюдения с доступной точки на местности.



Строительство крыш

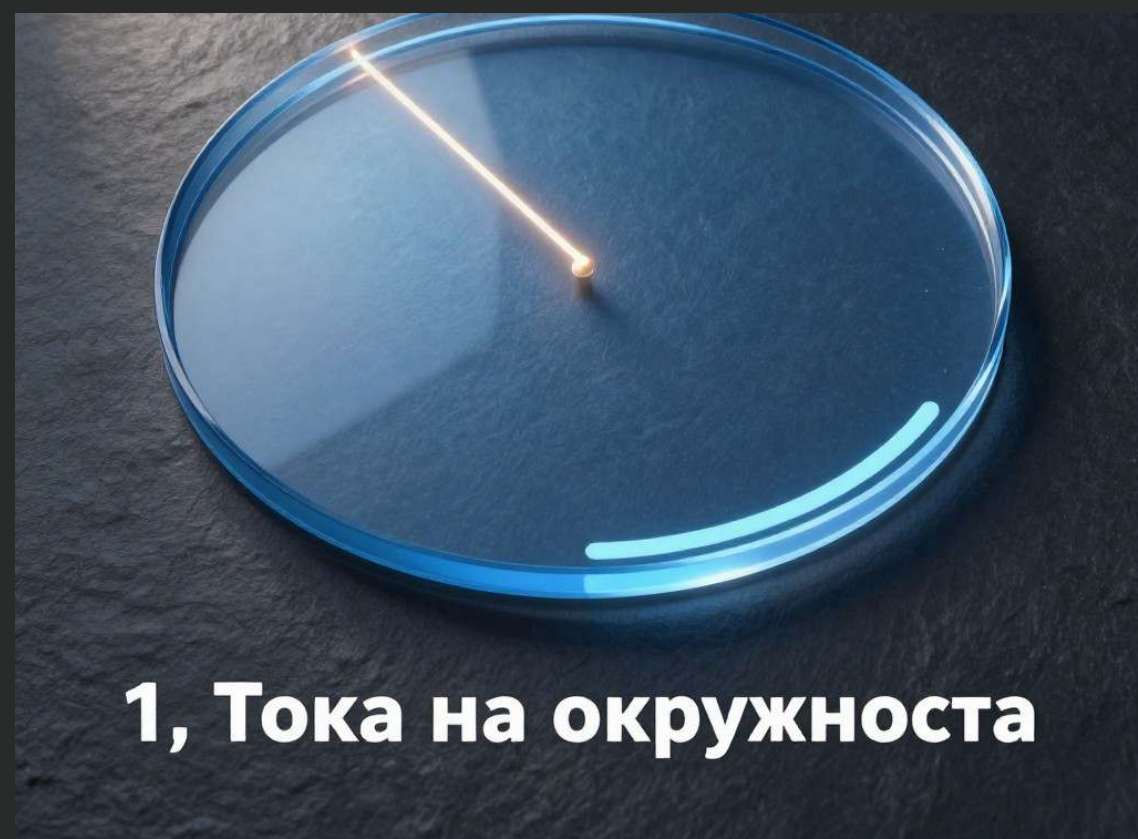
При проектировании крыши по углу наклона рассчитывают длину стропил и проверяют, как будут соотноситься высота, пролёт и материал конструкции.



Навигация и маршрут

В навигации функции помогают определить направление движения и расстояние до объекта. Это удобно при работе с картой, компасом и координатами.

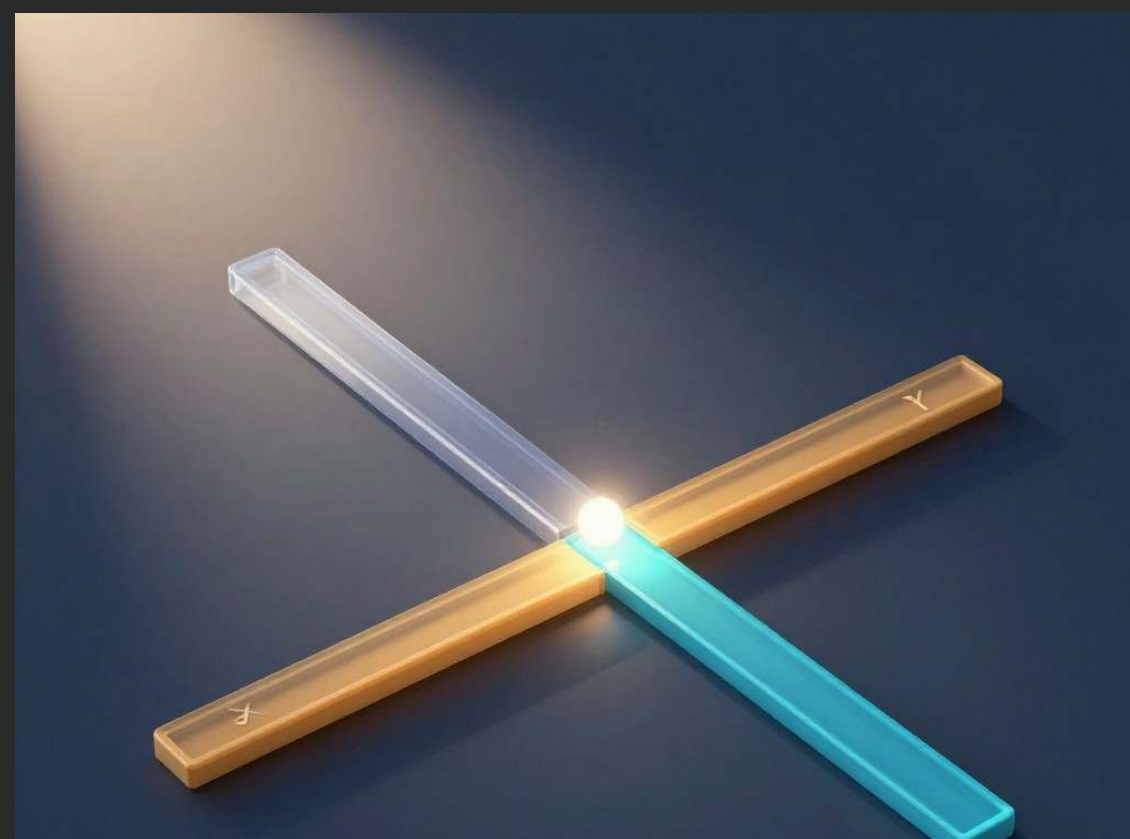
Едини́чная окру́жность: углы больше 90°



1, Тока на окружности

Точка на окружности

На единичной окружности угол можно откладывать от начального луча и продолжать дальше 90° . Каждая новая точка показывает, как меняются координаты при повороте, а значит, и значения синуса с косинусом.



Координаты вместо сторон

Для любого угла координата x точки на окружности равна $\cos \alpha$, а координата y — $\sin \alpha$. Поэтому тригонометрия связывает привычный рисунок с осью Ox и Oy с новыми углами, которые уже не помещаются в прямоугольный треугольник.



Ориентир для знаков

Положение точки сразу подсказывает, какой знак имеет функция. Если точка выше оси Ox , синус положителен; если правее оси Oy , косинус положителен. Так окружность помогает работать с углами любой величины.

Знаки тригонометрических функций по четвертям

Четверть	Положительные функции	Краткий вывод
I	все	все > 0
II	sin	$x < 0$
III	tg, ctg	оба знака +
IV	cos	$y < 0$

Знак функции зависит от того, в какой четверти координатной плоскости находится точка на единичной окружности.

Знаки функций определяются положением точки: синус связан с y -координатой, косинус — с x -координатой, а тангенс и котангенс наследуют их сочетание.

Единичная окружность и знаки координат точки.

Основное тригонометрическое тождество

01

Главная формула

Для любого угла выполняется равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Оно показывает, что синус и косинус связаны между собой и вместе описывают одну и ту же точку на окружности.

02

Связь с теоремой Пифагора

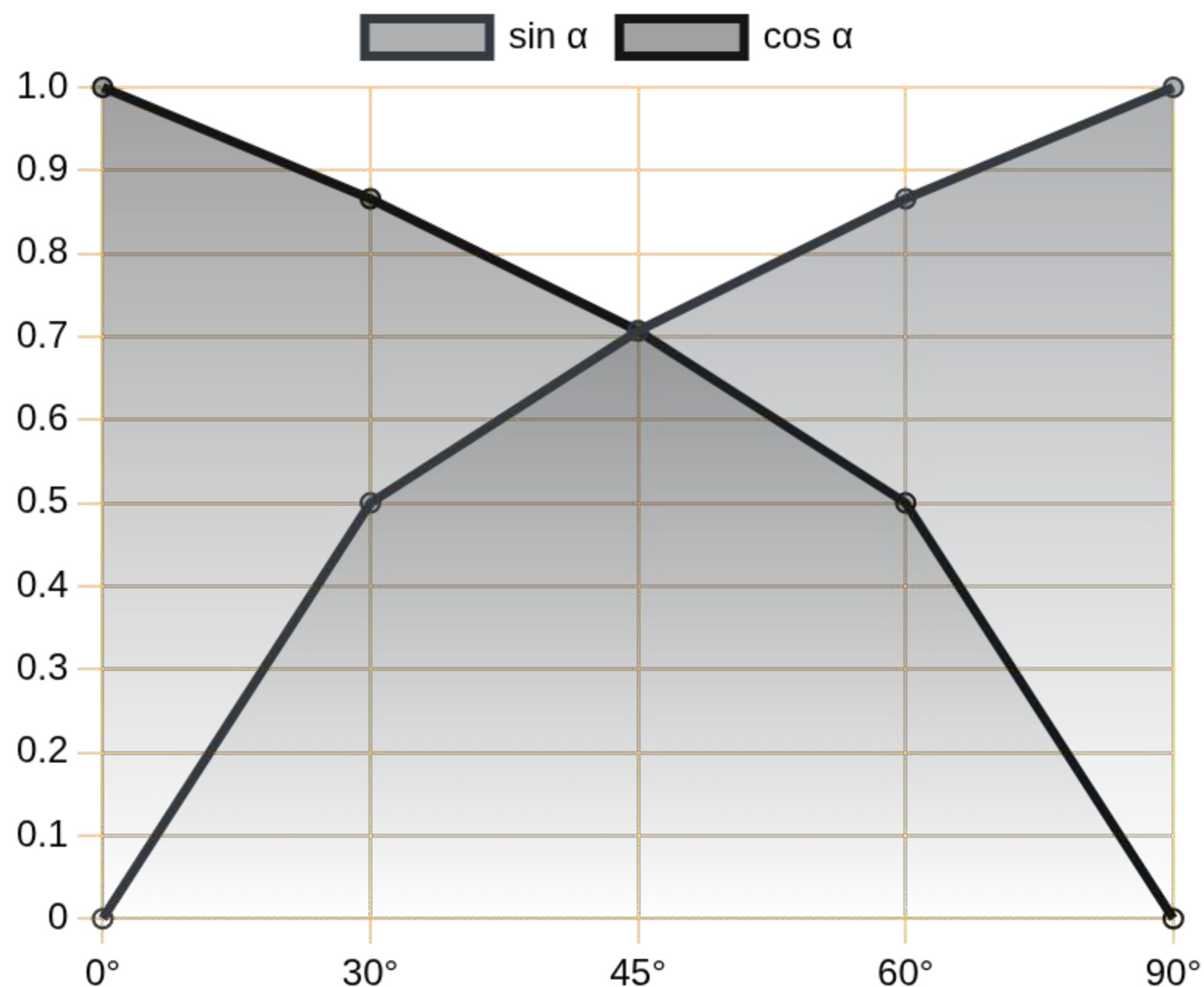
Если взять координаты точки на единичной окружности, то их квадраты дают длины сторон, связанные с гипотенузой. Именно поэтому тождество похоже на запись теоремы Пифагора в новой форме.

03

Переход к другим функциям

Из основного тождества получают $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. Эти выражения помогают упрощать вычисления и быстро проверять, не допущена ли ошибка.

Как изменяются синус и косинус при росте угла



На отрезке от 0° до 90° одна функция растёт, а другая убывает. Это удобно видеть на одном графике.

Синус и косинус ведут себя противоположно, а при 45° становятся равными. Это отражает симметрию прямоугольного равнобедренного треугольника.

Справочные значения для углов 0°, 30°, 45°, 60° и 90°.

Типичные ошибки при работе с тригонометрическими функциями

Путаница в катетах

Нередко путают противолежащий и прилежащий катеты относительно выбранного угла. Чтобы не ошибиться, нужно сначала отметить угол, а затем определить, какая сторона лежит напротив него, а какая рядом.

Формула для другого угла

Иногда берут правильную формулу, но применяют её не к тому углу треугольника. Перед вычислением важно проверить, о каком именно угле спрашивает задача: о данном или о найденном.

Неверные знаки

При переходе к единичной окружности часто забывают, что знак функции зависит от четверти. Особенно это заметно во II, III и IV четвертях, где не все тригонометрические функции положительны.

Точки без значения

Тангенс и котангенс нельзя вычислять там, где в знаменателе получается ноль. Поэтому углы 90° и 0° требуют особого внимания: в этих точках функции в школьном определении не существуют.

Сравнение свойств функций

Функция	Особенности	Область
sin, cos	от -1 до 1	все углы
tg, ctg	любые значения	не везде
tg	нет при $90^\circ + 180^\circ k$	по формуле
ctg	нет при $180^\circ k$	по формуле

Школьные определения тригонометрических функций и их область определения.

У разных тригонометрических функций разные области определения и диапазоны значений, поэтому их используют в разных типах задач.

Синус и косинус удобны тем, что определены всегда, а тангенс и котангенс полезны при работе с отношениями катетов, но имеют запрещённые значения углов.

Как выбрать нужную тригонометрическую функцию

Алгоритм выбора по известным сторонам и положению угла на координатной плоскости

Тригонометрия в картах, навигаторах и измерениях на местности



Координаты и направление

На картах синус и косинус помогают описывать направление движения как поворот относительно оси. Это позволяет переводить угол и расстояние в координаты точки маршрута.

1

GPS и расчёты

В навигационных системах тригонометрия нужна для вычисления положения объекта и расстояния до него. Такие расчёты позволяют строить маршрут даже тогда, когда путь не идёт по прямой линии.

2

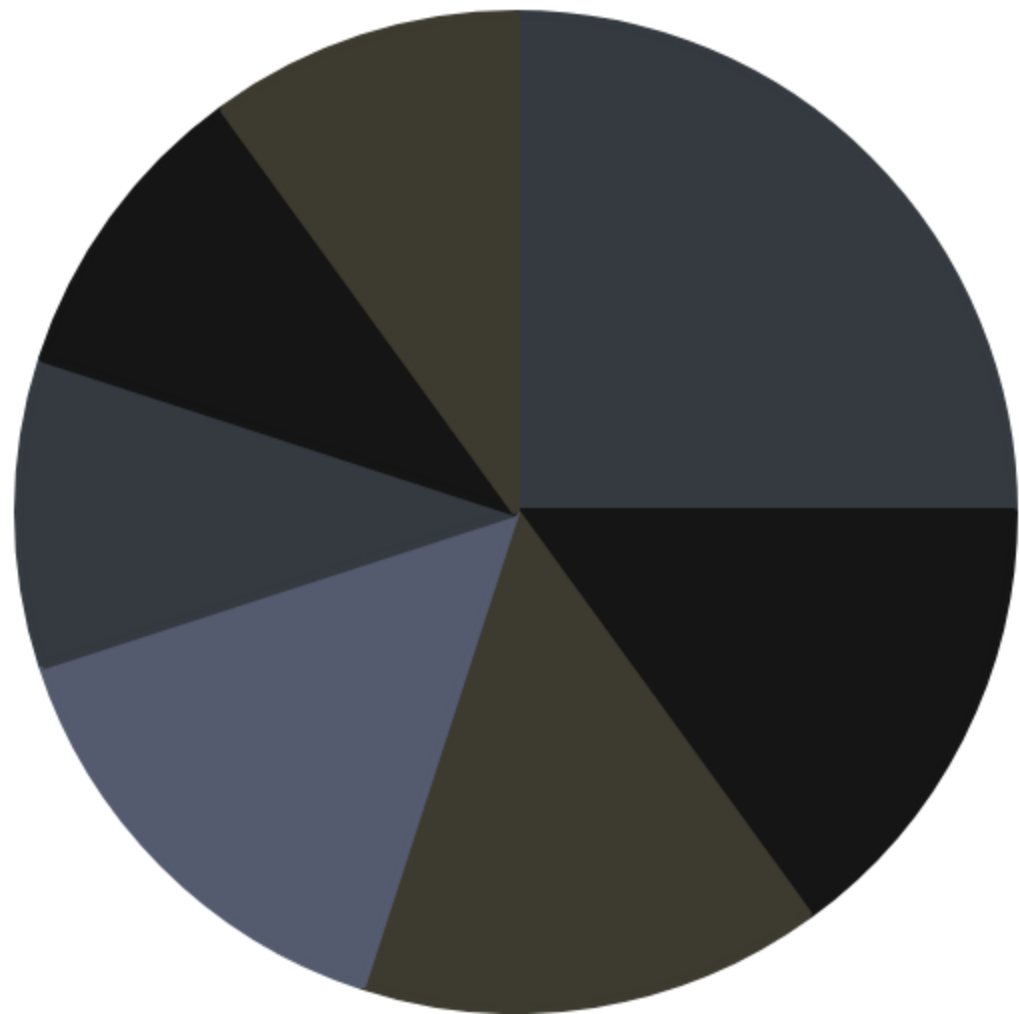
Измерения без рулетки

На местности с помощью угла подъёма можно оценить высоту дерева, здания или мачты. Если прямое измерение невозможно, тригонометрия даёт удобный и точный способ получить результат.

3

Где встречаются тригонометрические функции

Геометрия Физика Строительство
Навигация Компьютерная графика
Музыка Медицина



Круговая диаграмма показывает, что тригонометрия нужна не только в школе, но и в науке, технике и цифровых технологиях.

Больше всего тема связана с геометрией, но заметна и в прикладных областях. Это подтверждает, что функции углов полезны для описания движения, формы и колебаний.

Учебная схема по областям применения тригонометрии.

Тригонометрия помогает видеть геометрию в числах

Тригонометрические функции связывают угол, стороны треугольника и координаты точки на окружности. Они помогают решать задачи, проверять построения и применять математику в реальных ситуациях.